应用数学和力学，第14卷 第9期（1993年9月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

奇异摄动半线性抛物方程的数值解法

吴启光 李继春

（南京大学数学系，1992年4月30日收到）

摘 要

本文我们讨论了一维和二维奇异摄动半线性抛物方程，我们利用直线法和精确差分格式在非均匀网中上得到了数值解．而且还证明了关于ε的一阶一致收敛性．

关键词 一致收敛 抛物方程 非均匀网格

一、一维问题

1. 引言

这节我们要求解如下问题

$$\varepsilon^2 u_{xx}-u_t=f(x,t,u),\ (x,t,u)\in(0,1)\times(0,T)\times(-\infty,+\infty) \tag{1.1}$$

$$u(x,0)=g(x),\ u(0,t)=u(1,t)=0 \tag{1.2}$$

对此问题，很多人广泛地研究过它的渐近展开，但如何求出它的数值解却研究很少．这里我们将利用直线法和精确差分格式在特殊的非均匀网格上构造一个差分格式，并证明关于ε有一阶一致收敛性．

设f充分光滑，$g(0)=g(1)=0$，且

$$f_u(x,t,u)\geqslant m>0 \tag{1.3}$$

其中 m是一个正常数，则由Trenogin[1]，问题(1.1)～(1.2)存在唯一的解．

2. 解的估计

定理1.1 对$\varepsilon^2 u_{xx}-u_t=f(x,t,u)$，若$u\in C^2(\bar D)$，在$\Gamma$上$u>0$，且$L_1u=\varepsilon^2u_{xx}-f_u u-u_t\leqslant 0$，则在$\bar D$上有$u(x,t)\geqslant 0$，其中$\bar D=[0,1]\times[0,T]$．

证明 若在某点$u(x,t)<0$，则u必在一点$(x_0,t_0)\in D$达到负的极小，由假设就有$L_1u(x_0,t_0)>0$，由此定理得证．

定理1.2 对解$u(x,t)$有

$$|u_{t^k}(x,t)|\leqslant C \qquad ((x,t)\in\bar D,\ k=0,1,2)$$

$$|u_{x^j}(x,t)|\leqslant C\{1+\varepsilon^{-j}\exp(-\alpha x/\varepsilon)+\varepsilon^{-j}\exp(-\alpha(1-x)/\varepsilon)\} \qquad (j\geqslant 0)$$

其中 C为不依赖ε的正常数．

证明 对(1.1)利用中值定理有

$$Lu\equiv\varepsilon^2u_{xx}-f_{u^0}u-u_t=f(x,t,0) \tag{1.4}$$

令 $w_1(x,t)=C\mp u(x,t)$，则 C 充分大就有 $Lw_1\leqslant 0$，$w_1|_\Gamma\geqslant 0$、由定理1.1则有 $|u(x,t)|\leqslant C$。

下面我们来估计 u_t。对(1.1)关于 t 微分，并令 $p=u_t$，则有 $\varepsilon^2 p_{xx}-p_t-f_u p=f_t$，利用定理1.1和(1.3)就得 $|u_t|\leqslant C$。

类似地有 $|u_{t^2}|\leqslant C$。

现在我们估计 $u_{x'}$。由(1.1)知 u 满足线性方程。

$$\varepsilon^2 u_{xx}-f_{u^0}u=u_t+f(x,t,0) \tag{1.5}$$

固定 t，则 $u_{x'}$ 直接由Doolan[3](第2节，引理6.1)。

3. 差分格式

引理1.1[2] 若 $L_3 w\equiv\varepsilon^2 w''(t)-\beta w(t)=\psi(t,w)$，$\psi=f(t,w)-\beta w$，常数 $\beta>0$，则在给定的网格 $\{t_i,\ i=0,1,\cdots,N,\ t_0=0,\ t_N=1\}$ 上，它的解 $w(t)$ 满足积分恒等式

$$(Tw)_i\equiv a_i w_{i-1}-c_i w_i+a_{i+1}w_{i+1}$$
$$=\left[\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}}(s)\psi(s,w)ds+\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi_i^{\mathrm{I}}(s)\psi(s,w)ds\right]\Big/\varepsilon^2 \tag{1.6}$$

