应用数学和力学，第14卷 第9期（1993年9月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

H-空间的截口定理重合定理相交定理及其应用*

张石生　张　颖

（四川大学）（电子科大）

摘　　要

本文的目的是在H-空间上得出几个截口定理、相交定理和重合定理．作为这些结果的应用，我们研究了H-空间中的极大极小不等式和变分不等式解的存在性问题．本文结果改进和发展了引文[1，3，5，6，8，9，12，14，15，17]中的相应结果．

关键词　截口定理　重合定理　相交定理　H-KKM映象　变分不等式　极大极小不等式

一、引言及预备知识

近年来，截口定理、重合定理和相交定理已被许多人研究过（（见引文[1～17]）．

本文在H-空间的梁架下，得出了几个截口定理、重合定理和相交定理．作为这些结果的应用，在本文的第四节中我们讨论了H-空间中的极大极小不等式和变分不等式解的存在性问题．本文结果改进和发展了引文[1，3，5，6，8，9，12，14，15，17]中的相应结果．

为方便起见，我们首先给出某些定义和符号．

定义1　H-空间是一有序对$\{X,\{\Gamma_A\}\}$，其中X是一拓扑空间，$\{\Gamma_A\}$是X中给定的一族非空可缩子集，以X中的一切有限子集A编号，且$A\subset A'$就蕴涵$\Gamma_A\subset\Gamma_{A'}$．在H-空间$(X,\{\Gamma_A\})$中，集$D\subset X$称为关于集$C\subset X$为H-凸的，如果对任一有限集$A\subset C$，有$\Gamma_A\subset D$．特别当$C=D$时，则称$D$是H-凸的．显然，如果$D$是H-凸的，则（$D$，$\{\Gamma_{A\cap D}\}$）也是一H-空间．子集$L\subset X$称为H-紧的，如果对任一有限子集$A\subset X$，存在一紧H-凸集$D\subset X$，使得$L\cup A\subset D$．子集$M\subset X$称为紧闭（紧开）的，如果$M$相对于$X$的每一紧子集是闭（开）的．

显然，如果X是一Hausdorff拓扑线性空间，对任一有限子集$A\subset X$，令$\Gamma_A=\mathrm{co}(A)$，则（X，$\{\Gamma_A\}$）是一H-空间，而且X的每一凸子集是H-凸的，X的任一紧凸集是H-紧的．另外H-空间和H-紧性包含相应的凸空间及c-紧性为其特例．

定义2　设（X，$\{\Gamma_A\}$）是H-空间，$F:X\to 2^X$称为H-KKM映象，如果对任一有限集$A\subset X$，有

$$\Gamma_A\subset\bigcup_{x\in A}F(x).$$

* 国家自然科学基金资助课题，1992年4月20日收到．

引理1.1[13] 设 $(X, \{\Gamma_A\})$ 是一H-空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是X的n个点(不必相异)，则对任给的标准的$(n-1)$-单形 $e_1\cdots e_n$，存在连续映象 f: $e_1\cdots e_n\to X$，使对任意的子单形 $e_{i_1}\cdots e_{i_k}\subset e_1\cdots e_n$，$1\leqslant k\leqslant n$，有

$$f(e_{i_1}\cdots e_{i_k})\subset\Gamma\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\} \tag{1.1}$$

引理1.2[1] 设 $(x, \{\Gamma_A\})$ 是一H-空间，$F:X\to 2^X$是一H-KKM 映象，满足下列条件：

(i) 对每一$x\in X$，$F(x)$是紧闭的；

(ii) 存在紧集$L\subset X$及一H-紧集$K\subset X$使得对每一H-凸集D，$K\subset D\subset X$，$\bigcup\limits_{x\in D}(F(x)\cap D)\subset L$.

则 $\bigcap\limits_{x\in X}F(x)\neq\phi$

二、H-空间的截口定理

设 $(X, \{\Gamma_A\})$ 是一H-空间，$B=\{x_1, \cdots, x_n\}$是X中任给的n个点，$e_1\cdots e_n$ 是给定的$(n-1)$-单形，定义

$$S_B=\{f\,|\,f:e_1\cdots e_n\to X\text{连续且对任意的子单形}$$

$$e_{i_1}\cdots e_{i_k}\subset e_1\cdots e_n,\ 1\leqslant k\leqslant n,\ f(e_{i_1}\cdots e_{i_k})\subset\Gamma_{\{x_{i_1}, \cdots x_{i_k}\}}\} \tag{2.1}$$

由引理1.1知$S_B\neq\phi$.

定义3 设$(X, \{\Gamma_A\})$，$(Y, \{\Gamma_B\})$是二H-空间.映象$f:X\to Y$称为H-仿射的，如果对任给的有限集$B=\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$和任给的标准的 $(n-1)$-单形$e_1\cdots e_n$，存在 $g_1\in S_B$，$g_2\in S_{f(B)}$，使得

$$f(g_1(x))=g_2(x),\quad \forall x\in e_1\cdots e_n. \tag{2.2}$$

应该指出H-仿射映象的概念是通常的仿射映象在H-空间的推广.

