应用数学和力学，第14卷第10期(1993年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

随机结构动力反应和可靠性分析

曹　宏　李秋胜　李芝艳

(武汉工业大学)(澳大利亚蒙那希大学)(中南建筑设计院)

(周焕文推荐，1992年7月10日收到)

摘　要

本文研究随机动力荷载作用下随机结构反应有限元分析方法，提出了随机结构动力反应和基于随机抗力可靠性计算公式。

关键词　随机结构　可靠性

一、随机结构的动力反应

实际结构中存在着各种不确定性量，如材料特性分布、结构形状、几何参数、边界条件等.

近年来，人们愈来愈清楚地认识到，将这些客观存在的不确定量视为随机变量，要较之通常人们取为确定性量更为合理. 同样，作用在结构物上的某些动荷载，如阵风、地震、波浪等，宜于模拟为随机过程.

本文采用随机有限元方法分析随机结构，并将作用于结构物上的随机动荷载视为随机过程.

根据随机有限元理论，可将结构的随机特征向量$\{Z\}$表示为：

$$\{Z\}=\{\bar{Z}\}+\{\alpha\} \tag{1.1}$$

式中$\{\bar{Z}\}=E[\{Z\}]$为随机向量$\{Z\}$的均值，$\{\alpha\}$表示均值为零的小随机向量.

将随机刚度矩阵$[K]$按泰勒级数在α随机量的均值点展开，有：

$$[K]=[\bar{K}]+\sum_{i=1}^{N}\alpha[K_i^{(1)}]\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}[K_{ij}^{(2)}]\alpha_i\alpha_j \tag{1.2}$$

其中$[\bar{K}]$为在α均值点的刚度矩阵，属确定性量；$[K_i^{(1)}]$，$[K_{ij}^{(2)}]$分别为刚度矩阵$[K]$对随机变量的一次、二次导数在α均值处的导数值；N为随机变量的总数. 类似地，若忽略质量矩阵和阻尼矩阵的随机性，则随机位移反应向量$\{X\}$也可写成：

$$\{K\}=\{\bar{X}\}+\sum_{i=1}^{N}\alpha\{X_i^{(1)}\}\alpha_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\{K_{ij}^{(2)}\}\alpha_i\alpha_j \tag{1.3}$$

式中的上标(1)、(2)也表示导数的阶.

结构振动方程为：

$$[M]\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}\}+[K]\{X\}=\{F(t)\} \tag{1.4}$$

其中$[M]$为质量矩阵，$[C]$为阻尼矩阵，$\{F(t)\}$为随机动力荷载向量.

将式(1.2)、(1.3)代入方程(1.4)中，经整理可得如下方程组：

$$[M]\{\ddot{\bar{X}}\}+[C]\{\dot{\bar{X}}\}+[\bar{K}]\{\bar{X}\}=\{F\} \tag{1.5}$$

$$[M]\{\ddot{X}_i^{(1)}\}+[C]\{\dot{X}_i^{(1)}\}+[\bar{K}]\{X_i^{(1)}\}=-[K_i^{(1)}]\{\bar{X}\} \qquad (i=1,\cdots,N) \tag{1.6}$$

$$[M]\{\ddot{X}_{ij}^{(2)}\}+[C]\{\dot{X}_i^{(2)}\}+[\bar{K}]\{X_j^{i(2)}\}=-[K_{ij}^{(2)}]\{\bar{X}\}-[K_i^{(1)}]\{X_j^{(1)}\}$$
$$-[K_j^{(1)}]\{X_i^{(1)}\} \qquad (i,j=1,\cdots,N) \tag{1.7}$$

由于荷载$\{F\}$是随机过程向量，故反应 $\{\bar{X}\}$，$\{X_i^{(1)}\}$和$\{X_{ij}^{(2)}\}$均为随机过程向量.

