应用数学和力学，第14卷第10期（1993年10月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性非完整系统相对于非惯性系动力学的积分理论*

罗绍凯

（河南 商丘师专，1992年9月9日收到）

摘　要

本文建立非线性非完整系统相对于非惯性系动力学的积分理论．首先，由这种相对运动的Routh方程给出系统的第一积分；其次，分别利用系统的循环积分、能量积分降阶运动方程，得到推广的 Routh 方程和推广的 Whittaker 方程；再次，建立这类系统运动的正则方程和变分方程，并由第一积分构造系统的积分不变量；然后，给出系统的 Poincaré-Cartan 型积分变量关系和积分不变量．最后，给出一系列推论．

关键词　分析力学　非完整约束　非惯性系　积分理论

一、引　　言

随着近代科学技术的发展，非完整系统相对于非惯性系的运动问题的研究越来越显得重要．60年代以来，Лурье А. И.[1]、梅凤翔[2]、邱荣[3]和笔者[4]相继建立了完整系统或非完整系统相对运动的多种形式运动方程；最近，笔者又给出了非完整系统相对运动的广义Noether定理[5]。但是，这一问题的研究多限于方程的建立，而对新型方程的积分理论研究甚少．

复杂系统动力学方程的积分理论是现代分析力学发展的重要方面之一．本文较为全面地建立非线性非完整系统相对运动动力学的积分理论，包括：第一积分，Routh 降阶法，Whittaker 降阶法，积分不变量的构造，Poincaré-Cartan型、Poincaré 型积分变量关系和积分不变量．并给出一系列推论．

二、非线性非完整系统相对运动的第一积分

研究N个质点构成的力学系统相对于某非惯性参考系的运动．非惯性系与大质量的物体固连在一起(例如地球)，其相对于某惯性系的平动加速度$\boldsymbol{a}_0$、角速度$\boldsymbol{\omega}$和角加速度$\boldsymbol{\varepsilon}$都是时间t的已知函数，与诸质点的运动无关．系统在非惯性系中的位形由广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$

* 汪家䜣推荐．
河南省自然科学基金资助课题．

确定，其运动受有g个 Четаев 型理想非线性非完整约束

$$f_\rho(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)=0,\ \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \qquad (\rho=1,\cdots,g) \tag{2.1}$$

则系统的运动满足这种相对运动的 Routh 型方程为[2]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(V^0+V^\omega)+Q_s^c+\Gamma_s+\Lambda_s\\&\Lambda_s=\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}\qquad (s=1,\cdots,n)\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

其中T_r为系统相对运动的动能，λ_ρ为待定乘子，而Q_s，V^0，V^ω，Q_s^c，Γ_s，Λ_s分别依次为广义力、均匀力场势能、惯性离心势能、广义回转惯性力、广义陀螺力和广义约束反力[5]．

把作用于系统的主动力分为有势力和非势力两部分

$$Q_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s}+Q_s'(q_k,\ \dot{q}_k,\ t),\ V=V(q_k) \qquad (s,k=1,\cdots,n) \tag{2.3}$$

构造力学系统相对运动的 Lagrange 函数

$$L_r=T_r-V-V^0-V^\omega$$

则方程(2.2)可以写为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L_r}{\partial q_s}=Q_s'+Q_s^c+\Gamma_s+\Lambda_s \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{2.4}$$

对于方程(2.1)和(2.4)，如果满足如下条件：

1° Lagrange 函数L_r不显含某些广义坐标q_α

$$\partial L_r/\partial q_\alpha=0 \qquad (\alpha=1,\cdots,a\leqslant n) \tag{2.5}$$

2° 约束方程f_ρ不显含$\dot{q}_\alpha$

$$\partial f_\rho/\partial \dot{q}_\alpha=0 \qquad (\rho=1,\cdots,g;\ \alpha=1,\cdots,a\leqslant n) \tag{2.6}$$

3° q_α对应的各广义力之和等于零

$$Q_\alpha'+Q_\alpha^c+\Gamma_\alpha=0 \qquad (\alpha=1,\cdots,a\leqslant n) \tag{2.7}$$

