应用数学和力学，第14卷 第9期（1993年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

含参变量富里叶级数的Laplace变换求和法*

卜小明

（天津大学，1992年10月12日收到）

摘　要

本文建立了含参变量富里叶级数的Laplace变换求和定理．利用Laplace变换表可以求得许多在力学上有重要应用的新的含参变量富里叶级数的和式．

关键词　富里叶级数　求和　Laplace变换

一、引　言

富氏级数在结构分析中有重要的应用[1]．特别是在结构的振动和稳定问题中其优越性更是其他数值方法所不能取代．但是富氏级数求和的困难也一直制约着其更为广泛的应用．因为有些级数收敛很慢，如果取有限项近似求和，则需要计算许多项才能保证精度，而且对于有突变的问题，在不连续点处这样近似求和会出现Gibbs现象[2]．在结构的振动与稳定分析中还会遇到更为麻烦的带有参变量的富氏级数的求和问题．因此寻找这些级数的一般求和方法就显得十分重要．

本文试图利用Laplace变换，建立带有参变量的富氏级数的求和定理．由此可以得到许多新的重要的级数和式．

二、不显含参变量的级数求和定理

定理1　设函数$f(x)$在$0<x<\infty$中存在，$F(s)$为$f(x)$的Laplace变换，即

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\exp[-st]dt \tag{2.1}$$

则有如下的级数成立

$$\sum_{k=1}^\infty F(k)\sin kt=\frac{\sin t}{2}\int_0^\infty f(x)\frac{dx}{\operatorname{ch}x-\cos t} \tag{2.2}$$

$$\sum_{k=1}^\infty F(k)\cos kt=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\cos t}-1\right)dx \tag{2.3}$$

---

* 龙驭球推荐．

证明 从(2.1)式我们可以组成级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}F(k)(\cos kt+i\sin kt)=\int_0^{\infty}f(x)\sum_{k=1}^{\infty}\exp[-k(x-it)]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(x)\left(\operatorname{cth}\frac{x-it}{2}-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(x)\left(\frac{1+i\operatorname{cth}\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{\operatorname{cth}\frac{x}{2}+i\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(x)\left(\frac{\csc^2\frac{t}{2}\operatorname{cth}\frac{x}{2}+i\operatorname{csch}^2\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}}{\operatorname{cth}^2\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(x)\left[\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\cos t}-1\right)+i\frac{\sin t}{\operatorname{ch}x-\cos t}\right]dx \tag{2.4}$$

(2.4)就是(2.2)和(2.3)式，这就证明了定理1.

可以看出，尽管(2.2)(2.3)式右端是一个无穷积分，但不少函数是可以积出的，而对于不能积出的大多数函数$f(x)$，一般地 $f(x)/\operatorname{ch}x$ 将迅速趋于零. 因此即使取有限长区间进行数值积分也要比收敛较慢的左端级数近似求和更为精确. 特别地有许多$F(s)$的原函数$f(x)$为

$$f(x)=\begin{cases}f(x) & (0<x<a)\\ 0 & (a\leqslant x<\infty)\end{cases} \tag{2.5}$$

则(2.2)，(2.3)的右端将成为有限积分的形式，即

$$\sum_{k=1}^{\infty}F(k)\sin kt=\frac{\sin t}{2}\int_0^{a}f(x)\frac{dx}{\operatorname{ch}x-\cos t} \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}F(k)\cos kt=\frac{1}{2}\int_0^{a}\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\cos t}-1\right)dx \tag{2.7}$$

作为定理1的应用，我们将给出重要的级数和式，它们将在定理2和定理3中有用.