现在我们来得出下面的H-空间上的截口定理，它包含Ky Fan[8]和[6, 14]中的相应结果为特例.

定理2.1. 设 (X, Γ_A) 是H-空间，设A，C是$X\times X$中的两个非空集，$K\subset X$ 是非空的紧H-凸集，g是$X\to X$的映象.设$f:X\to K$为H-仿射映象且满足下面的条件：

(i) 对任一$x\in X$，$(g(x), x)\in C$；

(ii) 对任一$y\in X$，$\{x\in X:(g(x), f(y)\in A\}$紧闭；

(iii) 对任一$x\in X$，集合$\{y\in X:(g(x), f(y))\notin C\}$关于集合$\{y\in X(g(x), f(y)\notin A\}$是H-凸的.

则存在$x_0\in K$，使得$\{g(x_0)\}\times f(X)\subset A$.

证 用反证法，设结论不成立，则对任一$x\in K$，存在$y\in X$，使得 $(g(x), f(y))\notin A$.令

$$T(y)=\{x\in X:(g(x), f(y))\notin A\}.$$

由条件(ii)，$T(y)$是紧开的，故$T(y)\cap K$为开集，且

$$K=\bigcup_{y\in X}(A(y)\cap K)$$

因K紧，故存在有限集$\{y_1, \cdots, y_n\}\subset X$，使得

$$K=\bigcup_{i=1}^{n}(A(y_i)\cap K). \tag{2.3}$$

因$f:K$是H-仿射的，故对$\{y_1,\cdots,y_n\}$和给定的标准的$(n-1)$-单形$e_1\cdots,e_n$，存在连续函数$g_1\in S_{\{y_1\cdots y_n\}}$和$g_2\in S_{\{f(y_1,\cdots,f(y_n)\}}$，其中$S_{\{y_1,\cdots,y_n\}}$等是由(2.2)式定义的集合，使得

$$f(g_1(x))=g_2(x),\quad \forall x\in e_1\cdots e_n \tag{2.4}$$

设$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$是从属于开覆盖$\{A(y_1)\cap K,\cdots,A(y_n)\cap K\}$的单位分解，即对每一$i=1,2,\cdots,n$，$\alpha_i:K\to[0,1]$连续，$\alpha_i(x)>0\Longleftrightarrow x\in A(y_i)\cap K$，且$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)=1$，$\forall x\in K$

另因K是H-凸的，故对每一$x\in e_1\cdots e_n$，$g_2(x)\in\Gamma_{\{f(y_1)\cdots f(y_n)\}}\subset K$. 于是可定义映象$p$

$$p(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(g_2(x))e_i\qquad(x\in e_1\cdots e_n)$$

因而$p:e_1\cdots e_n\to e_1\cdots e_n$连续，由Brouwer不动点定理，存在$x_0\in e_1\cdots e_n$，使得$x_0=p(x_0)$. 令$g_2(x_0)=z_0$，则$z_0=f(g_1(x_0))\in K$.由(2.3)，存在$i_0:1\leqslant i_0\leqslant n$，使得$z_0\in A(y_{i_0})\cap K$.记

$$I=\{i:1\leqslant i\leqslant n,\ z_0\in A(y_i)\cap K\}$$

则$i_0\in I$.因$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$是从属于$\{A(y_1)\cap K,\cdots,A(y_n)\cap K\}$的单位分解，故对每一$i\in I$，有$\alpha_i(z_0)>0$且$(g(z_0),f(y_i))\notin A$.因而对每一$i\in I$

$$y_i\in\{y\in X:(g(z_0),f(y))\notin A\}. \tag{2.5}$$

由条件(iii)得知

$$\Gamma_{\{y_i:i\in I\}}\subset\{y\in X:(g(z_0),f(y))\notin C\} \tag{2.6}$$

于是由g_1的定义及(2.6)有

$$\begin{aligned}g_1\Big(\sum_{i\in I}\alpha_i(z_0)e_i\Big)&\in g_1((e_i:i\in I))\subset\Gamma_{\{y_i:i\in I\}}\\&\subset\{y\in X:(g(z_0),f(y))\notin C\}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

上式表明

$$\begin{aligned}&\Big(g(z_0),\ f\Big(g_1\Big(\sum_{i\in I}\alpha_i(z_0)e_i\Big)\Big)\\&=\Big(g(z_0),\ g_2\Big(\sum_{i\in I}\alpha_i(z_0)e_i\Big)\Big)\\&=\Big(g(z_0),\ g_2\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(z_0)e_i\Big)\Big)\qquad(\text{因}i\notin I\text{时},\ \alpha_i(z_0)=0)\\&=\Big(g(z_0),\ g_2\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(g_2(x_0)e_i)\Big)\\&=(g(z_0),\ g_2(p(x_0)))\\&=(g(z_0),\ g_2(x_0))\\&=(g(z_0),\ z_0)\notin C.\end{aligned}$$

这与条件(i)相矛盾，由此定理的结论得证.