则非线性非完整系统的相对运动存在a个循环积分

$$\partial L_r/\partial \dot{q}_\alpha=\beta_\alpha=\text{const} \qquad (\alpha=1,\cdots,a\leqslant n) \tag{2.8}$$

为了求得能量积分，我们计算

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r\right)$$

并把(2.4)代入，得

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r\right)=\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s-\frac{\partial L_r}{\partial t}-\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L_r}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)$$

$$=\sum_{s=1}^{n}(Q_s'+Q_s^c+\Gamma_s)\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-\frac{\partial L_r}{\partial t} \tag{2.9}$$

关系式(2.9)称为非线性非完整系统相对运动的能量方程．由Γ_s的性质知[1]$\sum\limits_{s=1}^{n}\Gamma_s\dot{q}_s\equiv0$，因

此，如果满足如下条件：

1° 约束方程(2.1)对$\dot{q}_s$是齐次函数

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s=kf_\rho \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{2.10}$$

2° 非势广义力与广义回转惯性力的功率之和等于零

$$\sum_{s=1}^{n}(Q'_s+Q^*_s)\dot{q}_s=0 \tag{2.11}$$

3° Lagrange 函数L_r不显含时间t

$$\partial L_r/\partial t=0 \tag{2.12}$$

则非线性非完整系统的相对运动存在能量积分

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L_r=h=\mathrm{const} \tag{2.13}$$

比(2.10)～(2.12)更为一般的条件是

$$\sum_{s=1}^{n}(Q'_s+Q^*_s+\Gamma_s)\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-\frac{\partial L_r}{\partial t}=0 \tag{2.14}$$

如果满足条件(2.14)，则有能量积分(2.13)。

三、非线性非完整系统相对运动动力学方程的Routh降阶法

1877年，Routh 首创利用循环积分降阶完整保守系统运动方程的方法[6]，一百多年来，深受数学、力学和物理学界的重视。最近，刘端[7]成功地把这种方法用于降阶线性非完整系统的运动方程。下面把 Routh 方法推广应用于降阶非线性非完整非有势系统相对运动的动力学方程。

假如由(2.8)式可解出α个$\dot{q}$，记作

$$\dot{q}_a=h_a(q_{\alpha+1},\cdots,q_n;\ \beta_1,\cdots,\beta_\alpha;\ \dot{q}_{\alpha+1},\cdots,\dot{q}_n;\ t) \qquad (a=1,\cdots,\alpha) \tag{3.1}$$

我们构造非完整系统相对运动的 Routh 函数

$$R_r=L_r^*-\sum_{a=1}^{\alpha}\beta_a h_a \tag{3.2}$$

其中

$$\begin{aligned}&L_r^*(q_{\alpha+1},\cdots,q_n;\ \beta_1,\cdots,\beta_\alpha;\ \dot{q}_{\alpha+1},\cdots,\dot{q}_n;\ t)\\&\quad=L_r(q_{\alpha+1},\cdots,q_n;\ h_1,\cdots,h_\alpha;\ \dot{q}_{\alpha+1},\cdots,\dot{q}_n;\ t)\end{aligned} \tag{3.3}$$

由(3.2)、(3.3)式，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_r}{\partial q_{\alpha+d}}&=\frac{\partial L_r^*}{\partial q_{\alpha+d}}-\sum_{a=1}^{\alpha}\beta_a\frac{\partial h_a}{\partial q_{\alpha+d}}=\frac{\partial L_r}{\partial q_{\alpha+d}}+\sum_{a=1}^{\alpha}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_a}\frac{\partial h_a}{\partial q_{\alpha+d}}\\&\quad-\sum_{a=1}^{\alpha}\beta_a\frac{\partial h_a}{\partial q_{\alpha+d}} \qquad (d=1,\cdots,n-\alpha)\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial R_r}{\partial \dot{q}_{a+d}}=\frac{\partial L_r^*}{\partial \dot{q}_{a+d}}-\sum_{a=1}^{a}\beta_a\frac{\partial h_a}{\partial \dot{q}_{a+d}}=\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_{a+d}}+\sum_{a=1}^{a}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_a}\frac{\partial h_a}{\partial \dot{q}_{a+d}}$$