由Laplace积分变换表知：当$F(s)=1$时，$f(x)=\delta(x)$. 代入(2.2)式得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin kt=\frac{\sin t}{2}\int_0^{\infty}\delta(x)\frac{dx}{\operatorname{ch}x-\cos t}=\frac{1}{2}\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} \tag{2.8}$$

而代入(2.3)式得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos kt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\delta(x)\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\cos t}-1\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\delta(x)\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\cos t}dx-\frac{1}{2}$$

$$=g(t)-\frac{1}{2}$$

式中

$$g(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\delta(x)\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x-\cos t}dx$$

当$t\neq 2n\pi$时，$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

$$g(t)=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x-\cos t}=0$$

当$t=2n\pi$时，$(n=1,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

$$g(t)=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x-1}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}=\infty$$

而且 $g(-t)=g(t)$，$g(2n\pi+t)=g(t)$

所以$g(t)$是一个在$2n\pi$点上为∞，在其余点上为0，且以2π为周期的Dirac偶函数，于是令

$$g(t)=\mu\delta_{2\pi}(t)$$

式中μ为待定系数．因为

$$1=\int_{-\pi}^{\pi}\delta_{2\pi}(t)dt=\frac{1}{\mu}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\mu}\int_0^{\infty}\delta(x)\mathrm{sh}x\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{\mathrm{ch}x-\cos t}dx$$

$$=\frac{1}{2\mu}\int_0^{\infty}\delta(x)\mathrm{sh}x\frac{2}{\sqrt{\mathrm{ch}^2x-1}}\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{ch}x+1}{\mathrm{ch}x-1}}\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}dx$$

$$=\frac{1}{2\mu}\int_0^{\infty}2\pi\delta(x)dx=\frac{\pi}{\mu}$$

所以 $\mu=\pi$

即有 $g(t)=\pi\delta_{2\pi}(t)$

因此

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos kt=\pi\delta_{2\pi}(t)-\frac{1}{2}\tag{2.9}$$

同样地，若将 $F(s)=\frac{1}{s}$，$f(x)=1$分别代入(2.2)，(2.3)式并经过积分运算后可以得到

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kt=\frac{\sin t}{2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{\mathrm{ch}x-\cos t}$$

$$=\sin t\int_0^{\infty}\frac{\exp[-x]}{\exp[-2x]-2\exp[-x]\cos t+1}dx$$

$$=\sin t\int_0^1\frac{dy}{(y-\cos t)^2+\sin^2t}=\sin t\int_{-\cos t}^{1-\cos t}\frac{dz}{z^2+\sin^2t}$$

$$=\mathrm{arc\,tg}\frac{z}{\sin t}\Big|_{-\cos t}^{1-\cos t}=\frac{\pi-t}{2}\tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cos kt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sh}x-\mathrm{ch}x+\cos t}{\mathrm{ch}x-\cos t}dx$$

$$=-\int_0^1\frac{y-\cos t}{y^2-2y\cos t+1}dy=-\frac{1}{2}\ln[(y-\cos t)^2+\sin^2t]_0^1$$

$$=-\ln2\sin\frac{t}{2}\tag{2.11}$$

(2.8)～(2.11)也正是文[3]事先设为已知的四个和式.

此外，定理1也可以用来求带有参变量的级数和. 因为$F(s)$可以隐含着参变量，如

$$F(t)=\frac{1}{s-a},\quad f(x)=\exp[at]$$

的Laplace变换就是如此.

三、含参变量的级数求和定理

定理 2 设函数$f(x)$在$0<x<\infty$中存在，$F(\sigma,\omega)$为$f(x)$的Laplace变换，即

$$F(\sigma,\omega)=F(\sigma+i\omega)=F(s)=\int_0^\infty f(t)\exp[-st]dt$$

$$=\int_0^\infty f(t)\exp[-(\sigma+i\omega)t]dt \tag{3.1}$$

则有如下级数成立

$$\sum_{k=1}^\infty F(\sigma,k)\sin kt=\frac{1}{2}\int_0^\infty \exp[-\sigma t]\frac{\sin t}{\cos x-\cos t}dx$$

$$-i\frac{\pi}{2}\Big[f(t)\exp[-\sigma t]+\exp[-\sigma t]\sum_{n=1}^\infty \exp[-2\pi n\sigma]f(2\pi n+t)$$

$$-\exp[\sigma t]\sum_{n=1}^\infty \exp[-2\pi n\sigma]f(2\pi n-t)\Big] \tag{3.2}$$