定理2.2 设 $(X, \{\Gamma_A\})$ 是H-空间，A, $C\subset X\times X$是二非空集，f, $g:X\to X$, 且满足条件:

(i) 对任一$x\in X$, $(g(x), f(x))\in C$;

(ii) 对任一$y\in X$, $\{x\in X:(g(x), f(y))\in A\}$是非空的紧闭集;

(iii) 对任一$x\in X$, $\{y\in:(g(x), f(y))\notin C\}$关于集合$\{y\in X:(g(x), f(y))\notin A\}$是H-凸的;

(iv) 存在H-紧集$K\subset X$, 使得下面的集合是紧的:

$$\bigcap_{x\in K}\{y\in X:(g(y), f(x))\in A\}.$$

则存在$x_0\in X$, 使得$\{g(x_0)\}\times f(X)\subset A$.

证 任给$x\in X$, 令

$$F(x)=\{y\in X:(g(y), f(x))\in A\}.$$

则$F:X\to 2^X$. 由条件(ii), 对每一$x\in X$, $F(x)$是非空紧闭的.下证F是H-KKM映象.

设相反，F不是H-KKM映象，则存在有限子集$M\subset X$, 使得$\Gamma_M\not\subset\bigcup_{x\in M}F(x)$.故存在$y_0\in\Gamma_M$, $y_0\notin F(x)$, $\forall x\in M$.因而对任一$x\in M$, $(g(y_0), f(x))\notin A$.故

$$M\subset\{y\in X:(g(y_0), f(y))\notin A\}.$$

由条件(iii),

$$\Gamma_M\subset\{y\in X:(g(y_0), f(y))\notin C\},$$

而$y_0\in\Gamma_M$, 故有$(g(y_0), f(y_0))\notin C$. 这与条件 (i) 相矛盾. 由此矛盾得知F是H-KKM映象.

现令

$$L=\bigcap_{x\in K}F(x)=\bigcap_{x\in K}\{y\in X:(g(y), f(x))\in A\}.$$

则L为紧集，且对任一弱H-凸集D, $K\subset D\subset X$有

$$\bigcap_{x\in D}(F(x)\cap D)=D\cap\bigcap_{x\in D}F(x)\subset D\cap\bigcap_{x\in K}F(x)\subset L.$$

于是由引理1.2，存在$x_0\in\bigcap_{x\in X}F(x)$.因而有

$$(g(x_0), f(x))\in A, \text{ i.e. }\{g(x_0)\}\times f(X)\subset A.$$

定理得证.

由定理2.2可得下面的结果.

定理2.3 设 $(X, \{\Gamma_A\})$ 是H-空间，φ, $\psi:X\times X\to R$, f, $g:X\to X$满足条件:

(i) 对任意的x, $y\in X$, $\varphi(x, y)\leqslant\psi(x, y)$;

(ii) 对任意的$x\in X$, $\varphi(g(x), f(y))$关于y是拟H-凸的;

(iii) 存在实数α, 使得$\varphi(g(x), f(x))\geqslant\alpha$, $\forall x\in X$;

(iv) 对任一$y\in X$, $\{x\in X:\psi(g(x), f(y))\geqslant\alpha\}$是紧闭的;

(v) 存在H-紧集$K\subset X$, 使得集合

$$\{y\in X:\psi(g(y), f(x))\geqslant\alpha, \ \forall x\in K\}$$

是紧的.

则存在$x_0\in X$, 使得$\psi(g(x_0), f(x))\geqslant\alpha$, $\forall x\in X$.

证 令

$$A=\{(x,\ y)\in X\times X:\psi(x,\ y)\geqslant\alpha\},$$
$$C=\{(x,\ y)\in X\times X:\varphi(x,\ y)\geqslant\alpha\},$$

则$C\subset A$.于是由条件(iv)集合

$$\{x\in X:(g(x),\ f(y))\in A\}=\{x\in X:\psi(g(x),\ f(y))\geqslant\alpha\},\ y\in X$$

是紧闭的.另由条件(iii)，$(g(x),\ f(x))\in C,\ \forall x\in X$.

其次，由条件(ii)，集合

$$\{y\in X:(g(x),\ f(y))\notin C\}=\{y\in X:\varphi(g(x),\ f(y))<\alpha\}$$

是H-凸的；而由条件(v)知集合

$$\bigcap_{x\in K}\{y\in X:\psi(g(y),\ f(x))\geqslant\alpha\}=\bigcap_{x\in K}\{y\in X:g(y),\ f(x))\in A\}$$

是紧的．故A，C，f，g满足定理2.2中的一切条件．于是存在$x_0\in X$，使得$(g(x_0))\in A$，$\forall x\in X$，即

$$\psi(g(x_0),\ f(x))\geqslant\alpha,\ \forall x\in X.$$

定理证毕.

三、H-空间中的重合定理及相交定理

以下我们用$\mathscr{C}(X,\ Y)$表X到Y的连续单值映象的集合.

由引理1.2可得下面的结果.