$$-\sum_{a=1}^{a}\beta_a\frac{\partial h_a}{\partial \dot{q}_{a+d}}\qquad (d=1,\cdots,n-\alpha)\tag{3.5}$$

$$\frac{\partial R_r}{\partial \beta_a}=\frac{\partial L_r^*}{\partial \beta_a}-\sum_{j=1}^{a}\beta_j\frac{\partial h_j}{\partial \beta_a}-h_a=\sum_{j=1}^{a}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial h_j}{\partial \beta_a}-\sum_{j=1}^{a}\beta_j\frac{\partial h_j}{\partial \beta_a}-h_a\qquad (a=1,\cdots,\alpha)\tag{3.6}$$

注意到(2.8)和(3.1)式，则有

$$\frac{\partial R_r}{\partial q_{a+d}}=\frac{\partial L_r}{\partial q_{a+d}},\quad \frac{\partial R_r}{\partial \dot{q}_{a+d}}=\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_{a+d}}\qquad (d=1,\cdots,n-\alpha)\tag{3.7}$$

$$\frac{\partial R_r}{\partial \beta_a}=-\dot{q}_a\qquad (a=1,\cdots,\alpha)\tag{3.8}$$

将(3.7)代入(2.4)式中后面$(n-\alpha)$个方程，我们得到

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_r}{\partial \dot{q}_{a+d}}-\frac{\partial R_r}{\partial q_{a+d}}=Q'_{a+d}+Q^{e}_{a+d}+\Gamma_{a+d}+\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot{q}_{a+d}}\qquad (d=1,\cdots,n-\alpha)\tag{3.9}$$

方程(3.9)称为非线性非完整非有势系统相对运动的广义 Routh 方程，它们与方程(3.8)及约束方程(2.1)构成封闭的方程组。方程(3.9)与方程(2.4)保持有相同形式，但方程的个数已减少到$(n-\alpha)$个，实现了方程(2.4)的降阶，其余α个方程可由循环积分(2.8)或方程(3.8)独立地给出。

四、非线性非完整系统相对运动动力学方程的Whittaker降阶法

1904年，Whittaker 利用能量积分降阶完整保守系统的运动方程，得到著名的 Whittaker 方程[8]。梅凤翔于1984年推广得到非完整系统的 Whittaker 方程[9]。下面把 Whittaker 方法进一步应用于降阶非线性非完整非有势系统相对运动的动力学方程。

令

$$\dot{q}_\nu=\dot{q}_1 q'_\nu,\quad q'_\nu=dq_\nu/dq_1\qquad (\nu=2,\cdots,n)\tag{4.1}$$

用(4.1)替换L_r中的$\dot{q}_\nu$，得到

$$\Omega(q_s,\ q'_\nu,\ \dot{q}_1)=L_r(q_s,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_1 q'_\nu)$$

则有

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_1}+\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\nu}\frac{\dot{q}_\nu}{\dot{q}_1}\tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q'_\nu}=\dot{q}_1\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_\nu}\qquad (\nu=2,\cdots,n)\tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_s}=\frac{\partial L_r}{\partial q_s}\qquad (s=1,\cdots,n)\tag{4.4}$$

将(4.1)代入能量积分(2.13)，解出

$$\dot{q}_1=\dot{q}_1(q'_\nu,\ q_s)\qquad(\nu=2,\cdots,n;\ s=1,\cdots,n)\tag{4.5}$$

把(4.5)代入(4.2)所得函数定义为力学系统相对运动的 Whittaker 函数

$$W_r(q'_\nu,\ q_s)\equiv\partial\Omega/\partial\dot{q}_1\tag{4.6}$$

则有

$$\frac{\partial W_r}{\partial q'_\nu}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial q'_\nu\partial\dot{q}_1}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial\dot{q}_1^2}\frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q'_\nu}\tag{4.7}$$

$$\frac{\partial W_r}{\partial q_s}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_s\partial\dot{q}_1}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial\dot{q}_1^2}\frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_s}\tag{4.8}$$