其中 $w_i=w(t_i)$，$a_i=\gamma\,\mathrm{sh}^{-1}(\gamma\Delta t_{i-1})$，$\gamma=\beta^{1/2}/\varepsilon$，$i=1,2,\cdots,N-1$，且

$w_0=w_N=0$，$c_i=\gamma[\mathrm{cth}(\gamma\Delta t_{i-1})+\mathrm{cth}(\gamma\Delta t_i)]$，$\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$ 并且 $\varphi_i^{\mathrm{I}}(t)$，$\varphi_i^{\mathrm{II}}(t)$ 在 $[t_i,t_{i+1}]$ 上满足

$$L_3(\varphi_i^{\mathrm{I}})=0,\ \varphi_i^{\mathrm{I}}(t_i)=1,\ \varphi_i^{\mathrm{I}}(t_{i+1})=0$$
$$L_3(\varphi_i^{\mathrm{II}})=0,\ \varphi_i^{\mathrm{II}}(t_i)=0,\ \varphi_i^{\mathrm{II}}(t_{i+1})=1$$

下面我们将要利用直线法对(1.1)～(1.2)构造差分格式。在直线 $t=t_j$ 上，由(1.6)得

$$(Tu)_{ij}\equiv a_i u(x_{i-1},t_j)-c_i u(x_i,t_j)+a_{i+1}u(x_{i+1},t_j)$$
$$=\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}}(s)\psi_j(s)ds+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{\mathrm{I}}(s)\psi_j(s)ds\right]\Big/\varepsilon^2$$

其中

$$\psi_j(s)=\psi_j(s,u(s,t_j))=f(s,t_j,u(s,t_j))-\beta u(s,t_j)+u_t(s,t_j)$$

选取 $\psi_j(s)=\psi_j(x_i)+\int_{x_i}^{S}(\psi_j(\zeta))_\zeta d\zeta$，则有

$$\beta[a_{i+1}(u(x_{i+1},t_j)-u(x_i,t_j))-a_i(u(x_i,t_j)-u(x_{i-1},t_j))]/\Delta c_i$$
$$-u_t(x_i,t_j)$$
$$=f(x_i,t_j,u(x_i,t_j))+\beta\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}}(s)ds\left(\int_{x_i}^{S}(\psi_j(\zeta))_\zeta d\zeta\right)ds\right.$$
$$\left.+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{\mathrm{I}}(s)\left(\int_{x_i}^{S}(\psi_j(\zeta))_\zeta d\zeta\right)ds\right]\Big/(\Delta c_i\varepsilon^2)$$

其中

$$\frac{\Delta c_i}{\beta}=\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}}(s)ds+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{\mathrm{I}}(s)ds\right]\Big/\varepsilon^2=\frac{c_i-a_i-a_{i+1}}{\beta}$$

因此我们得到下列差分格式

$$\frac{\beta}{\Delta c_i}[a_{i+1}(u_{i+1,j}-u_{i,j})-a_i(u_{i,j}-u_{i-1,j})]-\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta t_j}$$

$$=f(x_i,\ t_j,\ u_{ij}) \tag{1.8}$$

4. 网格的选取及误差估计

令$e_{ij}=u(x_i,\ t_j)-u_{i,j}$，由(1.7)减(1.8)，则有

$$\frac{\beta}{\Delta c_i}[a_{i+1}(e_{i+1,j}-e_{ij})-a_i(e_{i,j}-e_{i-1,j})]-(e_{i,j}-e_{i,j-1})/\Delta t_j$$

$$=f_{u^0}e_{ij}+u_t(x_i,\ t_j)-\frac{u(x_i,\ t_j)-u(x_i,\ t_{j-1})}{\Delta t_j}+\frac{\beta J_{ij}}{\Delta c_i}$$

这里

$$J_{ij}=\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi^{\mathrm{I}}_{i-1}(s)\left(\int_{x_i}^{S}(\psi_j)_\zeta d\zeta\right)ds\right.$$

$$\left.+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi^{\mathrm{I}}_i(s)\left(\int_{x_i}^{S}(\psi_j)_\zeta d\zeta\right)ds\right]\Big/\varepsilon^2$$