引理3.1 设$(X,\ \{\Gamma_A\})$是一H-空间，Y是一拓扑线性空间，$F:X\to 2^Y$满足下列条件：

(i)′ 对每一$x\in X$，$F(x)$在Y中紧闭；

(ii)′ 存在$s\in\mathscr{C}(X,\ Y)$，使得映象$G:X\to 2^X$，$G(x)=s^{-1}(F(x))$是H-KKM映象；

(iii)′ 存在紧集$L\subset Y$及H-紧集$K\subset X$，使得对每一满足$K\subset D\subset X$的H-凸集D，有
$$\bigcap_{x\in D}(F(x)\cap s(D))\subset L.$$

则$\bigcap_{x\in D}F(x)\neq\phi$.

现在我们给出下面的重合定理.

定理3.2 设$(X,\ \{\Gamma_A\})$是一H-空间，Y是一拓扑线性空间，设映象T，$S:X\to 2^Y$满足下列条件：

(i) 对每一$x\in X$，Tx在Y中紧开；

(ii) 对每一$y\in Y$，$T^{-1}(y)$非空且$T^{-1}(y)\subset S^{-1}(y)$，且$S^{-1}(y)$是H-凸的；

(iii) 存在紧集$L\subset Y$和H-紧集$K\subset X$，使得对每一满足$K\subset D\subset X$的H-凸集D，当$y\in Y\backslash L$时，$T^{-1}(y)\cap D\neq\phi$.

则对每一$s\in\mathscr{C}(X,\ Y)$，存在$x\in X$，使得$s(x)\in S(x)$.

证 令$F:X\to 2^Y$，$F(x)=Y\backslash T(x)$.

(a) 首先证明F满足引理3.1中的条件(i)′，(iii)′.

事实上，由条件(iii)易知对任一H-凸集D：$K\subset D\subset X$，有$Y\backslash\bigcup_{x\in D}T(x)\subset L$，故

$$\bigcap_{x\in D}Y\backslash T(x)=\bigcap_{x\in D}F(x)\subset L.$$

因而有

$$\bigcap_{x\in D}(F(x)\cap s(D))\subset\bigcap_{x\in D}F(x)\subset L,$$

即引理3.1中的条件(iii)′满足.而引理3.1中的条件(i)′成立是显然的

(b) 另由条件(ii)知，映象$G(x)=s^{-1}(F(x)):X\to 2^X$不是H-KKM的.(事实上，如果$G$是H-KKM的，则由引理3.1，$\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$.但是，由条件(ii)，对每一$y\in Y$，$T^{-1}(y)\neq\phi$，于是又有

$$\bigcap_{x\in X}F(x)=Y\setminus\bigcup_{x\in X}T(x)=Y\setminus Y=\phi.$$

矛盾.）故存在有限集$A\subset X$，使得$\Gamma_A\not\subset\bigcup_{x\in A}G(x)$，即有$x_0\in\Gamma_A$，但$x_0\notin G(x)$，$\forall x\in A$，即$s(x_0)\notin F(x)$，$\forall x\in A$.故$s(x_0)\in\bigcap_{x\in A}T(x)$.于是有$A\subset T^{-1}(s(x_0))\subset S^{-1}(s(x_0))$.另由条件(ii)，$S^{-1}(s(x_0))$是H-凸的，故$\Gamma_A\subset S^{-1}(s(x_0))$.因而$x_0\in S^{-1}(s(x_0))$，即$s(x_0)\in S(x_0)$.证毕.

注1 定理3.2推广了[1, 3, 8, 15]中相应的不动点定理和重合定理.

下面的定理是定理3.2的等价表述.

定理3.3 设$(X, \{\Gamma_A\})$是H-空间，Y是拓扑线性空间，Z是一任意的集合，$s\in\mathscr{S}(X, Y)$.设M，$N\subset Z$，g，$f:X+Y\to Z$满足条件:

(i) 对每一$x\in X$，集$\{y\in Y:g(x, y)\in M\}$在Y中紧开;

(ii) 对每一$y\in Y$，集$\{x\in X:g(x, y)\in M\}\subset\{x\in X:f(x, y)\in N\}$且后一集合是H-凸的;

(iii) 存在紧集$L\subset Y$和H-紧集$K\subset X$，使得对每一满足$K\subset D\subset X$的H-凸集D，当$y\in Y\setminus L$时，存在$x\in D$，使得$g(x, y)\in M$.

则下面的结论至少有一个成立:

(1) 存在$\bar{y}\in Y$，使$g(x, \bar{y})\notin M$，$\forall x\in X$.

(2) 存在$\bar{x}\in X$，使得$f(\bar{x}, s(\bar{x}))\in N$.

证 定义集值映象T，$S:X\to 2^Y$如下:

$$T(x)=\{y\in Y:g(x, y)\in M\},$$
$$S(x)=\{y\in Y:f(x, y)\in N\}.$$

如果对每一$y\in Y$，$T^{-1}(y)$是非空的，由定理3.2，对任给的$S\in\mathscr{S}(X, Y)$存在$x\in X$，使得$s(x)\in S(x)$，故结论(2)成立.

如果对某一$y\in Y$，$T^{-1}(y)$是空的，则结论(1)成立.

反之，令$Z=X\times Y$，$g(x, y)=f(x, y)=(x, y)$，$\forall(x, y)\in X\times Y$，$M=\mathrm{graph}(T)$，$N=\mathrm{graph}(S)$，由定理3.3可得定理3.2.证毕.