为简化以上二式，利用(4.2)及$L_r\equiv\Omega$，能量积分(2.13)改写为

$$\dot{q}_1\partial\Omega/\partial\dot{q}_1=h+\Omega\tag{4.9}$$

对上式微分，得

$$\dot{q}_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial\dot{q}_1^2}\frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q'_\nu}+\dot{q}_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial\dot{q}_1\partial q'_\nu}-\frac{\partial\Omega}{\partial q'_\nu}=0\tag{4.10}$$

$$\dot{q}_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial\dot{q}_1^2}\frac{\partial\dot{q}_1}{\partial q_s}+\dot{q}_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial\dot{q}_1\partial q_s}-\frac{\partial\Omega}{\partial q_s}=0\tag{4.11}$$

分别比较(4.7)与(4.10)、(4.8)与(4.11)，并利用(4.3)、(4.4)，得

$$\frac{\partial W_r}{\partial q'_\nu}=\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_\nu},\quad\frac{\partial W_r}{\partial q_s}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial L_r}{\partial q_s}\qquad(\nu=2,\cdots,n;\ s=1,\cdots,n)\tag{4.12}$$

令 $\varphi_\rho(q_s,\ q'_\nu,\ \dot{q}_1,\ t)=f_\rho(q_s,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_1q'_\nu,\ t)$，$f^*_\rho(q'_\nu,\ q_s,\ t)\equiv\partial\varphi_\rho/\partial\dot{q}_1$

同理可得

$$\frac{\partial f^*_\rho}{\partial q'_\nu}=\frac{\partial f_\rho}{\partial\dot{q}_\nu},\quad\frac{\partial f^*_\rho}{\partial q_s}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial f_\rho}{\partial q_s}\qquad(\nu=2,\cdots,n;\ s=1,\cdots,n)\tag{4.13}$$

将(4.12)、(4.13)代入(2.4)中后面$(n-1)$个方程，我们得到

$$\frac{d}{dq_1}\frac{\partial W_r}{\partial q'_\nu}-\frac{\partial W_r}{\partial q_\nu}=\frac{1}{\dot{q}_1}\left(Q'_\nu+Q^t_\nu+\Gamma_\nu+\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial q'_\nu}\right)\qquad(\nu=2,\cdots,n)\tag{4.14}$$

方程(4.14)称为非线性非完整非有势系统相对运动的广义 Whittaker 方程．至此，已将方程(2.4)的n个自由度问题降阶为$(n-1)$个自由度问题．

在方程(2.4)中q_1是循环坐标的特殊情况下，方程(4.14)也不含q_1，那么可得新的能量积分

$$\sum_{\nu=2}^{n}\frac{\partial W_r}{\partial q'_\nu}q'_\nu-W_r=\text{const}\tag{4.15}$$

应用(4.15)，又可用上述方法将(4.14)降阶为$(n-2)$个自由度问题．如此在同样条件下，此降阶方法可继续使用．

五、非线性非完整系统相对运动的积分不变量的构造

Whittaker 曾指出[10]：对于完整保守系统，已知一个第一积分可以确定一个积分不变量．梅凤翔证明这一结论对非完整系统也适用[11]．下面我们推广应用这一结论，用非线性非完整系统相对运动的第一积分构造其积分不变量．

我们延用 Новоселов 的思想[12]，把方程 (2.4) 作为一个有条件的完整系统问题来研究，其中非完整约束(2.1)看作方程(2.4)的特殊的第一积分. 对于方程(2.1)和(2.4)，可在积分之前求出λ_ρ作为q_s，$\dot{q}_s$，t的函数. 引入力学系统相对运动的广义动量和 Hamilton 函数

$$p_s=\partial L_r/\partial \dot{q}_s \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{5.1}$$

$$H_r(q_s,\ p_s,\ t)=\sum_{s=1}^{n} p_s\dot{q}_s-L_r \tag{5.2}$$

则方程(2.4)可写为正则形式

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H_r}{\partial p_s},\ \dot{p}_s=-\frac{\partial H_r}{\partial q_s}+\tilde{Q}'_s+\tilde{Q}^c_s+\tilde{\Gamma}_s+\tilde{\Lambda}_s \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{5.3}$$