利用带积分余项的Taylor展开式，则得

$$\frac{\beta}{\Delta c_i}[a_{i+1}(e_{i+1,j}-e_{ij})-a_i(e_{ij}-e_{i-1,j})-\frac{e_{ij}-e_{i,j-1}}{\Delta t_j}-f_{u^0}e_{ij}$$

$$=\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})u_{tt}(x_i,\ s)ds/\Delta t_j+\frac{J_{ij}\beta}{\Delta c_i}$$

改写成向量方程

$$A\mathbf{e}_j+B\mathbf{e}_{j-1}=\tilde{J}_j \tag{1.9}$$

其中 $A=(a_{ij})$为三对角矩阵，并且

$$a_{i,i-1}=\frac{a_i\beta}{\Delta c_i},\quad a_{i,i+1}=a_{i+1}\beta/\Delta c_i$$

$$a_{i,i}=-(a_i+a_{i+1})\beta/\Delta c_i-\frac{1}{\Delta t_j}-f_{u^0}$$

$$B=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\Delta t_j}\right),\quad \tilde{J}_j=(\tilde{J}_{1,j},\ \cdots,\ \tilde{J}_{N-1,j})^T$$

容易得到

引理1.2 设A为行对角占优矩阵，

$|a_{kk}|>\sum\limits_{j\neq k}|a_{kj}|$，若$\alpha=\min\limits_k(|a_{kk}|-\sum\limits_{j\neq k}|a_{kj}|)$，则

$$\|A^{-1}\|_\infty<1/\alpha.$$

对(1.9)，$\alpha=\min\limits_i\left(f_{u^0}+\frac{1}{\Delta t_j}\right)$则$\|A^{-1}\|_\infty\leqslant 1/\alpha\leqslant\Delta t_j$，

因而

$$\|\mathbf{e}_j\|_\infty\leqslant\|A^{-1}B\mathbf{e}_{j-1}\|_\infty+\|A^{-1}\tilde{J}_j\|_\infty$$

$$\leqslant\|\mathbf{e}_{j-1}\|_\infty+\Delta t_j\|\tilde{J}_j\|_\infty \tag{1.10}$$

下面我们将要构造特殊的网格。沿t方向选取均匀网格Δt_j，因(1.1)～(1.2)在$x=0$，$x=1$存在抛物边界层，宽度为$O(h_\varepsilon)$，$h_\varepsilon=\varepsilon|\ln\varepsilon|/\alpha$，故沿$x$方向选取非均匀网格：

$$x_i\in[0,\ h_\varepsilon]:\ x_i=-\varepsilon\ln[1-(1-\varepsilon)\delta i]/\alpha \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ N_0)$$
$$x_0=0,\ x_{N0}=h_\varepsilon,\ \delta=1/N_0 \tag{1.11}$$
$$x_i\in(h_\varepsilon,\ 1-h_\varepsilon):\ \max_i(x_{i+1}-x_i)=h,\ \min_i(x_{i+1}-x_i)=h_0$$
$$h/h_0\leqslant C,\ i=N_0+1,\ \cdots,\ N_1,\ C=\text{const}>0$$
$$x_i\in[1-h_\varepsilon,\ 1]:\ x_i=1+\varepsilon\ln[1-(1-\varepsilon)\delta(N_2-i)]/\alpha \qquad (i=N_1+1,\ \cdots,\ N_2)$$
$$x_{N1+1}=1-h_\varepsilon,\ x_{N2}=1,\ N_2=N_0+N_1+1$$

下面我们来估计$\|J_i\|_\infty$. 首先由定理1.2，得

$$\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}(s-t_{j-1})u_{tt}(x_i,s)ds\right|/\Delta t_j\leqslant C\Delta t_j,$$

又因为

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}}(s)\left(\int_{x_i}^{s}(\psi_j)_\zeta d\zeta\right)ds\right|/\varepsilon^2$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}}(s)\int_s^{x_i}|f_\zeta+f_uu_\zeta-\beta u_\zeta+u_{t\zeta}(\zeta,\ t_j)|d\zeta ds$$

利用(1.1)及定理1.2，则

$$E\equiv\int_s^{x_i}|f_\zeta+f_uu_\zeta-\beta u_\zeta+u_{t\zeta}(\zeta,\ t_j)|d\zeta$$
$$\leqslant C\int_s^{x_i}\left\{1+\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\alpha x/\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\exp(-\alpha(1-x)/\varepsilon)\right\}dx$$