现在我们利用定理3.2来得出一个相交定理，它是引文[12, 15]中相应结果的推广.

定理3.4 设$(X, \{\Gamma_A\})$，$(Y, \{\Gamma_B\})$是H-空间，T，$S:X\to 2^Y$满足以下条件:

(i) 对每一$x\in X$，$T(x)$是紧开的；$S(x)$是非空H-凸的；

(ii) 对每一$y\in Y$，$T^{-1}(y)$是非空H-凸的，$S^{-1}(y)$是紧开的；

(iii) 存在紧集$L\subset Y$和H-紧集$K\subset X$和H-紧集$M\subset Y$，使得对任意满足$K\subset D\subset X$的H-凸集D，当$y\in Y\setminus L$时有$T^{-1}(y)\cap D\neq\phi$.

则对任一$u\in\mathscr{S}(X, X)$，$v\in\mathscr{S}(Y, Y)$，存在$x\in X$，使得

$$v^{-1}(Tx)\cap S(u(x))\neq\phi.$$

证 因对每一$x\in X$，$y\in Y$，$S(x)$，$T^{-1}(y)$非空，故

$$X=\bigcup_{y\in Y}S^{-1}(y),\quad Y=\bigcup_{x\in X}T(x).$$

又因$L\subset Y$为紧集，且$T(x)$紧开，故存在有限集$\{x_1\cdots x_n\}\subset X$，使得$L\subset\bigcup_{i=1}^{n}T(x_i)$. 设$D$是$X$中的满足条件：$K\cup\{x_1,\cdots x_n\}\subset D$，的紧H-凸集.于是由条件(iii)有

$$Y\setminus\bigcup_{x\in D}T(x)\subset L.$$

从而

$$Y\subset(\bigcup_{x\in D}T(x))\cup\bigcup_{i=1}^{n}T(x_i)=\bigcup_{x\in D}T(x).$$

记$D_1=u(D)$，则D_1是X的紧子集，且$D_1\subset X\subset\bigcup_{y\in Y}S^{-1}(y)$. 由$S^{-1}(y)$紧开，故存在有限集$\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}\subset Y$，使得

$$D_1\subset\bigcup_{i=1}^{m}S^{-1}(y_i).$$

令E是Y中包含$\{y_1,\cdots,y_m\}$的紧的H-凸集，则$D_1\subset\bigcup_{y\in E}S^{-1}(y)$.记$E_1=v(E)$，则$E_1$是$Y$中的紧子集，且$E_1\subset Y\subset\bigcup_{x\in D}T(x)$.令$C=D\times E\subset X\times Y$，则$C$是紧集. 现赋以$C$以如下的结构：对$C$中任意的有限集$P=A\times B\subset C$，其中$A\subset D$，$B\subset E$，定义$\Gamma_P=\Gamma_A\times\Gamma_B$，则$(C,\{\Gamma_P\})$成为H-空间.

记$C_1=D_1\times E_1$，并作集值映象$F:C\to 2^{C_1}$:

$F(x,y)=\{(w,r)\in C_1:\ w\in S^{-1}(y),\ r\in T(x)\}$，$(x,y)\in C$. 则对每一$(x,y)\in C$，$F(x,y)=(S^{-1}(y)\cap D_1)\times(T(x)\cap E_1)$是开集，而且对任一$(w,r)\in C_1$，

$$\begin{aligned}F^{-1}(w,r)&=\{(x,y)\in C:\ x\in T^{-1}(r),\ y\in S(w)\}\\&=(T^{-1}(r)\cap D)\times(S(w)\cap E).\end{aligned}$$

因而$F^{-1}(w,r)$是非空的H-凸集.

令 $S:X\times Y\to X\times Y$，$s(x,y)=(u(x),v(y))$，$(x,y)\in X\times Y$，其中$u\in\mathscr{C}(X,X)$，$v\in\mathscr{C}(Y,Y)$，则S是连续的单值映象.记$s_0=s|_C$，则F满足定理3.2中的所有条件.故存在$z\in C$，使得$s_0(z)\in F(z)$.设$z=(x,y)\in C$，故$s_0(x,y)\in F(x,y)$，即$(u(x),v(y))\in F(x,y)$. 因而$v(y)\in T(x)$，$u(x)\in S^{-1}(y)$.故

$$y\in v^{-1}(T(x))\cap S(u(x)).$$

定理证毕.

四、应　用

作为前述结果的应用，在本节中我们将研究H-空间中极大极小不等式和变分不等式解的存在性问题.

以下设(E,C)是序完备的Riesz空间(见[16])，其中C是闭的正锥，且内部$C^\circ\neq\phi$[1].

1) 习惯上，C的内部C°的小圈在C的正上方．但厂里没此字母，故改排成C°.