其中$\widetilde{(\cdots)}$表示$(\cdots)$中$\dot{q}$用q，p，t代换所得表达式. 我们称(5.3)为非线性非完整系统相对运动的相应完整系统的正则方程，在求解(2.1)、(2.4)的运动时，可先积分相应完整系统的运动方程(5.3)，然后再施加非完整约束(2.1)对初始条件的限制.

对于方程(5.3)，用$q_s+\delta q_s$，$p_s+\delta p_s$分别替代q_s和p_s，忽略 δq_s，δp_s 的二阶小量，我们得到变分方程

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\delta q_s=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial p_s\partial q_k}\delta q_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial p_s\partial p_k}\delta p_k\\
&\frac{d}{dt}\delta p_s=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial q_s\partial q_k}\delta q_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial q_s\partial p_k}\delta p_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}(\tilde{Q}'_s+\tilde{Q}^c_s+\tilde{\Gamma}_s+\tilde{\Lambda}_s)\delta q_k\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_k}(\tilde{Q}'_s+\tilde{Q}^c_s+\tilde{\Gamma}_s+\tilde{\Lambda}_s)\delta p_k \qquad (s=1,\cdots,n)
\end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

利用(5.3)、(5.4)可以证明：如果方程组(5.3)有

$$\Phi_r(q_s,\ p_s,t)=\text{const} \tag{5.5}$$

的一个第一积分，那么表达式

$$\int\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_s}\delta p_s\right) \tag{5.6}$$

是非线性非完整系统相对运动的一个积分不变量.

实际上，利用(5.3)、(5.4)，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_s}\delta p_s\right)=&\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial q_k\partial q_s}\frac{\partial H_r}{\partial p_k}+\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial p_k\partial q_s}\right.\right.\\
&\left.\left.\cdot\left(-\frac{\partial H_r}{\partial q_k}+\tilde{Q}'_k+\tilde{Q}^c_k+\Gamma_k+\Lambda_k\right)+\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial t\partial q_s}\right\}\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial q_k\partial p_s}\frac{\partial H_r}{\partial p_k}\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial p_k\partial p_s}\left(-\frac{\partial H_r}{\partial q_k}+\tilde{Q}'_k+\tilde{Q}^c_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k\right)+\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial t\partial p_s}\right]+\frac{\partial^2\Phi_r}{\partial t\partial p_s}\right\}\delta p_s
\end{aligned}$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_s}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial p_s\partial q_k}\delta q_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial p_s\partial p_k}\delta p_k\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_s}\left[-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial q_s\partial q_k}\delta q_k\right.$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H_r}{\partial q_s\partial p_k}\delta p_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}(\tilde{Q}'_s+\tilde{Q}^{\varepsilon}_s+\tilde{\Gamma}_s+\tilde{\Lambda}_s)\delta q_k$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_k}(\tilde{Q}'_s+\tilde{Q}^{\varepsilon}_s+\tilde{\Gamma}_s+\tilde{\Lambda}_s)\delta p_k\right]=\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial q_s}\left[(\Phi_r,H_r)\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}(\tilde{Q}'_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)+\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right]-\left(\Phi_r,\frac{\partial H_r}{\partial q_s}\right)$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_s}\cdot(\tilde{Q}'_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)\right\}\delta q_s+\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial p_s}\left[(\Phi_r,H_r)\right.\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}(\tilde{Q}'_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)+\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right]-\left(\Phi_r,\frac{\partial H_r}{\partial p_s}\right)$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial p_s}(\tilde{Q}'_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)\right\}\delta p_s+\sum_{s=1}^{n}\left[\left(\Phi_r,\frac{\partial H_r}{\partial q_s}\right)\delta q_s\right.$$

$$\left.+\left(\Phi_r,\frac{\partial H_r}{\partial p_s}\right)\delta p_s\right]+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_s}(\tilde{Q}'_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)\delta q_s$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial p_s}(\tilde{Q}'_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)\delta p_s$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial q_s}\left[(\Phi_r,H_r)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}(\tilde{Q}'_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)+\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right]\delta q_s\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial p_s}\left[(\Phi_r,H_r)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}(\tilde{Q}'_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)+\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}\right]\delta p_s\right\}\tag{5.7}$$