或者写成

$$\sum_{k=1}^\infty \mathrm{Re}[F(\sigma,k)]\sin kt=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)\exp[-\sigma t]\frac{\sin t}{\cos x-\cos t}dx \tag{3.3a}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}[F(\sigma,k)]\sin kt=-\frac{\pi}{2}\Big[f(t)\exp[-\sigma t]$$

$$+\exp[-\sigma t]\sum_{n=1}^\infty \exp[-2\pi n\sigma]f(2\pi n+t)$$

$$-\exp[\sigma t]\sum_{n=1}^\infty \exp[-2\pi n\sigma]f(2\pi n-t)\Big] \tag{3.3b}$$

证明 将(3.1)代入(3.2)式

$$\sum_{k=1}^\infty F(\sigma,k)\sin kt=\int_0^\infty f(x)\exp[-\sigma x]\sum_{k=1}^\infty \exp[-ikx]\sin kt dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty f(x)\exp[-\sigma x]\sum_{k=1}^\infty\{[\sin k(x+t)-\sin k(x-t)]$$

$$-i[\cos k(x-t)-\cos k(x+t)]\}dx$$

注意到(2.8)，(2.9)式，于是

$$\sum_{k=1}^{\infty}F(\sigma,k)\sin kt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(x)\exp[-\sigma x]$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{x+t}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x-t}{2}\right)-i\pi[\delta_{2\pi}(x-t)-\delta_{2\pi}(x+t)]\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(x)\exp[-\sigma x]\frac{\sin t}{\cos x-\cos t}dx-i\frac{\pi}{2}\Big[f(t)\exp[-\sigma t]$$

$$+\exp[-\sigma t]\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-2\pi n\sigma]f(2\pi n+t)$$

$$-\exp[\sigma t]\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-2\pi n\sigma]f(2\pi n-t)\Big]$$

这就证明了定理2.

关于(3.2a)的讨论与定理1是相似的．而(3.3b)式将左端的带有参变量σ的正弦级数化成了另一个收敛很快的无穷级数，且在许多情况下，它是可以求和的．特别是当$f(x)$满足(2.5)式时，这个无穷级数的所有高次项恒为零(当$n>M$时,$f(2\pi n+t)=0$，$f(2\pi n-t)=0$)，因此只有有限项．

作为一个例子我们可以求出一类带有参变量的正弦级数和的通式．

由Laplace积分变换表知：

$$f(x)=\frac{1}{N!}x^N,\quad F(\sigma,\omega)=\frac{1}{(\sigma+i\omega)^{N+1}} \tag{3.4}$$

将(3.4)代入(3.3b)中得

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^2+\sigma^2)^{-\frac{N+1}{2}}\sin\left[(N+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{k}{\sigma}\right]\sin kt$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\pi}{N!}\Big\{t^N\exp[-\sigma t]+\exp[-\sigma t]\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-2\pi n\sigma](2\pi n+t)^N$$

$$-\exp[\sigma t]\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-2\pi n\sigma](2\pi n-t)^N\Big\}$$

$$=(-1)^N\frac{1}{2}\frac{\pi}{N!}\frac{1}{\sigma^N}\frac{d^N}{dy^N}\left[\frac{d^N}{dy^N}\left[\frac{\operatorname{sh}\sigma(\pi-t)y}{\operatorname{sh}\sigma\pi y}\right]\right]_{y=1} \tag{3.5}$$

(3.5)式的右端化成了非常简洁的封闭解．因此对于一切$N\geqslant0$的整数，(3.5)式都能求出封闭的和．例如当$N=0$时

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+\sigma^2}\sin kt=\frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sh}\sigma(\pi-t)}{\operatorname{sh}\sigma\pi} \tag{3.6}$$

当$N=1$时

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k^2+\sigma^2)^2}\sin kt=\frac{\pi}{4\sigma}\left[t\frac{\operatorname{ch}\sigma(\pi-t)}{\operatorname{sh}\sigma\pi}-\pi\frac{\operatorname{sh}\sigma t}{\operatorname{sh}^2\sigma\pi}\right] \tag{3.7}$$