（Ⅰ）**对极大极小不等式的应用**

定理4.1 设（X，$\{\Gamma_A\}$）是一H-空间，Y是一拓扑线性空间，$s\in\mathscr{C}(X, Y)$.统f，g：$X\times Y\to E$满足下列条件：对每一$\lambda\in E$，$\lambda>\sup\limits_{x\in X}f(x, s(x))$，有

(i) 对每一$x\in X$，$g(x, \cdot)$下有界，对每一$y\in Y$，$g(\cdot, y)$上有界，f上有界；

(ii) 对每一$x\in X$，集$\{y\in Y: g(x, y)\not\leq\lambda\}$是紧开的；

(iii) 对每一$y\in Y$，集$\{x\in X: f(x, y)\not\leq\lambda\}$是H-凸的；

(iv) 对任一$x\in X$，$y\in Y$，$f(x, y)\in g(x, y)+C°$

(v) 存在紧集$L\subset Y$和H-紧集$K\subset X$，使得对每一满足$K\subset D\subset X$的H-凸集D，当$y\in Y\setminus L$时，存在$x\in D$，使得$g(x, y)\not\leq\lambda$.

则 $\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in X}g(x, y)\leqslant\sup\limits_{x\in X}f(x, s(x))$.

证 记

$$\alpha=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}g(x, y),$$

$$\beta=\sup_{x\in X}f(x, s(x)).$$

由 (i) 知α，$\beta\in E$.又对任意给定的$\lambda>\beta$，令

$$Z=E,\ M=N=\{p\in E: p\not\leq\lambda\},$$

则易知定理3.3的条件满足.但由于对每一$x\in X$，$f(x, s(x))\leqslant\sup\limits_{x\in X}f(x, s(x))<\lambda$，故定理3.3中的结论（2）不成立.因而存在$y_\lambda\in Y$，使得$g(x, y_\lambda)\leqslant\lambda$，$\forall x\in X$.因此，$\sup\limits_{x\in X}g(x, y_\lambda)\leqslant\lambda$；于是对一切$\lambda>\beta$，有$\alpha\leqslant\lambda$，故$\alpha\leqslant\beta$.

结论得证.

定理4.2 设$(X, \{\Gamma_A\})$，$(Y, \{\Gamma_B\})$是两个H-空间，$u\in\mathscr{C}(X, X)$，$v\in\mathscr{C}(Y, Y)$.设f，g：$X\times Y\to E$满足条件：对每一$\lambda\in\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in X}g(u(x), y)-C°$，有

(i) 对每一$x\in X$，集合$\{y\in Y: g(x, y)\in\lambda+C°\}$是紧开的，集合$\{y\in Y: f(x, v(y))\not\geq\lambda\}$是H-凸的；

(ii) 对每一$y\in Y$，集$\{x\in X: f(x, y)\geqslant\lambda\}$是紧闭的，集$\{x\in X: g(u(x), y)\in\lambda+C°\}$是H-凸的；

(iii) 存在紧集$L\subset Y$和H-紧集$K\subset X$，使得对每一满足$K\subset D\subset X$的H-凸集D，当$y\in Y\setminus L$时，存在$x\in D$，使得$g(u(x), y)\in\lambda+C°$；

(iv) 对每一$x\in X$，$f(x, \cdot)$，$g(x, \cdot)$下有界，对每一$y\in Y$，$f(\cdot y)$，$g(\cdot, y)$上有界；

(v) 对任意的$x\in X$，$y\in Y$，$f(x, y)\in g(x, y)+C°$

则下面的结论至少有一成立：

(1) $\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in X}g(u(x), y)\leqslant\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y}f(x, v(y))$.

(2) 对$\lambda\in\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in X}g(u(x), y)-C°$，存在$y_\lambda\in Y$，使得$g(u(x), y_\lambda)\notin\lambda+C°$，$\forall x\in X$.

证 记

$$\alpha=\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,\ v(y)),$$
$$\beta=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}g(u(x),\ y),$$

则α，$\beta\in E$.设$\lambda\in\beta-C^{\circ}$，令

$T(x)=\{y\in Y:g(u(x),\ y)\in\lambda+C^{\circ}\}$，$S(x)=\{y\in Y:f(x,v(y))\not\geq\lambda\}$.易知除条件"$T^{-1}(y)$非空，$S(x)$非空"外，$T$，$S$满足定理3.4中所有的其他条件.如果存在$x\in X$，使得$v^{-1}(T(x))\cap S(u(x))\neq\phi$，设$y_*\in v^{-1}(T(x))\cap S(u(x))$，则$v(y_*)\in T(x)$，且$y_*\in S(u(x))$，即$g(u(x),v(y_*))\in\lambda+C^{\circ}$，$f(u(x),\ v(y_*))\not\geq\lambda$，这与条件(v)相矛盾.故"$T^{-1}(y)$非空"与"$S(x)$ 非空"不能同时成立.

(a) 若对每一$y\in Y$，$T^{-1}(y)\neq\phi$，则对$\lambda\in\beta-C^0$，存在$x_\lambda\in X$，使得$S(x_\lambda)=\phi$，因而对每一$y\in Y$，$f(x_\lambda,\ v(y))\geq\lambda$，因此$\inf_{y\in Y}f(x_\lambda,\ v(y))\geq\lambda$，即$\alpha>\lambda$，$\forall\lambda\in\beta-C^0$于是有$\alpha\geq\beta$.结论(1)成立.