其中(,)为 Poisson 括号．因(5.5)是(5.3)式的第一积分，于是有

$$(\Phi_r,\ H_r)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi_r}{\partial p_k}(\tilde{Q}'_k+\tilde{Q}^{\varepsilon}_k+\tilde{\Gamma}_k+\tilde{\Lambda}_k)+\frac{\partial\Phi_r}{\partial t}=0\tag{5.8}$$

将(5.8)代入(5.7)，便可证得(5.6)式为非线性非完整系统相对运动的积分不变量．

六、非线性非完整系统相对运动的 Poincaré-Cartan型积分变量关系和积分不变量

Poincaré-Cartan 积分不变量和 Poincaré 通用积分不变量在现代数学、力学和物理学中具有重要作用．最近，刘端[13]建立了完整非保守系统的积分变量关系，给出了完整

保守力学系统的 Poincaré-Cartan 积分不变量和 Poincaré 通用积分不变量．下面研究非线性非完整系统相对运动的 Poincaré-Cartan 型、Poincaré 型积分变量关系和积分不变量．

设系统运动的初末时刻、初末坐标都不是固定的，而是参数γ的函数

$$t_0=t_0(\gamma),\quad q_s^0=q_s^0(\gamma);\quad t_1=t_1(\gamma),\quad q_s^1=q_s^1(\gamma)$$

且q_s，$\dot{q}_s$的初始和终了值满足约束方程(2.1)

$$f_\rho(q_s^0,\ \dot{q}_s^0,\ t_0)=0,\quad f_\rho(q_s^1,\ \dot{q}_s^1,\ t_1)=0$$

在此情况下，非线性非完整系统相对运动的 Hamilton 作用量

$$I_r=\int_{t_0}^{t_1}L_r dt \tag{6.1}$$

的非等时变分为

$$\Delta I_r=\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta L_r+L_r\frac{d}{dt}(\Delta t)\right]dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{s=1}^n\frac{\partial L_r}{\partial q_s}\delta q_s+\sum_{s=1}^n\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)dt+L_r\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{6.2}$$

考虑到$d\delta q_s=\delta dq_s$，完成分部积分，得

$$\Delta I_r=\sum_{s=1}^n p_s\delta q_s\Big|_{t_0}^{t_1}+L_r\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^n\left(\frac{\partial L_r}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s dt \tag{6.3}$$

利用非等时变分与等时变分之间的关系

$$\Delta q_s\Big|_{t=t_k}=\delta q_s\Big|_{t=t_k}+\dot{q}_s(t_k)\Delta t_k\qquad(k=0,1) \tag{6.4}$$

由(6.4)、(2.4)对(6.3)配方，得

$$\Delta I_r=\left(\sum_{s=1}^n p_s\Delta q_s-H_r\Delta t\right)\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^n\left(\frac{\partial L_r}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}+Q_s'+Q_s^e+\Gamma_s+\Lambda_s\right)\delta q_s dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^n(Q_s'+Q_s^e+\Gamma_s+\Lambda_s)\delta q_s dt$$

在γ值对应的路径都是真实路径（即正路）的情况下，我们有

$$\Delta I_r=\sum_{s=1}^n(p_s\Delta q_s-H_r\Delta t)\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^n(Q_s'+Q_s^e+\Gamma_s+\Lambda_s)\delta q_s dt \tag{6.5}$$

选取$2n+1$维增广相空间，在其中任取一条闭曲线C_0

$$q_s=q_s^0(\gamma),\quad p_s=p_s^0(\gamma),\quad t=t_0(\gamma)\qquad(0\leqslant\gamma\leqslant l;\ s=1,\cdots,n)$$