若$x\in[0,\ h_\varepsilon]$，则$\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\alpha(1-x)}{\varepsilon}\right)\leqslant C$，因而$E\leqslant C\delta$，

若$x\in(h_\varepsilon,\ 1-h_\varepsilon)$，同样地$E\leqslant Ch$，

若$x\in[1-h_\varepsilon,\ 1]$，类似地$E\leqslant C\delta$，因而

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}}(s)\left(\int_{x_i}^{s}(\psi_j)_\zeta d\zeta\right)ds\right|/\varepsilon^2$$
$$\leqslant C\frac{\delta+h}{\varepsilon^2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_{i-1}^{\mathrm{I}}(s)ds$$

类似可得

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{\mathrm{I}}(s)\left(\int_{x_i}^{s}(\psi_j)_\zeta d\zeta\right)ds\right|\Big/\varepsilon^2$$
$$\leqslant\frac{C(\delta+h)}{\varepsilon^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{\mathrm{I}}(s)ds$$

因此$\|J_j\|_\infty\leqslant C(\delta+h)+C\Delta t_j$.

由(1.10)及$\|\mathbf{e}_0\|_\infty=0$，则

$$\|\mathbf{e}_j\|_\infty\leqslant\|\mathbf{e}_{j-1}\|_\infty+C\Delta t_j(\delta+h+\Delta t_j)\leqslant C\left(\Delta t_j+\frac{1}{N^2}\right)$$

因此我们有

定理1.3　设(1.1)～(1.2)的解u充分光滑，u_{ij}为(1.8)的解，构造如(1.11)的网格，则有

$$|u(x_i,\ t_j)-u_{ij}|\leqslant C(\Delta t_j+1/N_2)$$

二、二 维 问 题

1. 引言

现在我们讨论二维抛物问题

$$\varepsilon^2(u_{xx}+u_{yy})-u_t=f(x,\ y,\ t,\ u) \qquad ((x,\ y,\ t)\in D) \tag{2.1}$$

$$u|_s=0 \tag{2.2}$$

其中 $\bar{D}=[0,\ 1]\times[0,\ 1]\times[0,\ T]$，边界$s=\bigcup_{i=1}^{5}s_i$，

$s_1=\{y=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$，$s_2=\{x=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$，

$s_3=\{y=1,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$，$s_4=\{x=1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$，

$s_5=\{t=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$，并设$f$充分光滑，且

$$f_u(x,\ y,\ t,\ u)\geqslant m>0 \tag{2.3}$$

因此存在唯一解.

2. 解的估计

类似第一节，易得证

定理2.1 对$Lu\equiv\varepsilon^2(u_{xx}+u_{yy})-f_u u-u_t=f(x,\ y,\ t,\ 0)$，若$u\in C^2(\bar{D})$，在$D$上$Lu\leqslant 0$，在$s$上$u\geqslant 0$，则在$\bar{D}$上成立$u(x,\ y,\ t)\geqslant 0$.

引理2.1 $|u(x,\ y,\ t)|\leqslant C \qquad ((x,\ y,\ t)\in\bar{D})$

引理2.2 $|u_{t^k}(x,\ y,\ t)|\leqslant C \qquad ((x,\ y,\ t)\in\bar{D},\ k=1,\ 2)$.

引理2.3 $|u_x(x,\ y,\ t)|_s\leqslant C/\varepsilon$，$|u_y(x,\ y,\ t)|_s\leqslant C/\varepsilon$.

证明 利用 Oleinik[4] (引理1.5.1)，对$P_0=(x_0,\ 0)\in s_1$，$0<x_0<1$，令

$$q(\rho)=\begin{cases}\varepsilon & (\text{若}0\leqslant\rho\leqslant\delta)\\ \varepsilon[1-(\rho^2-\delta^2)^3]/27\delta^6 & (\text{若}\delta\leqslant\rho\leqslant 2\delta)\end{cases}$$

