

平面映射的周期解分支

曹进德 李 琼

(云南大学函授夜大部) (昆明师专数学系)
(周焕文推荐, 1990年10月19日收到)

摘 要

本文运用一些技巧对Taylor映射在 $4 < A < 1.5\pi$ 下和弹跳球运动在 $4 < r \leq 1.5\pi$ 下证明了有正规同宿点, 因而有无穷多个周期点。

关键词 Taylor映射 正规同宿点 分支 弹跳球运动 周期点

一、引言、概念和引理

众所周知, 对二维映射而言, 其双曲不动点的稳定流形与不稳定流形的横截同宿点的存在就意味着系统处于混沌状态。但寻找横截同宿点往往很困难, 因此文[1]指出: 正规同宿点的存在同样使系统具有复杂的性质。文[3]曾对Taylor映射在 $A \geq 1.5\pi$ 下和弹跳球运动在 $r \geq 1.5\pi$ 下证明了存在正规同宿点, 因而系统存在无穷多个周期点。本文运用某些技巧分别对Taylor映射在 $4 < A \leq 1.5\pi$ 下和弹跳球运动在 $4 < r \leq 1.5\pi$ 下证明了也存在正规同宿点, 因而也有无穷多个周期点, 这样我们就得到结论: Taylor映射在 $A > 4$ 下和弹跳球运动在 $r > 4$ 下均有无穷多个周期点, 从而推广了文[3], [4], [5]的结果。

定义1 设 $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是光滑微分同胚, 若满足

- a) $R \circ R = \text{id}$,
- b) R 的不动点集 $\text{Fix}(R) = \mathcal{A}$ 的维数为1,

则称 R 是对合映射, 而微分同胚 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 称为 R -可逆的, 如果 $R \circ F = F^{-1} \circ R$ 。

定义2 如果 $F(P) = P$, $P \in \text{Fix}(R)$, 则称 P 为 F (关于 R)的对称不动点。

下面总是假设 R 是对合映射, F 是 R -可逆的。

引理1 设 $P \in \text{Fix}(R)$ 为 F 的对称不动点, $w^s(P)$, $w^u(P)$ 分别表示 P 的稳定流形和不稳定流形, 那么 $R(w^s(P)) = w^u(P)$, $R(w^u(P)) = w^s(P)$, 特别地, 若 $q \in w^u(P) \cap \text{Fix}(R)$, 则 q 为同宿点。

定义3 如果 $q \in w^u(P) \cap \text{Fix}(R)$ 且 $w^u(P)$ 与 $\text{Fix}(R)$ 在 q 点横截相交, 则称 q 为正规同宿点。正规性比非退化性要弱一些。

引理2 设 P 为 F 的对称不动点, 若 q 是 $w^u(P)$ 和 $\text{Fix}(R)$ 的正规同宿点, N 是 $\text{Fix}(R)$

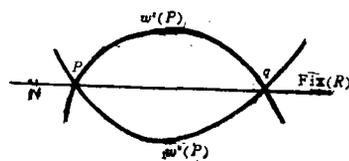


图 1

上 P 点的任一邻域,则在 N 中有 F 的无穷多个对称周期点(图1).

此引理的证明详见文[1],这里从略.

二、 $n=1$ 的Taylor映射

$n=1$ 的Taylor映射为

$$F_A: \begin{cases} x_1 = 2x - y + A \sin x \\ y_1 = x \end{cases} \quad (A > 0) \quad (2.1)$$

显然这是一个光滑微分同胚.令 $R: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, x)$,则 R 是对合映射, F_A 是 R -可逆的,而且

$$\mathcal{A} = \text{Fix}(R) = \{(x, y) | y = x\}$$

F_A 的不动点 $P_k = (k\pi, k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

以下我们仅在 $4 < A \leq 1.5\pi$ 下讨论 F_A 的周期解分支.

由于 dF_A 在 P_0 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda - (2+A) & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (2+A)\lambda + 1 = 0$$

其特征值为

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (2+A + \sqrt{(2+A)^2 - 4}) > 1$$

$$0 < \lambda_2 = \frac{1}{2} (2+A - \sqrt{(2+A)^2 - 4}) < 1$$

故 P_0 为 F_A 的双曲不动点,且其不稳定流形 $w^u(P_0)$ 在 P_0 点的切向为

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{2}{2+A + \sqrt{(2+A)^2 - 4}} \quad (2.2)$$

dF_A 在 P_1 点的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda - (2-A) & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (2-A)\lambda + 1 = 0$$

其特征值为

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} (2-A + \sqrt{(2-A)^2 - 4})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} (2-A - \sqrt{(2-A)^2 - 4})$$