采用振型分解法求解．令

$$\{\bar{X}\}=[\Phi]\{\bar{y}\} \tag{1.8a}$$

$$\{X_i^{(1)}\}=[\Phi]\{y_i^{(1)}\} \tag{1.8b}$$

$$\{X_{ij}^{(2)}\}=[\Phi]\{y_{ij}^{(2)}\} \tag{1.8c}$$

式中Φ为振型矩阵．若$[C]$为瑞雷阻尼，且有

$$[\Phi]^T[M][\Phi]=I \tag{1.9a}$$

$$[\Phi]^T[C][\Phi]=[\mathrm{diag}(2\xi_j\omega_j)]=[C^*] \tag{1.9b}$$

$$[\Phi]^T[K][\Phi]=[K^*]=[\mathrm{diag}(\omega_j^2)] \tag{1.9c}$$

则将式(1.8)代入到式(1.5)～(1.7)中并左乘$[\Phi]^T$，得

$$\{\ddot{\bar{y}}\}+[C^*]\{\dot{\bar{y}}\}+[K^*]\{\bar{y}\}=\{f(t)\} \tag{1.10}$$

$$\{\ddot{y}_i^{(1)}\}+[C^*]\{\dot{y}_i^{(1)}\}+[K^*]\{y_i^{(1)}\}=\{f_{1i}\} \tag{1.11}$$

$$\{\ddot{y}_{ij}^{(2)}\}+[C^*]\{\dot{y}_{ij}^{(2)}\}+[K^*]\{y_{ij}^{(2)}\}=\{f_{2ij}\} \tag{1.12}$$

在式(1.10)～(1.12)中：

$$\{f(t)\}=[\Phi]^T\{F(t)\} \tag{1.13a}$$

$$\{f_{1i}\}=-[\Phi]^T[K_i^{(1)}][\bar{X}] \tag{1.13b}$$

$$\{f_{2ij}\}=-[\Phi]^T([K_{ij}^{(2)}]\{X\}-[K_i^{(1)}]\{X_{jj}^{(1)}\}-[K_j^{(1)}]\{X_i^{(1)}\}) \tag{1.13c}$$

位移反应的协方差矩阵（仅考虑前二阶）为

$$\Gamma_X=\Gamma_{\bar{X}}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}E(\alpha_i\alpha_j)\Gamma X_I(X_i^{(1)},X_j^{(1)})$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}E(\alpha_i\alpha_j)[\Gamma_{\bar{X},X^{(2)}}(\bar{X},X_{ij})+\Gamma_{X^{(2)}\bar{X}},(X_{ij}^{(2)},\bar{X})] \tag{1.14}$$

式中　$\Gamma_{\bar{X}}=E[\{\bar{X}\}\{\bar{X}\}^T]$

$$\Gamma_{X^{(1)}}(X_i^{(1)},X_j^{(1)})=E[\{X_i^{(1)}X_j^{(1)}\}] \tag{1.15a}$$

$$\Gamma_{\bar{X},X^{(2)}}(\bar{X},X_{ij}^{(2)})=E[\{\bar{X}\}\{X_{ij}^{(2)}\}^T] \tag{1.15b}$$

$$\Gamma_{X^{(2)}\bar{X}}(X_{ij}^{(2)}\bar{X})=E[\{X_{ij}^{(2)}\}\{\bar{X}\}^T] \tag{1.15c}$$

若用谱密度形式表示，式(1.14)应改写为：

$$[S_X(\omega)]=[S_{\bar{X}}(\omega)]+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}E(\alpha_i\alpha_j)[S_{X^{(1)}}(X_i^{(1)}X_j^{(1)},\omega)]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}E(\alpha_i\alpha_j)\{[S_{\bar{X},X^{(2)}}(\bar{X},X_{ij}^{(2)},\omega)]+[S_{X^{(2)}\bar{X}}(X_{ij}^{(2)},\bar{X},\omega)]\}\tag{1.16}$$

对于式(1.10)有

$$S_{\bar{y}_i\bar{y}_j}(\omega)=H_i^*(\omega)H_j(\omega)S_{f_if_j}(\omega)\tag{1.17}$$

式中$H_j(\omega)$为频率反应函数，由式(1.10)计算[3]；$H_i^*(\omega)$与$H_i(\omega)$共轭.

