应用数学和力学，第14卷第10期（1993年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Burgers激波解的稳定性*

吕　咸　青

（山东教育学院，1992年7月24日收到）

摘　要

本文探讨了在无穷小扰动下Burgers激波解的稳定性，证明Burgers方程激波解在李亚普诺夫意义下是渐近稳定的.

关键词　Burgers激波解　无穷小扰动　稳定　渐近稳定

Burgers方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial z}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\qquad(\nu>0)\tag{1}$$

是一个很有代表性的典型方程. Alan Jeffrey[1]等人曾研究了此方程定态解的稳定性. 他们所用的方法是对非线性问题进行线性化处理，得到结论：Burgers方程的定态激波解在李亚普诺夫意义下是渐近稳定或稳定的. 本文只用到最基本的分析方法，证明 Burgers 方程激波解是渐近稳定的. 定态激波解的稳定性可作为一种特殊情形是渐近稳定的. 这改进了Alan Jeffrey等人的结论.

设　　$u=u(x)=u(z-\lambda t)$

其中$x=(u_\infty^--u_\infty^+)(z-\lambda t)/2\nu$，$\lambda=$常数。$u_\infty^-$，$u_\infty^+$分别为$u(x)$在$x\to-\infty$和 $x\to+\infty$ 时的值[2]，且$u_\infty^->u_\infty^+$。

记　　$\omega=u_\infty^--u_\infty^+>0$

将上述结果代入方程(1)中，化简、整理，得：

$$-\lambda u+u^2/2=\omega u_x/2+A\tag{2}$$

这里A是积分常数.

方程(2)有激波解[2]

$$u_0=\frac{1}{2}(u_\infty^-+u_\infty^+)-\frac{1}{2}(u_\infty^--u_\infty^+)\tanh\left(\frac{1}{2}x\right)$$

其中　　$x=\frac{1}{2\nu}(u_\infty^--u_\infty^+)\left(z-\frac{1}{2}(u_\infty^-+u_\infty^+)t\right)$

根据通常的稳定性理论，我们给$u_0(x)$一个小扰动$v(x)$，通过设

$$u=u_0+v\qquad|v|\ll|u_0|\tag{3}$$

将(3)式代入方程(2)并化简得到关于v的方程：

* 钱伟长推荐.

$$\omega v_x=\omega(1-e^x)v/(1+e^x)+v^2 \tag{4}$$

我们考虑柯西问题

$$\omega v_x=\omega(1-e^x)v/(1+e^x)+v^2,\quad v(x_0)=v_0 \tag{5}$$

通过求解，我们得到(5)的解

$$v(x;x_0,v_0)=(1+\exp[x_0])^2 e^x\omega v_0/(1+e^x)(F_1e^x+F_2) \tag{6}$$

其中 $F_1=\omega\exp[x_0]-(1+\exp[x_0])v_0$，$F_2=\omega\exp[x_0]+(1+\exp[x_0])v_0\exp[x_0]$

通过限制 $|v_0|\leqslant\min\{\omega\exp[x_0]/2(1+\exp[x_0]),\ \omega/2(1+\exp[x_0])\}$

则我们有下述结果：

$$F_1\geqslant\omega\exp[x_0]-(1+\exp[x_0])|v_0|\geqslant\omega\exp[x_0]/2 \tag{7}$$

$$F_2\geqslant\omega\exp[x_0]-(1+\exp[x_0])|v_0|\exp[x_0]\geqslant\omega\exp[x_0]/2 \tag{8}$$

$$|v(x;x_0,v_0)|\leqslant2(1+\exp[x_0])^2e^x|v_0|/(1+e^x)^2\exp[x_0] \tag{9}$$

$$|v(x;x_0,v_0)|\leqslant2(1+\exp[x_0])^2|v_0|/\exp[x_0] \tag{10}$$

根据(9)式，我们显然有：

$$\lim_{x\to-\infty}v(x;x_0,v_0)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}v(x;x_0,v_0)=0 \tag{11}$$

由(10)及(11)式，我们显然有：Burgers激波解$u_0(x)$关于无穷小扰动是渐近稳定的.

定态激波解[1]

$$\tilde{u}_0=-u_\infty\tanh(u_\infty z/2\nu),\qquad u_\infty>0$$

与时间变量 t 是没有关系的，它显然是$u_0(x)$的一个特例. 因此我们可以说稳态激波解关于无穷小扰动也是渐近稳定的.

参 考 文 献

[1] Jeffrey, Alan and Tsunehiko Kakutani, Stability of the Burgers shock wave and the Korteweg-de Vries soluton, *Indiana University Mathematics*, 20(5) (1970), 463—468.

[2] Jeffrey, A. and T. Kawahara, *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory*, Pitman, London (1982).

Stability of the Burgers Shock Wave

Lü Xian-qing

(Shandong Education College, Ji'nan)

Abstract

This paper considers the stability of the Burgers shock wave solution with respect to infinitesimal disturbance. It is found that the Burgers shock wave is asymptotically stable in the Liapunov sense.

Key words Burgers shock wave, infinitesimal disturbance, stability, asymptotically stable