这两个和式能在严宗达教授的著作[1]附录B中找到，结果是一致的．也可以得到$N=2$和3的结果：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{(k^2+\sigma^2)^3}\sin kt=-\frac{\pi}{16}\left\{t^2\frac{\mathrm{sh}\sigma(\pi-t)}{\mathrm{sh}\pi\sigma}+2\pi t\frac{\mathrm{sh}\sigma t}{\mathrm{sh}\sigma\pi}-2\pi^2\frac{\mathrm{ch}\sigma\pi\mathrm{sh}\sigma t}{\mathrm{sh}^3\sigma\pi}\right\}$$

$$+\frac{3\pi}{16\sigma}\left[t\frac{\mathrm{ch}\sigma(\pi-t)}{\mathrm{sh}\sigma\pi}-\pi\frac{\mathrm{sh}\sigma t}{\mathrm{sh}^2\sigma\pi}\right] \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k^2-\sigma^2)}{(k^2+\sigma^2)^4}\sin kt=-\frac{\pi}{48\sigma}\left\{t^3\frac{\mathrm{ch}\sigma(\pi-t)}{\mathrm{sh}\sigma\pi}-3\pi t^2\frac{\mathrm{sh}\sigma t}{\mathrm{sh}^2\sigma\pi}\right.$$

$$\left.+6\pi^2 t\frac{\mathrm{ch}\sigma\pi\mathrm{ch}\sigma t}{\mathrm{sh}^3\sigma\pi}-2\pi^3\frac{2+\mathrm{ch}2\sigma\pi}{\mathrm{sh}^4\sigma\pi}\mathrm{sh}\sigma t\right\} \tag{3.9}$$

(3.8)和(3.9)却是在文[1]中找不到的．如果使用其他的函数$f(x)$，则可以得到其他的带参数富氏级数的和式．

定理 3 设函数$f(x)$在$0<x<\infty$中存在，$F(\sigma,\omega)$为$f(x)$的Laplace变换，即为(3.1)式，则有如下级数成立

$$\sum_{k=1}^{\infty}F(\sigma,k)\cos kt=\frac{\pi}{2}\Big\{f(t)\exp[-\sigma t]+\exp[-\sigma t]$$

$$\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-2\pi n\sigma]f(2\pi n+t)+\exp[\sigma t]\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-2\pi n\sigma]f(2\pi n-t)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\exp[-\sigma x]dx-i\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(x)\exp[-\sigma x]\frac{\sin x}{\cos t-\cos x}dx \tag{3.10}$$

或者写成

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}[F(\sigma,k)]\cos kt=\frac{\pi}{2}\Big\{f(t)\exp[-\sigma t]$$

$$+\exp[-\sigma t]\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-2\pi n\sigma]f(2\pi n+t)$$

$$+\exp[\sigma t]\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-2\pi n\sigma]f(2\pi n-t)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\exp[-\sigma x]dx \tag{3.11a}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Im}[F(\sigma,k)]\cos kt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f(x)\exp[-\sigma x]\frac{\sin x}{\cos x-\cos t}dx \tag{3.11b}$$

定理3的证明这里就省略了．显然有关定理2的讨论也可以适用于定理3．

再以(3.4)式作为例子，将其代入(3.11a)式可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k^2+\sigma^2)^{-\frac{N+1}{2}}\cos\left[(N+1)\text{arc tg}\frac{k}{\sigma}\right]\cos kt$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\pi}{N!}\left\{t^N\exp[-\sigma t]+\exp[-\sigma t]\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-2\pi n\sigma](2\pi n+t)^N\right.$$

$$\left.+\exp\sum_{n=1}^{\infty}\exp[-2\pi n\sigma](2\pi n-t)^N-\frac{N!}{\pi\sigma^{N+1}}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^{N+1}}+(-1)^N\frac{1}{2}\frac{\pi}{N!}\frac{1}{\sigma^N}\frac{d^N}{dy^N}\left[\frac{\text{ch}\sigma(\pi-t)y}{\text{sh}\sigma\pi y}\right]_{y=1} \tag{3.12}$$