上式对于$\{y_i^{(1)}\}$,$\{y_{ij}^{(2)}\}$亦成立.

式(1.17)的矩阵形式为

$$[S_{\bar{y}}(\omega)]=[H^*(\omega)][S_f(\omega)][H(\omega)]\tag{1.18}$$

其中

$$[H(\omega)]=[\mathrm{diag}\{H_j(\omega)\}]\tag{1.19}$$

由式(1.13)可推得

$$[S_f(\omega)]=[\Phi]^T[S_F(\omega)][\Phi]\tag{1.20}$$

由式(1.8a)可推得

$$[S_{\bar{X}}(\omega)]=[\Phi][S_{\bar{y}}(\omega)][\Phi]^T\tag{1.21}$$

$$=[\Phi][H^*(\omega)[\Phi]^T[S_F(\omega)][\Phi][H(\omega)][\bar{\Phi}]^T\tag{1.22}$$

对于式 (1.16) 第二 项 中 的 $S_{X^{(1)}}(X_i^{(1)},X_j^{(1)},\omega)$也有类似的推导，即

$$[S_{X^{(1)}}(X_i^{(1)},X_j^{(1)},\omega)]=[\Phi][S_{y^{(1)}}(y_i^{(1)},y_j^{(1)},\omega)][\Phi]^T\qquad(\text{见式}1.21)$$

$$=[\Phi][H^*(\omega)][S_{f_1}(f_{1i},f_{1j},\omega)][H(\omega)[\Phi]^T\qquad(\text{见式}1.18)$$

$$[S_{X^{(1)}}(X_i^{(1)},X_j^{(1)},\omega)]=[\Phi][H^*(\omega)][\Phi]^T[K_i^{(1)}][S_{\bar{X}}(\omega)][K_j^{(1)}]^T[\Phi][H(\omega)][\Phi]^T\tag{1.23}$$

同理，式 (1.16) 中的$S_{\bar{X},X^{(2)}}(\bar{X},X_{ij}^{(2)},\omega)$应为

$$S_{\bar{X},X^{(2)}}(\bar{X},X_{ij}^{(2)},\omega)=[\Phi][S_{\bar{y}y^{(2)}}(\bar{y},y_{ij}^{(2)},\omega)][\Phi]^T\qquad(\text{见}1.8)$$

$$=[\Phi][H^*(\omega)][S_{ff_2}(f,f_{2ij}\omega)][H(\omega)][\Phi]^T\tag{1.24}$$

利用式(1.10)、(1.12)，有

$$[S_{ff_2}(f,f_{2ij}\omega)]=-[S_{f\bar{X}}(\omega)][K_{ij}^{(2)}]^T[\Phi]-[S_{fX^{(1)}}(f,X_j^{(1)},\omega)][K_i^{(1)}]^T[\Phi]$$

$$-[S_{fX^{(1)}}(f,X_i^{(1)},\omega)][K_j^{(1)}]^T[\Phi]\tag{1.25}$$

式中

$$[S_{f\bar{X}}(\omega)]=[S_f(\omega)][H(\omega)]=[\Phi]^T[S_F(\omega)][\Phi][H(\omega)]\tag{1.26}$$

$$[S_{fX^{(1)}}(f,X_j^{(1)}\omega)]=[S_{fy^{(1)}}(f,X_j^{(1)},\omega)][\Phi]^T=[S_{ff_1}(f,f_{1i},\omega)][H(\omega)][\Phi]^T\tag{1.27}$$

$$=-[S_{f\bar{X}}(\omega)][K_i^{(1)}]^T[\Phi][H(\omega)][\Phi]^T$$

$$=-[\Phi]^T[S_F(\omega)][\Phi][H(\omega)][K_i^{(1)}][\Phi][H(\omega)][\Phi]^T\tag{1.28}$$

由于刚度的随机性，因此，结构的自振频率、振型都是随机的，在如下特征方程中

$$([K]-\lambda[M])\{\Phi\}=0\tag{1.29}$$

解出的特征值，特征向量$\{\Phi\}$都是随机量. 不失一般性，可设

$$\lambda=\bar{\lambda}+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\lambda_i^{(1)}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j\lambda_{ij}^{(2)}\tag{1.30}$$