这里$\gamma=0$，$\gamma=l$是C_0上同一点．从C_0上各点各引一条真实路径，得正路管

$$q_s=q_s(t,\gamma),\quad p_s=p_s(t,\gamma)\qquad(0\leqslant\gamma\leqslant l;\ s=1,\cdots,n)$$

其中$q_s(t,0)=q_s(t,l)$，$p_s(t,0)=p_s(t,l)$．在此正路管上再任取一条包围正路管，且和正路管上每根曲线仅有一个交点的闭曲线C_1

$$q_s=q_s^1(\gamma),\quad p_s=p_s^1(\gamma),\quad t=t_1(\gamma)\qquad(0\leqslant\gamma\leqslant l;\ s=1,\cdots,n)$$

将(6.5)在$[0,l]$上积分，得

$$0=I_r(l)-I_r(0)=\int_0^l\left[\sum_{s=1}^n p_s\Delta q_s-H_r\Delta t\right]\Bigg|_{t_0}^{t_1}-\int_0^l\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^n(Q_s'+Q_s^e+\Gamma_s+\Lambda_s)\delta q_s dt$$

$$=\oint_{C_1}\left[\sum_{s=1}^n p_s\Delta q_s-H_r\Delta t\right]-\oint_{C_0}\left[\sum_{s=1}^n p_s\Delta q_s-H_r\Delta t\right]$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\oint_C\sum_{s=1}^n(Q_s'+Q_s^e+\Gamma_s+\Lambda_s)\delta q_s dt \tag{6.6}$$

这里t_0，t_1具有任意性，C包围正路管且与每根轨线仅有一个交点，即

$$q_s=q_s(\gamma),\ p_s=p_s(\gamma),\ t=t(\gamma)\qquad (0\leqslant\gamma\leqslant l;\ s=1,\cdots,n)$$

将(6.6)两端同除以(t_1-t_0)，并取极限，利用中值定理，我们得到如下结论：

若曲线C是围绕非线性非完整系统相对运动正路管的任意闭曲线，则沿此曲线存在Poincaré-Cartan 积分变量关系

$$\frac{d}{dt}J_r=\oint_C\sum_{s=1}^n(Q_s'+Q_s^e+\Gamma_s+\Lambda_s)\delta q_s \tag{6.7}$$

其中

$$J_r=\oint_C\left[\sum_{s=1}^n p_s\Delta q_s-H_r\Delta t\right] \tag{6.8}$$

表示非线性非完整系统相对运动的 Poincaré-Cartan 积分. 对于(6.7)，Q_s'，Q_s^e，Γ_s均为非保守力，如果满足：系统所受的主动力均为保守力$Q_s'=0$，非惯性系相对于惯性系作平动$Q_s^e=\Gamma_s=0$，且存在势函数$U(q_s)$使得广义约束反力$\Lambda_s=\partial U/\partial q_s$，那么非线性非完整系统的相对运动存在 Poincaré-Cartan 积分不变量

$$J_r=\oint_C\left[\sum_{s=1}^n p_s\Delta q_s-H_r\Delta t\right]=\text{const} \tag{6.9}$$

如果曲线C是由系统的同时状态组成，则$\Delta t=0$，关系式(6.7)成为

$$\frac{d}{dt}J_{r1}=\oint_C\sum_{s=1}^n(Q_s'+Q_s^e+\Gamma_s+\Lambda_s)\delta q_s \tag{6.10}$$

若(6.10)满足条件$Q_s'=Q_s^e=\Gamma_s=0$，$\Lambda_s=\partial U/\partial q_s$，则非线性非完整系统的相对运动存在Poincaré 通用积分不变量

$$J_{r1}=\oint_C\sum_{s=1}^n p_s\delta q_s=\text{const} \tag{6.11}$$

七、讨　　论

本文较为全面地建立了非线性非完整系统相对运动动力学的积分理论，具有一般意义.