其中 $\rho^2=(x-x_0)^2$，δ为充分小的常数. 现在区域$Q_\delta(P_0)=\{0<\rho<2\delta,\ 0<y<q(\rho)\}$上考虑$w=c_0(e^{-\zeta}-1)$，其中$\zeta=c_1(y+\varepsilon-q)/\varepsilon$，则

$$L_2(w)\geqslant c_0e^{-\zeta}[c_1^2+c_1^2q_x^2+c_1\varepsilon q_{xx}-m]+c_0m$$

由$q(\rho)$的定义，我们有

$$|q_x|\leqslant C\varepsilon,\ |q_{xx}|\leqslant C\varepsilon$$

选取c_1，c_0充分大，使得$|L_2u|-L_2w\leqslant 0$，注意到在$Q_\delta(P_0)$的边界上有$w\pm u\leqslant 0$，则得

$$|u|+w\leqslant 0,\ \text{在}Q_\delta(P_0)\text{上}$$

但$y=0$，$0<\rho<\delta$时，$u=0$，$w=0$，则$(\pm u+w)_y\leqslant 0$，因而

$$|u_y|\leqslant -w_y\leqslant C/\varepsilon,\ \text{在}s_1\text{上}$$

类似地可得

$$|u_y|_{s_3}\leqslant C/\varepsilon,\ |u_x|_{s_2}\leqslant C/\varepsilon,\ |u_x|_{s_4}\leqslant C/\varepsilon$$

从而引理得证.

定理2.2 对于(2.1)～(2.2)的解u，成立

$$|u_{x^k}|\leqslant C\left[1+\varepsilon^{-k}\exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{-k}\exp\left(-\frac{\alpha(1-x)}{\varepsilon}\right)\right]\qquad(k=1,\ 2,\ 3)$$

$$|u_{xy^k}|\leqslant C\left[1+\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{\alpha(1-x)}{\varepsilon}\right)\right]\Big/\varepsilon^k\qquad(k=1,\ 2)$$

$$|u_{xt}|\leqslant C\left[1+\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{\alpha(1-x)}{\varepsilon}\right)\right]$$

对y有类似的结果．

证明　对(2.1)关于x微分，并令$p=u_x$，则

$$\varepsilon^2(p_{xx}+p_{yy})-f_up-p_t=f_x$$

令$\Pi_1(x)=C\left[1+\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{\alpha(1-x)}{\varepsilon}\right)\right]$，则有

$$L_2\Pi_1(x)\pm L_2p$$
$$\leqslant[2\alpha^2-m]\Pi_1(x)-2\alpha^2C+\max_{\bar D}|f_x|$$

选取$\alpha^2\leqslant m/2$，$C\geqslant\max\limits_{\bar D}|f_x|/2\alpha^2$，则 $L_2\Pi_1(x)\pm L_2p\leqslant0$，利用引理2.3，对$C$充分大，

$\Pi_1(x)|_{s_2,\ s_4}\geqslant|p|_{s_2,\ s_4}$，由$p|_{s_1,\ s_3,\ s_5}=0$及定理2.1，有

$$|u_x|\leqslant\Pi_1(x)\leqslant C\left[1+\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{-1}\exp\left(-\frac{\alpha(1-x)}{\varepsilon}\right)\right]$$

下面估计u_{x^2}．首先对$k=2$，令$u_x|_{s_5}=\varphi$，我们光滑地延拓$\tilde{\varphi}=\varepsilon\varphi$到$D$上，并设$\tilde{p}=\varepsilon(u_x-\varphi)$，则得

$$L_2(\tilde{p})=\varepsilon f_x+f_u\tilde{\varphi}-\varepsilon^2\Delta\tilde{\varphi}+\tilde{\varphi}_t,\quad \tilde{p}|_{s_5}=0$$

由引理2.3.知$|\tilde{\varphi}|\leqslant C$在$\bar D$上成立．重复引理2.3.的证明，易得

$$|\tilde{p}_x|_{s_5}\leqslant C/\varepsilon,\quad |\tilde{p}_y|_{s_5}\leqslant C/\varepsilon$$

对(2.1)关于x微分两次，并记$p=u_{xx}$，则

$$\varepsilon^2(p_{xx}+p_{yy})-f_up-p_t=f_{x^2}+2f_{xu}u_x+f_{x^2}(u_x)^2$$

考虑辅助函数$\Pi_2(x)=C\left[1+\varepsilon^{-2}\exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{-2}\exp\left(-\frac{\alpha(1-x)}{\varepsilon}\right)\right]$，则适当选取$C$和$\alpha$就有

$$|u_{x^2}|\leqslant C\left[1+\varepsilon^{-2}\exp\left(-\frac{\alpha(1-x)}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{-2}\exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)\right]$$