(b) 若对每一$x\in X$，$S(x)\neq\phi$，则对$\lambda\in\beta-C^0$，存在$y_\lambda\in Y$，使得$T^{-1}(y_\lambda)=\phi$.因此$g(u(x),\ y_\lambda)\notin\lambda+C^{\circ}$，$\forall x\in X$.故结论(2)成立.

证毕.

推论4.1 在定理4.2的条件下，如果对每一$y\in Y$，$\sup g(u(x),\ y)\in g(u(X),\ y)$，则定理4.2中只有结论(1)成立.

证 我们只要证明对每一$y\in Y$和每一$\lambda\in\beta-C^{\circ}$，$T^{-1}(y)\neq\phi$.事实上，因$\lambda\in\beta-C^{\circ}$，故对每一$y\in Y$，$\lambda\in\sup_{x\in X}g(u(x),\ y)-C^{\circ}$.设$\lambda_y=\sup_{x\in X}g(u(x),\ y)$，则$\lambda_y\in\lambda+C^0$因而存在$O$点之一开领域$V$，使得$\lambda_y+V\subset\lambda+C^{\circ}$，因$\lambda_y\in g(u(X),\ y)$，故有$x\in X$，使得$g(u(x),\ y)\in\lambda_y+V\subset\lambda+C^{\circ}$，此即$T^{-1}(y)\neq\phi$.结论(1)得证.

(Ⅱ) 对变分不等式的应用

定理4.3 设$(X,\ \{\Gamma_A\})$是H-空间，$f:X\to E$，$\varphi:X\times X\to E$，$\varphi(x,\ x)\geq0$，$\forall x\in E$且满足条件：

(i) 对每一$x\in X$，$f(y)+\varphi(x,\ y)$关于y是拟H-凸的；

(ii) 对任一$y\in X$，任一紧集$M\subset X$及任一网$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}\subset M$，当$x_\alpha\to\bar{x}$且$f(x_\alpha)\leq\varphi(x_\alpha,y)+f(y)$时，有

$$f(\bar{x})\leq\varphi(\bar{x},\ y)+f(y) \tag{4.1}$$

(iii) 存在紧集$L\subset X$及H-紧集$K\subset X$，使得对任一H-凸集D，$K\subset D\subset X$，当$x_0\in X$，且

$$f(x)+\varphi(x_0,\ x)\geq f(x_0),\quad\forall x\in D \tag{4.2}$$

时，就有$x_0\in L$.

则存在$\bar{x}\in X$，使得

$$\varphi(\bar{x},\ x)\geq f(\bar{x})-f(x),\quad\forall x\in X$$

证 任给$x\in X$，令

$$F(x)=\{y\in X:f(x)+\varphi(y,\ x)\geq f(y)\}$$

下证$F:X\to2^X$是H-KKM映象.设相反，如果F不是H-KKM映象，则存在某一有限集$A\subset X$，使得$\Gamma_A\not\subset\bigcup_{x\in A}F(x)$，因而存在$x_0\in\Gamma_A$，但$x_0\notin F(x)$，$\forall x\in A$，即有

$$f(x)+\varphi(x_0,\ x)<f(x_0)\qquad(\forall x\in A)$$

由条件(i)，集$\{y\in X:f(y)+\varphi(x_0,\ y)<f(x_0)\}$是H-凸的，故$x_0\in\Gamma_A\subset\{y\in X:f(y)+\varphi(x_0,\ y)<f(x_0)\}$，因而有

$$\varphi(x_0,\ x_0)+f(x_0)<f(x_0),\ \text{i.e.}\ \varphi(x_0,\ x_0)<0$$

这与假设相矛盾.故F是H-KKM映象.

另对任一紧集$M\subset X$，由条件(ii)知，对每一$x\in X$，$F(x)\cap M$是闭的，故$F(x)$是紧闭的.又因对任一H-凸集D:$K\subset D\subset X$，

$$\bigcap_{x\in D}(F(x)\bigcap_{x\in D}D)=\bigcap_{x\in D}(\{y\in X:f(x)+\varphi(y,\ x)\geqslant f(y)\}\cap D)$$

故对任一$z\in\bigcap_{x\in D}(F(x)\cap D)$有$z\in D$，且

$$f(x)+\varphi(z,\ x)\geqslant f(z),\quad\forall x\in D.$$

于是由条件(iii)知$z\in L$，因而$\bigcap_{x\in D}(F(x)\cap D)\subset L$.故引理1.2的条件满足.因此$\bigcap_{x\ X}F(x)\neq\phi$.取$\bar{x}\in\bigcap_{x\in X}F(x)$，即有

$$f(x)+\varphi(\bar{x},\ x)\geqslant f(\bar{x}),\quad\forall x\in X$$

定理得证.