及

$$\{\Phi\}=\{\bar{\Phi}\}+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\{\Phi_i^{(1)}\}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j\{\Phi_{ij}^{(2)}\} \tag{1.31}$$

将式(1.30)、(1.31)代入到式(1.29)中

$$\begin{aligned}&([\bar{K}]+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i[K_i^{(1)}]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j[K_{ij}^{(2)}]-\bar{\lambda}[M]-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\lambda_i^{(1)}[M]\\&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j\lambda_{ij}^{(2)}[M])(\{\bar{\Phi}\}+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\{\Phi_i^{(1)}\}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j\{\Phi_{ij}^{(2)}\})=\{0\}\end{aligned} \tag{1.32}$$

上式可分解为

$$([\bar{K}]-\bar{\lambda}[M])\{\bar{\Phi}\}=\{0\} \tag{1.33}$$

$$([\bar{K}]-\bar{\lambda}[M])\{\Phi_i^{(1)}\}=-([K_i^{(1)}]-\lambda_i^{(1)}[M])\{\bar{\Phi}\} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}([\bar{K}]-\bar{\lambda}[M])\{\Phi_{ij}^{(2)}\}=&-([K_{ij}^{(2)}]-\lambda_{ij}^{(2)}[M])\{\bar{\Phi}\}\\&-([K_i^{(1)}]-\lambda_i^{(1)}[M])\{\Phi_j^{(1)}\}-(K_j^{(1)}-\lambda_j^{(1)}[M])\{\Phi_i^{(1)}\}\end{aligned} \tag{1.35}$$

由于式(1.33)是确定性方程，难于求得特征值$\bar{\lambda}_i$及相应的特征向量$\{\bar{\Phi}\}_i$. 作交换

$$\{\Phi\}_i=(M_i^*)^{-1/2}\{\bar{\Phi}\}_i \tag{1.36}$$

其中

$$M_i^*=\{\bar{\Phi}\}_i^T[M]\{\bar{\Phi}\}_i \tag{1.37}$$

并将$\{\bar{\Phi}\}_i$按升幂排列为矩阵$[\Phi]$，则$[\Phi]$满足

$$[\Phi]^T[M][\Phi]=I \tag{1.38}$$

若对特征值$\bar{\lambda}_i$亦作升幂排列，则有

$$[K^*]=[\mathrm{diag}(\omega_i)^2]=[\mathrm{diag}(\lambda_j)] \tag{1.39}$$

由此可知，在强迫振动计算中，可以不必求出式(1.34)、(1.35)中的未知项式. 式(1.34)，(1.35)的解法可见附录。

当荷载为地震荷载或风荷载时，$[S_F(\omega)]$可简化，对于地震荷载

$$\{F(t)\}=-[M]\{1\}a(t) \tag{1.40}$$

式中$a(t)$为地面运动加速度. 由此不难导出

$$[S_F(\omega)]=[M]\{1\}\{1\}^T[M]S_a(\omega) \tag{1.41}$$

通常$S_a(\omega)$采用金井清谱：

$$S_a(\omega)=\frac{\omega_g^4+4\xi_g^2\omega^2\omega^2}{(\omega_g^2-\omega^2)^2+4\xi_g^2\omega_g^2\omega^2}S_0 \tag{1.42}$$

其中ω_g、ξ_g分别为场地土卓越周期及频率，S_0为谱强度.