对于完整系统，恒有$\partial f_{\rho}/\partial \dot{q}_s=0$，则$\Lambda_s=0$，本文化为完整系统相对运动动力学的积分理论.

如果$\omega=\varepsilon=0$，则$V^{\omega}=Q_s^{\varepsilon}=\Gamma_s=0$，$L_r=T_r-V-V^0$，本文退化为非线性非完整系统相对于平动非惯性系动力学的积分理论.

如果非惯性系绕固定点转动，则$V^0=0$，$L_r=T_r-V-V^{\omega}$，本文退化为非线性非完整系统相对于定点转动参考系动力学的积分理论.

如果$\boldsymbol{a}_0=0$，$\varepsilon=0$，则$V^0=Q_s^{\varepsilon}=0$，$L_r=T_r-V-V^{\omega}$，本文退化为非线性非完整系统相对于匀速转动参考系动力学的积分理论.

对于惯性参考系，有

$$\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\varepsilon}=0,\ V^0=V^{\omega}=Q_s^{\varepsilon}=\Gamma_s=0,\ T_r=T$$

$$L_r=T-V=L,\ H_r=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L=H,\ R_r=L^*-\sum_{a=1}^{a}\beta_a h_a=R$$

$$W_r=W,\ \Phi_r=\Phi,\ I_r=\int_{t_0}^{t_1}L dt=I,\ J_r=\oint_C\left[\sum_{s=1}^{n}p_s\Delta q_s-H\Delta t\right]=J$$

则本文退化为非线性非完整系统相对于惯性系动力学的积分理论.文献[6]～[11]和文献[13]的积分理论均可作为本文的推论而得到.

感谢汪家訸教授的悉心指教!

参 考 文 献

[1] Лурье А. И., *Аналитическая Механика*, Ф. М. (1961), 426—436, 288—289.

[2] 梅凤翔, 《非完整系统力学基础》, 北京工业学院出版社 (1985), 439—452.

[3] 邱荣, Mac-Millan 方程的推广, 应用数学和力学, 11(5) (1990), 463—466.

[4] 罗绍凯, 非惯性系动力学的 Hamilton 方法, 黄淮学刊, 6(1) (1989), 20—25.

[5] 罗绍凯, 非完整非有势系统相对于非惯性系的广义 Noether 定理, 应用数学和力学, 12(9) (1991), 863—870.

[6] Routh, E. J., *A Treatise on the Stability of Motion*, Macmillima, London (1877).

[7] 刘端, 非完整系统的 Routh 方法, 科学通报, 33(22) (1988), 1698—1701.

[8] Whittaker, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies with an Introduction to the Problem of Three Bodies*, Cambridge (1904).

[9] 梅凤翔, Whittaker方程对非完整力学系统的推广, 应用数学和力学, 5(1) (1984), 61—66.

[10] Whittaker, E. T., *A Treatise on the Analytical Mechanics and Rigid Bodies*, 4th Edition, Cambridge (1952), 269—271.

[11] 梅凤翔, 非完整系统的第一积分与积分不变量, 科学通报, 35(11) (1990), 815—818.

[12] Новоселов В. С., *Вариационные Методы в Механике*, ЛГУ (1966), 49—51.

[13] 刘端, 关于完整非保守系统的基本积分变量关系, 力学学报, 23(5) (1991), 617—625.

Integral Theory for the Dynamics of Nonlinear Nonholonomic System in Noninertial Reference Frames

Luo Shao-kai

(Shangqiu Normal College, He'nan)

Abstract

This paper establishes the integral theory for the dynamics of nonlinear nonholonomic system in noninertial reference frame. Firstly, based on the Routh equation of the relative motion of nonlinear nonholonomic system gives the first integral of the system. Secondly, by using cyclic integral or energy integral reduces the order of the equation and obtains generalized Routh equation and Whittaker equation respectively. Thirdly, derives canonical equation and variation equation and by using the first integral constructs integral invariant. And then, establishes the basic integral variants and the integral invariant of Poincaré-Cartan type. Finally, we give a series of deductions.

Key words analytical mechanics, nonholonomic constraints, noninertial reference frame, integral theory