定义4　设X是拓扑空间，$\varphi:X\times X\to R$.φ称为伪单调的，如果对任一网$\{x_\alpha\}\subset X$，$x_\alpha\to\bar{x}\in X$，当$\varliminf\limits_{\alpha}\varphi(x_\alpha,\ \bar{x})\geqslant0$时，就有

$$\varphi(\bar{x},\ y)\geqslant\lim_{\alpha}\varphi(x_\alpha,\ y),\quad\forall y\in X$$

定理4.4　设$(X,\ \{\Gamma_A\})$是H-空间，$f:X\to(-\infty,\ +\infty)$下半连续，$\varphi:X\times X\to(-\infty,\ +\infty)$是伪单调的，$\varphi(x,\ x)\geqslant0$，$\forall x\in X$，且满足条件：

(i)　对每一$x\in X$，$f(y)+\varphi(x,\ y)$关于y为拟H-凸的；

(ii)　存在紧集$L\subset X$和H-紧集$K\subset X$，使得对任意的H-凸集D，$K\subset D\subset X$，当$x_0\in D$，且$f(x)+\varphi(x_0,\ x)\geqslant f(x)$，$\forall x\in D$时，就有$x_0\in L$.

则定理4.3的结论仍成立.

证　只须验证定理4.3中的条件(ii)成立即可.

事实上，对任一$y\in X$，任一紧集$M\subset X$及任一网$\{x_\alpha\}\subset M$，当$x_\alpha\to\bar{x}$，且$f(x_\alpha)\leqslant\varphi(x_\alpha,\ y)+f(y)$时，由$f$的下半连续性有

$$\varliminf_{\alpha}\varphi(x_\alpha,\ y)\geqslant\varliminf_{\alpha}(f(x_\alpha)-f(y))\geqslant f(\bar{x})-f(y).\tag{4.3}$$

于(4.3)中取$y=\bar{x}$，则有$\varliminf\limits_{\alpha}\varphi(x_\alpha,\ y)\geqslant0$.于是由$\varphi$的伪单调性得知

$$\varphi(\bar{x},\ y)\geqslant\varlimsup_{\alpha}\varphi(x_\alpha,\ y)\geqslant\varlimsup_{\alpha}(f(x_\alpha)-f(y))$$

$$\geqslant\varliminf_{\alpha}(f(x_\alpha)-f(y))\geqslant f(\bar{x})-f(y),\quad y\in X$$

定理证毕.

参 考 文 献

[1] Bardaro C., and R. Ceppitelli, Some further generalizations of Knaser-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem and minimax inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* **132**(1988), 484-490.

[2] Bardaro C., and R. Ceppitelli, Applications of the generalized Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem to variational inequalities, *J. Math. Ana. Appl.*, **137**(1989), 46-58.

[3] Bardaro C. and R. Ceppitelli, Fixed point theorems and nector valued minimax theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, **146**(1990), 363-373.

[4] Browder F.E., The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces, *Math. Ann.*, **177**(1968), 283-301.

[5] Chang Shih-sheng and Ma Yi-hai, Generalized KKM theorem on H-spaces with applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **163**, 2(1992), 406-421.

[6] Chitra and P.V. Subramanyam, A generalization of a section of Ky Fan and its applications to variational inequalities, *Rev. of Research*, Faculty of Science Univ. of Novi Sad, Math Series(1987), 17-37.

[7] Duguudji J. and A. Granas, KKM maps and variational inequalities, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **5** (1978), 679-682.

[8] Fan, K. A generalization of Tychonoff's fixed point theorem, *Math Ann.*, **142**(1961), 305-310.

[9] Fan, F., A minimax inequality and applications, in *Inequalities III* (O. Shisha, Ed.), Academic Press, New York/London, 1872, 103-113.

[10] Fan, K., Some properties of convex sets related to fixed point theorems, *Math. Ann.*, **266**(1984), 519-537.

[11] Ha, C.W., Minimax and fixed point theorems, *Math. Ann.*, **248**(1980), 73-77.

[12] Ha, C.W., A noncompact minimax theorem, *Pacific J. Math.*, **97** (1981), 115-117.

[13] Horvath C., Some results on multivalued mapping and inequalities without convexity, *Nonlinear and Convex Analysis*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Series, **107**(1987), 99-106.

[14] Itoh, W. Takahi and K. Yanagi, Variational inequalities and complementarity problems, *J. Math. Soc. Japan*, **30**(1978), 23-28.

[15] Lassonde, M., On the use of KKM Multifunction in fixed point theory and related topics, *J. Math. Anal. Appl.*, **97**(1983), 151-201.

[16] Luxemburg and A.C. Zaanen, Riesz Spaces I, North-Holl and, Amsterdam/London, 1971.

[17] Yen, C.L., A minimax inequality and its applications to variational inequalities, *Pacific J. Math.*, **97**(1981), 477-481.

Section Theorems, Coincidence Theorems and Intersection Theorems on H-Spaces with Applications

Zhang Shi-sheng

(Sichuan University, Chengdu)

Zhang Ying

(University of Electronics Science and Technology of China, Chengdu)

Abstract

The purpose of this paper is to study the section theorems, coincidence theorems and intersection theorems on H-spaces. As a way of application, we use these results to study the existence problems of solutions for minimax inequalities and variational ineqalities. The results presented in this paper improve and extend the corresponding results in [1, 3, 5, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 17].

Key words section theorem, coincidence theorem, intersection theorem, H-KKM mapping, variational inequality, minimax inequality.