显然，(3.12)式也对于一切$N\geqslant0$的整数，都能求出封闭的．和例如当$N=0$，2，3时分别可得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+\sigma^2}\cos kt=-\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{\pi}{2\sigma}\frac{\text{ch}\sigma(\pi-t)}{\text{sh}\sigma\pi} \tag{3.13}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+\sigma^2)^2}\cos kt=-\frac{1}{2\sigma^4}+\frac{\pi}{4\sigma^3}\frac{\text{ch}\sigma(\pi-t)}{\text{sh}\sigma\pi}$$

$$+\frac{\pi}{4\sigma^2}\left[t\frac{\text{sh}\sigma(\pi-t)}{\text{sh}\sigma\pi}+\pi\frac{\text{ch}\sigma t}{\text{sh}^2\sigma\pi}\right] \tag{3.14}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+\sigma^2)^3}\cos kt=-\frac{1}{2\sigma^6}+\frac{3\pi}{16\sigma^5}\frac{\text{ch}\sigma(\pi-t)}{\text{sh}\sigma\pi}+\frac{3\pi}{16\sigma^4}\left[t\frac{\text{sh}\sigma(\pi-t)}{\text{sh}\sigma\pi}\right.$$

$$\left.+\pi\frac{\text{ch}\sigma t}{\text{sh}^2\sigma\pi}\right]+\frac{\pi}{16\sigma^3}\left[t^2\frac{\text{ch}\sigma(\pi-t)}{\text{sh}\sigma\pi}-2\pi t\frac{\text{sh}\sigma t}{\text{sh}^2\sigma\pi}+2\pi^2\frac{\text{ch}\sigma\pi\text{ch}\sigma t}{\text{sh}^3\sigma\pi}\right] \tag{3.15}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k^2+\sigma^2)^4}\cos kt=\frac{\pi}{32\sigma^5}\frac{\text{ch}\sigma(\pi-t)}{\text{sh}\sigma\pi}+\frac{\pi}{32\sigma^4}\left[t\frac{\text{sh}\sigma(\pi-t)}{\text{sh}\sigma\pi}+\pi\frac{\text{ch}\sigma t}{\text{sh}^2\sigma\pi}\right]$$

$$-\frac{\pi}{96\sigma^2}\left[t^3\frac{\text{sh}\sigma(\pi-t)}{\text{sh}\sigma\pi}+3\pi t^2\frac{\text{ch}\sigma t}{\text{sh}^2\sigma n}-6\pi^2 t\frac{\text{ch}\sigma\pi\ \text{sh}\sigma t}{\text{sh}^3\sigma\pi}\right.$$

$$\left.+2\pi^3\frac{2+\text{ch}2\sigma\pi}{\text{sh}^4\sigma\pi}\text{ch}\sigma t\right. \tag{3.16}$$

不难验证，将(3.13)和(3.14)式对t求一阶导数可以得到(3.6)和(3.7)式．这也表明了定理的正确性．如果使用其他的函数$f(x)$与$F(s)$还可以得到许多有用的带参变量富氏级数的和．此外，再利用级数的微分与积分公式，就能得到更多的级数和式．

参 考 文 献

[1] 严宗达，《结构力学中的富里叶级数解法》，天津大学出版社，(1989).

[2] Harry, F. Davis, *Fourier Series and Orthogonal Functions*, Allyn and Bacon, Boston(1963).

[3] 钱伟长，付氏变换在三角级数求和中的应用，应用数学和力学，10(5)(1989)，371—384.

Summation of Fourier Series with Parameter by Laplace Transforms

Bu Xiao-ming

(*Tianjin University, Tianjin*)

Abstract

In this paper, the theorems concerning the summation of Fourier series with parameter are given by using Laplace Transforms. By means of the known result of Laplace Transforms, many new, important problems of summation of Fourier series with parameter in mechanics can be solved.

Key words Fourier series, summation, Laplace transforms.