对其它估计，可类似得证．

3．差分格式

下面我们用直线法对(2.1)～(2.2)构造差分格式．固定$t=t_k$，在直线$y=y_j, j=1,\cdots,N^{(2)}-1$，由(1.6)得

$$(T^{(1)}u)^k_{i\,j}\equiv a^{(1)}_iu^k_{i-1,\,j}-\sigma^{(1)}_iu^k_{i,\,j}+a^{(1)}_{i+1}u^k_{i+1,\,j}$$
$$=\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi^{1\,\prime\,(1)}_{i-1}(s)\psi^{(1)}_{j,k}(s)ds+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi^{1\,\prime\,(1)}_{i}(s)\psi^{(1)}_{j,k}(s)ds\right]\Big/\varepsilon^2,$$
$$(i=1,\ \cdots,\ N^{(1)}-1)$$

$$u^k_{0,\,j}=u^k_{N^{(1)},\,j}=0\qquad(k=1,\cdots,\ M-1),$$

其中 $\psi_{j,k}^{(1)}(s)=f(s,\ y_j,\ t_k,\ u(s,\ y_j,\ t_k))-\beta^{(1)}u(s,\ y_j,\ t_k)-\varepsilon^2 u_{yy}(s,\ y_j,\ t_k)$
$+u_t(s,\ y_j,\ t_k)$

这里 $\beta^{(1)}$是一个正常数，$u_{ij}^k=u(x_i,\ y_j,\ t_k)$.

在直线$x=x_i$上，$i=1,\ \cdots,\ N^{(1)}-1$，有

$$(T^{(2)}u)_{ij}^k\equiv a_j^{(2)}u_{i,j-1}^k-\sigma_j^{(2)}u_{ij}^k+a_{j+1}^{(2)}u_{i,j+1}^k$$

$$=\left[\int_{y_{j-1}}^{y_j}\varphi_{j-1}^{I,(2)}(s)\psi_{i,k}^{(2)}(s)ds+\int_{y_j}^{y_{j+1}}\varphi_j^{I,(2)}(s)\psi_{i,k}^{(2)}(s)ds\right]\Big/\varepsilon^2,$$

$$(j=1,\ \cdots,\ N^{(2)}-1)$$

$$u_{i,0}^k=u_{i,N^{(1)}}^k=0\qquad(k=1,\ \cdots,\ M-1),$$

其中 $\psi_{i,k}^{(2)}(s)=f(x_i,\ s,\ t_k,\ u(x_i,\ s,\ t_k))-\beta^{(2)}u(x_i,\ s,\ t_k)$
$-\varepsilon^2 u_{x^2}(x_i,\ s,\ t_k)+u_t(x_i,\ s,\ t_k)$

这里$\beta^{(2)}$为一正常数.

注意到$\psi_{j,k}^{(1)}(s)=\psi_{j,k}^{(1)}(x_i)+\int_{x_i}^{s}(\psi_{j,k}^{(1)})_\xi d\xi$，及$\psi_{i,k}^{(2)}(s)=\psi_{i,k}^{(2)}(y_j)+\int_{y_j}^{s}(\psi_{i,k}^{(2)})_\tau d\tau$，则得

$$\begin{aligned}T_h^{(1)}u&=f(x,\ y,\ t,\ u)-\varepsilon^2 u_{yy}+u_t+J^{(1)}(x,\ y,\ t,\ \psi^{(1)})\\ T_h^{(2)}u&=f(x,\ y,\ t,\ u)-\varepsilon^2 u_{xx}+u_t+J^{(2)}(x,\ y,\ t,\ \psi^{(2)})\end{aligned}\tag{2.4}$$