对于风荷载

$$\{F(t)\}=[A]\{w(t)\} \tag{1.43}$$

式中$[A]=[\mathrm{diag}(A_i)]$，A_i为第i质点处迎风面积与体型系数之积；$\{w(t)\}$为脉动风压，可写成

$$\{w(t)\}=\rho[\bar{V}]\{v(t)\} \tag{1.44}$$

式中$[\bar{V}]=[\mathrm{diag}(\bar{V}_i)]$，$\bar{V}_i$为第$i$质点处平均风速，而$v_i(t)$为第$i$质点处的脉动风速，因此

$$[S_F(\omega)]=\rho^2[A][\bar{V}][S_v(\omega)][\bar{V}]^T[A]^T \tag{1.45}$$

一般假定矩阵$[S_v(\omega)]$中的任一项均可定成

$$S_{v_iv_j}(\omega)=\rho(Z_i,Z_j,\omega)S_v(\omega) \tag{1.46}$$

式中，$S_v(\omega)$为标准高度的脉动风速谱，而 $\rho(Z_i,Z_j,\omega)$ 为脉动风的互相关系数，一般假定互相关系数与脉动风的频率无关，即

$$\rho(Z_i,Z_j,\omega)=\rho(Z_i,Z_j) \tag{1.47}$$

标准高度的脉动风速谱中最著名的是Davenport谱

$$[S_v(\omega)]=\frac{4K\bar{V}_{10}^2}{\omega}\frac{x^2}{(1+x^2)^{4/3}} \tag{1.48}$$

式中

$$x=\frac{600\omega}{\pi\bar{V}_{10}} \tag{1.49}$$

K为地面粗糙度系数，$\bar{V}_{10}$为标准高度（10米）的最大平均风速。

而相关系数$\rho(Z_i,Z_j)$可取

$$\rho(Z_i,\ Z_j)=\exp\left[-\frac{0.232495|Z_i-Z_j|}{(Z_i+Z_j)^{1/2}}\right] \tag{1.50}$$

随机结构动力反应的统计量可由如下二式计算：

$$\sigma_X=\int_0^{\infty}S_X(\omega)d\omega \tag{1.51}$$

$$\sigma_{\dot{X}}=\int_0^{\infty}\omega^2S_X(\omega)d\omega \tag{1.52}$$

最大反应X_m的统计量为：

$$E[X_m]=P\sigma_X \tag{1.53}$$

$$\sigma_{Xm}=q\sigma_X \tag{1.54}$$

峰值因子p，q分别为：

$$p=\sqrt{2\ln(\gamma\tau)}+\frac{0.5772}{\sqrt{2\ln(\gamma\tau)}} \tag{1.55}$$

$$q=\frac{\pi}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\ln(\gamma\sigma)}} \tag{1.56}$$

式中τ为持时，γ为交零率：

$$\gamma=\frac{\sigma_{\dot{X}}}{\pi\sigma_X} \tag{1.57}$$

二、随机结构的动力可靠性分析

结构动力可靠性系指结构在动力随机荷载作用下，在预定的使用期内，在规定的使用条件下，完成预期功能的概率。

按上述定义，对于单侧界限，动力可靠性的表达式可写成：

$$P_s=P(X(t)\leqslant R,0\leqslant t\leqslant\tau) \tag{2.1}$$

其中$X(t)$为结构的动力反应，是随机过程，其统计量由上节求得。R为结构抗力，可视为随机变量，其概率分布类型及统计量可由试验资料用统计法确定。

由随机振动理论，动力可靠性可表示为：

$$P_s=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{n!}\int_0^\tau\cdots\int_0^\tau M_n(t_1\cdots t_n)dt_1\cdots dt_n \tag{2.2}$$

其中$M_n(t_1\cdots t_n)dt_1\cdots dt_n$表示$X(t)$在$[t_1,t_1+dt_1]\cdots[t_n,t_n+dt_n]$时间区间上与界限$R$各发生一次交差的概率。设交差是相互独立的，则：

$$M_n(t_1\cdots t_n)=\prod_{i=1}^{n}M(t_i) \tag{2.3}$$

其中$M(t_i)$为$X(t)$在$[t_i,t_i+dt]$上与界限R发生一次交差的概率。

$$M(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\dot X(t)|f_{X\dot X}(R,\dot X,t)d\dot X f_R(\gamma)d\gamma \tag{2.4}$$

其中$f_R(\gamma)$为结构抗力R的概率密度函数，本文设$f_R(\gamma)$为正态分布，即

$$f_R(\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_R}\exp\left[-\frac{(\gamma-m_R)^2}{2\sigma_R^2}\right] \tag{2.5}$$