这里算子$T_h^{(1)}$和$T_h^{(2)}$与(1.6)一样，而且

$$J^{(1)}(x,\ y,\ t,\ \psi^{(1)})=\frac{\beta^{(1)}}{\varepsilon^2\Delta\sigma_i^{(1)}}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}\psi_{i-1}^{I,(1)}(s)\left(\int_x^s(\psi_{j,k}^{(1)})_\xi d\xi\right)ds\right.$$

$$\left.+\int_{x_i}^{x_{i+1}}\psi_i^{I,(1)}(s)\left(\int_{x_i}^{s}(\psi_{j,k}^{(1)})_\xi d\xi\right)ds\right]$$

$$J^{(2)}(x,\ y,\ t,\ \psi^{(2)})=\frac{\beta^{(2)}}{\varepsilon^2\Delta\sigma_j^{(2)}}\left[\int_{y_{j-1}}^{y_j}\psi_{j-1}^{I,(2)}(s)\left(\int_{y_j}^{s}(\psi_{j,k}^{(2)})_\tau d\tau\right)ds\right.$$

$$\left.+\int_{y_j}^{y_{j+1}}\psi_j^{I,(2)}(s)\left(\int_{y_j}^{s}(\psi_{j,k}^{(2)})_\tau d\tau\right)ds\right]$$

注意到$\varepsilon^2(u_{xx}+u_{yy})-u_t=f(x,\ y,\ t,\ u)$，则有

$$T_h^{(1)}u+T_h^{(2)}u=f(x,\ y,\ t,\ u)+u_t+J^{(1)}(x,\ y,\ t,\ \psi^{(1)})+J^{(2)}(x,\ y,\ t,\ \psi^{(2)})\tag{2.5}$$

因此我们对(2.1)～(2.2)得到如下差分格式：

$$\begin{aligned}&\beta^{(1)}[a_{i+1}^{(1)}(u_{i+1,j}^k-u_{ij}^k)-a_i^{(1)}(u_{ij}^k-u_{i-1,j}^k)]/\Delta\sigma_i^{(1)}\\&+\beta^{(2)}[a_{j+1}^{(2)}(u_{i,j+1}^k-u_{ij}^k)-a_j^{(2)}(u_{ij}^k-u_{i,j-1}^k)]/\Delta\sigma_j^{(2)}\\&-(u_{ij}^k-u_{ij}^{k-1})/\Delta t_k=f(x_i,\ y_j,\ t_k,\ u_{ij}^k)\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$u_{0,j}^k=u_{N^{(1)},j}^k=u_{i,0}^k=u_{i,N^{(2)}}^k=0\qquad(k=1,\ \cdots,\ M-1),$$

$$u_{ij}^0=0\qquad(i=1,\ \cdots,\ N^{(1)}-1,\ j=1,\ \cdots,\ N^{(2)}-1)$$

4. 网格的选取及误差估计

因为问题(2.1)～(2.2)在s_i，$i=1,2,3,4$有抛物边界层，宽度为$O(h_\varepsilon)$，故在x及y方向如(1.11)构造特殊网格，t方向均匀网格.记$e_{ij}^k=u(x_i,y_j,t_k)-u_{ij}^k$,由(2.5)减去(2.6)，得

$$T_h^{(1)}e_{ij}^k+T_h^{(2)}e_{ij}^k-(e_{ij}^k-e_{ij}^{k-1})/\Delta t_k-f_{u^0}e_{ij}^k$$
$$=\int_{t_{k-1}}^{t_k}(s-t_{k-1})u_{tt}(x_i,y_j,s)ds/\Delta t_k+J^{(1)}(x,y,t,\psi^{(1)})$$
$$+J^{(2)}(x,y,t,\psi^{(2)}) \tag{2.7}$$

对$s\in(x_i,x_{i+1})$，由定理2.2，$\left|\int_x^s(\psi_{j,k}^{(1)})_\xi d\xi\right|\leqslant C/N^{(1)}$对$s\in(x_{i-1},x_i)$有同样结果. 因而

$$|J^{(1)}(x,y,t,\psi^{(1)})|\leqslant C/N^{(1)}$$

类似地，$|J^{(2)}(x,y,t,\psi^{(2)})|\leqslant C/N^{(2)}$. 将(2.7)写成向量式

$$A\mathbf{e}_j^k+D_1\mathbf{e}_{j-1}^k+D_2\mathbf{e}_{j+1}^k=\mathbf{\Delta}+D_3\mathbf{e}_j^{k-1}$$