当$X(t)$为具有零均值的平稳高斯过程，联合概率密度为：

$$f_{X\dot X}(X,\dot X)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_{\dot X}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{\sigma_X^2}+\frac{\dot X^2}{\sigma_{\dot X}^2}\right)\right\} \tag{2.6}$$

将式(2.5)、(2.6)代入式(2.4)，可得：

$$M(t)=-\frac{1}{\pi}\frac{\sigma_{\dot X}}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_R^2}}\exp\left[-\frac{m_R^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_R^2)}\right] \tag{2.7}$$

式中m_R和σ_R分别为结构抗力R的均值和标准差，τ为持时，$\sigma_{\dot X}$，σ_X为上节求得的结构反应统计量。

由式(2.2)，结构动力可靠性为：

$$P_s=\exp\left[-\int_0^\tau M(t)dt\right]=\exp\left\{-\frac{\tau}{\pi}\frac{\sigma_{\dot X}}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_R^2}}\exp\left[-\frac{m_R^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_R^2)}\right]\right\} \tag{2.8}$$

上式是在考虑了结构抗力随机性的基础上，随机结构在随机动力荷载作用下的动力可靠性计算公式。

附 录

当刚度矩阵是随机矩阵时，结构的自振频率及振型都是随机变量。因此特征方程可分解为：

$$([\bar K]-\bar\lambda[M])\{\bar\Phi\}=\{0\} \tag{A.1}$$

$$([\bar K]-\bar\lambda[M])\{\Phi_i^{(1)}\}=-([K_i^{(1)}]-\lambda_i^{(1)}[M])\{\bar\Phi\} \tag{A.2}$$

$$([\bar K]-\bar\lambda[M])\{\Phi_{ij}^{(2)}\}=-([K_{ij}^{(2)}]-\lambda_{ij}^{(2)}[M])\{\bar\Phi\}-([K_i^{(1)}]-\lambda_i^{(1)}[M])\{\Phi_j^{(1)}\}-([K_j^{(1)}]-\lambda_j^{(1)}[M])\{\Phi_i^{(1)}\} \tag{A.3}$$

式(A.1)是一确定性方程，不难求得其所有的特征值$\bar\lambda_R$及相应的特征向量$\{\bar\Phi\}_R(R=1,2,\cdots)$。不失一般性，可略去其下标$R$，并设

$$\{\bar\Phi\}^T[M]\{\bar\Phi\}=1 \tag{A.4}$$

利用对称性，式(A.1)的转置式为：

$$\{\bar\Phi\}^T([\bar K]-\bar\lambda[M])=\{0\}^T \tag{A.5}$$

在式(A.2)中左乘$\{\bar\Phi\}^T$，并利用式(A.5)得：

$$\{0\}=-\{\bar\Phi\}^T([K_i^{(1)}]-\lambda_i^{(1)}[M])\{\bar\Phi\} \tag{A.6}$$

从而有

$$\lambda_i^{(1)}=\{\bar{\Phi}\}^T[K_i^{(1)}]\{\bar{\Phi}\} \tag{A.7}$$

由于在式（A.2）中，$\{\Phi_i^{(1)}\}$的系数行列式为零。因此无法直接由式(A.2)求得$\{\Phi_i^{(1)}\}$。为此须作某种假设，通常假设

$$\{\bar{\Phi}\}[M]\{\Phi_i^{(1)}\}=0 \tag{A.8}$$

因此，式(A.2)与式(A.8)可合写为：

$$\begin{bmatrix}[\bar{K}]-\bar{\lambda}[M]\\ \{\bar{\Phi}\}^T[M]\end{bmatrix}\{\Phi_i^{(1)}\}=-\begin{bmatrix}[K_i^{(1)}]-\lambda_i^{(1)}[M]\\ 0\end{bmatrix}\{\bar{\Phi}\} \tag{A.9}$$

或写成：

$$[C_1]\{\Phi_i^{(1)}\}=[D_1]\{\bar{\Phi}\} \tag{A.10}$$

由于矩阵($[C_1]^T[C_1]$)是非奇异的。因此，可导出：

$$\{\Phi_i^{(1)}\}=([C_1]^T[C_1])^{-1}[C_1]^T[D_1]\{\bar{\Phi}\} \tag{A.11}$$

式(A.3)中特征值 $\lambda_{ij}^{(2)}$ 及 $\{\Phi_{ij}^{(2)}\}$的求法同式(A.2)相类似。即以$\{\bar{\Phi}\}^T$左乘式(A.3)得：

$$\{\bar{\Phi}\}^T[K_{ij}^{(2)}]\{\bar{\Phi}\}-\lambda_{ij}^{(2)}+\{\bar{\Phi}\}^T([K_i^{(1)}]\{\Phi_j^{(1)}\}+[K_j^{(1)}]\{\Phi_i^{(1)}\})=0 \tag{A.12}$$

式(A.12)中利用了式(A.8)的假设。

$$\lambda_i^{(2)}=\{\bar{\Phi}\}^T([K_{ij}^{(2)}]\{\bar{\Phi}\}+[K_i^{(1)}]\{\Phi_j^{(1)}\}+[K_j^{(1)}]\{\Phi_i^{(1)}\}) \tag{A.13}$$

同式(A.8)类似，假设

$$\{\Phi\}^T[M]\{\Phi_{ij}^{(2)}\}+[\Phi_i]^T[M]\{\Phi_j\}=0 \tag{A.14}$$

可将式(A.14)与式(A.3)合写为：

$$[C]\{\Phi_{ij}^{(2)}\}=-[D]\{\bar{\Phi}\}+[E_i]\{\Phi_j^{(1)}\}+[E_j]\{\Phi_i^{(1)}\} \tag{A.15}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&[C]\begin{bmatrix}[K]-\bar{\lambda}[M]\\ \{\bar{\Phi}\}^T[M]\end{bmatrix},\quad [D]=\begin{bmatrix}[K_{ij}^{(2)}]-\lambda_{ij}^{(2)}[M]\\ 0\end{bmatrix}\\ &[E_i]=\begin{bmatrix}[K_i^{(T)}]-\lambda_i^{(T)}[M]\\ \frac{1}{2}\{\Phi_j^{(1)}\}[M]\end{bmatrix},\quad [E_j]=\begin{bmatrix}[K_i^{(1)}]-\lambda^{(1)}[M]\\ \frac{1}{2}\{\Phi^{(1)}\}[M]\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{A.16}$$

由式(A.15)式可得到

$$\{\Phi_{ij}^{(2)}\}=([C]^T[C])^{-1}[C]^T(-[D]\{\bar{\Phi}\}+[E_i]\{\Phi_j^{(1)}\}+E\{\Phi_i^{(1)}\}) \tag{A.17}$$

参 考 文 献

[1] 李秋胜、曹宏，风荷载作用下可连续化的高层和高耸结构的动力可靠性分析，工程力学，(1)(1987).

[2] 李秋胜、曹宏。抗震结构的动力可靠性分析，《工程结构可靠性论文集》(1987)。

[3] 李桂青，《抗震结构计算理论和方法》，地震出版社 (1985)。

[4] 曹宏、李秋胜，结构的疲劳可靠性，《全国第二届地震工程会议论文集》，武汉 (1987)。

[5] 李秋胜、曹宏等，Fuzzy dynamic reliability of tall buildings and high-rise structures under the action of wind loads, *Proceedings of International Symosium on Fuzzy Systems and Knowledge Engineering* (1987).

[6] 李秋胜、刘季．抗震结构非线性随机反应动力可靠性分析，哈尔滨建筑工程学院学报，(3)(1987).

Dynamic Response and Reliability Analysis of Random Structures

Cao Hong

(Wuhan University of Technology, Wuhan)

Li Qiu-sheng

(Monash University, Australia)

Li Zhi-yan

(Mid-South China Institute of Architecture, Changsha)

Abstract

The finite element method determining dynamic response of random structures subjected to random dynamic load is studied, the formulas for dynamic response of random structures and reliability based on random resistibility are proposed in this paper.

Key words random structure, reliability