其中 $\|\mathbf{\Delta}\|_\infty\leqslant C(\Delta t_k+1/N^{(1)}+1/N^{(2)})$，$A=(a_{ij})$是三对角阵，且

$$a_{i,i-1}=a^{(1)}\beta^{(1)}/\Delta e_i^{(1)},\quad a_{i,i+1}=a_{i+1}^{(1)}\beta^{(1)}/\Delta e_i^{(1)}$$

$$a_{ii}=-[(a_{i+1}^{(1)}+a_i^{(1)})\beta^{(1)}/\Delta e_i^{(1)}+(a_{j+1}^{(2)}+a_j^{(2)})\beta^{(2)}/\Delta e_j^{(2)}+1/\Delta t_k+f_{u^0}]$$

$$D_1=\mathrm{diag}(a_j^{(2)}\beta^{(2)}/\Delta e_j^{(2)}),\quad D_2=\mathrm{diag}(a_{j+1}^{(2)}\beta^{(2)}/\Delta e_j^{(2)}),$$

$$D_3=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\Delta t_k}\right)$$

$$\mathbf{e}_j^k=(\mathbf{e}_{1,j}^k,\cdots,\mathbf{e}_{N^{(1)}-1,j}^k)$$

再将最后的方程改写为

$$B\mathbf{e}^k=\mathbf{\Delta}+\mathrm{diag}(D_3)\mathbf{e}^{k-1}$$

其中 $\mathbf{e}^k=(\mathbf{e}_1^k,\cdots,\mathbf{e}_{N^{(2)}-1}^k)$，块三对角阵$B=(b_{ij})$，且

$$b_{ii}=A,\quad b_{i,i+1}=D_2,\quad b_{i+1,i}=D_1$$

因为$|b_{ii}|-\sum_{k\neq i}|b_{ik}|=1/\Delta t_k+f_{u^0}>0$，因此$B$为行对角占优.

利用(2.8)及引理1.2，则得

$$\|\mathbf{e}^k\|_\infty\leqslant\|B^{-1}\|_\infty(\|\mathbf{\Delta}\|_\infty+\|\mathrm{diag}(D_3)\|_\infty\|\mathbf{e}^{k-1}\|_\infty)$$
$$\leqslant C\Delta t_k(1/N^{(1)}+1/N^{(2)}+\Delta t_k)+\|\mathbf{e}^{k-1}\|_\infty$$

由$\|\mathbf{e}^0\|_\infty=0$，就有

$$\|\mathbf{e}^k\|_\infty\leqslant C(1/N^{(1)}+1/N^{(2)}+\Delta t_k)$$

因此就有

定理2.3 设(2.1)～(2.2)的解u充分光滑，u_{ij}^k为(2.6)的数值解，构造如(1.11)的网格，则成立

$$|u(x_i, y_j, t_k)-u^k_{ij}|\leqslant C(1/N^{(1)}+1/N^{(2)}+\Delta t_k)$$

注记 容易将以上结果推广到一般问题，例如$\varepsilon^2 u_{xx}+a(x,t)u_x-b(x,t)u_t=f(x,t,u)$.

参 考 文 献

[1] Trenogin, V. A., Asymtotic solution of linear parabolic equation with parabolic boundary layer, *Uspehi Mat. Nauk*, 16 (1)(97) (1961), 163-169. (in Russian)

[2] Boglaev, I. P., Numerical solution of nonlinear boundary value problem with a small parameter in the highest derivate, *U.S. S. R. Comp. Math. Phys.*, 24 (1984), 1649-1656. (in Russian)

[3] Doolan, R. P., Miller, J. J. H. and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

[4] Oleinik, O. A. and E. V., Radkevic Second order equations with nonnegative characteristic form, *American Mathematical Society*, Rhode Island and Plenum Press, New York (1973).

Numerical Solutions for Singularly Perturbed Semi-linear Parabolic Equation

Wu Qi-guang Li Ji-chun

(Dept. of Math., Nanjing Univ., Nanjing)

Abstract

In this paper, we discuss singularly perturbed semi-linear parabolic equations for one dimension and two dimension, we find numerical solutions by using both line-method and the exact difference scheme on a special non-uniform discretization mesh. The uniform convergence in ε of the first order accuracy is obtained.

Key words uniform convergence, parabolic equations, non-uniform mesh