易知,当 $4 < A \leq 1.5\pi$ 时,有 $0 < |\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$,故 P_1 点亦为 F_A 的双曲不动点,且其稳定流形 $w^s(P_1)$ 在 P_1 点的切向为

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{2}{2-A + \sqrt{(2-A)^2 - 4}} \quad (2.3)$$

此外, F_A 将 $\mathcal{A} = \text{Fix}(R)$ 的上半部,即 $\{(x, y) | y = x, x \geq 0\}$ 映为

$$x = y + A \sin y \quad (y \geq 0) \quad (2.4)$$

且

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{P_0} = \frac{1}{1+A} \cdot \left. \frac{dy}{dx} \right|_{P_1} = \frac{1}{1-A} \tag{2.5}$$

F_A 将 $L = \{(x, y) | y = (1 - \frac{8}{3\pi})x, x \geq 0\}$ 映为

$$x = \left(1 + \frac{8}{3\pi}\right)y + A \sin y \quad (y \geq 0) \tag{2.6}$$

且

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{P_0} = \frac{1}{1 + \frac{8}{3\pi} + A} \tag{2.7}$$

命题1 当 $4 < A \leq 1.5\pi$ 时, $F_A(L)$ 与 Δ 至少有一个交点.

证明 令 $x=y$, 可将(2.6)化为

$$\frac{8}{3\pi}y + A \sin y = 0$$

我们考虑连续函数

$$f(y) = \frac{8}{3\pi}y + A \sin y,$$

由于 $f(\pi) = \frac{8}{3} > 0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - A < 0$, 故由连续函数介值定理可知, $f(y)$ 在 $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ 内至少有一实根, 因而 $F_A(L)$ 与 Δ 至少有一个交点.

不难知道, F_A 将 Δ 的上半部, L 及 P_0 所围成的开三角形区域映成图2的条形 D , H 是图2所示的闭区域.

命题2 P_0 的不稳定流形 $w^u(P_0)$ 必有一侧进入 $\text{int}(H)$.

证明 \because 当 $4 < A \leq 1.5\pi$ 时, 由(2.2), (2.5)和(2.7)知 $F_A(L)$, $w^u(P_0)$, $F_A(\Delta)$ 在 P_0 点的切向满足不等式

$$\frac{1}{1 + \frac{8}{3\pi} + A} < \frac{2}{2 + A + \sqrt{(2+A)^2 - 4}} < \frac{1}{1+A}$$

故 P_0 的不稳定流形 $w^u(P_0)$ 必有一侧进入 $\text{int}(H)$.

由于在 H 上, F_A 是 y -方向溢出的(Overflowing), 即 $y_1 = x > y$ (除 Δ 上那部分外), 于是结合命题1可得

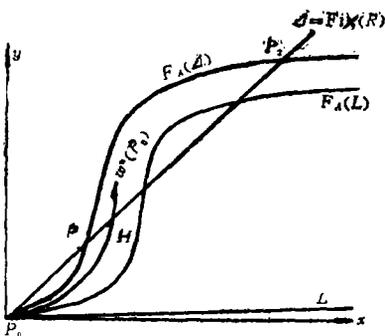


图 2

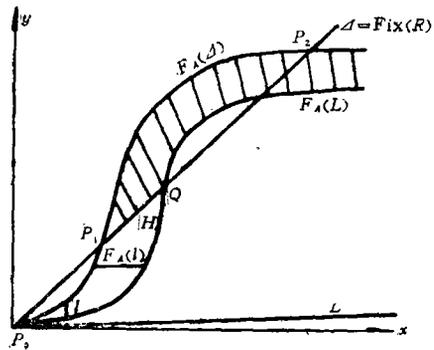


图 3

命题3 从 H 的内部(即 $\text{int}(H)$)出发向前的轨道只有两种可能:

(I) 渐近于 F_A 的周期点;

(II) 若干次迭代后离开 H ,且第一个离开点必在 $F_A(H) - \text{int}(H)$ 上.

命题4 $F_A(H) - \text{int}(H) \subset (D-H) \cup \overline{P_1Q}$, 即区域 $F_A(H) - \text{int}(H)$ 必在图3所示的阴影部分之中, 其中 D 仍为图中的条形区域

证明 设 $(x_0, y_0) \in \text{int}(H)$, 我们考虑 $x = x_0$ 与 H 相交的垂线段 l , 于是 l 在 F_A 下的象 $F_A(l)$ 为一水平线段 $y = x_0$, 且有 $F_A(l) \subset D$, 事实上, $F_A(l)$ 与 $F_A(\mathcal{L})$ 和 $F_A(L)$ 交点横坐标分别为

$$x_1^* = x_0 + A \sin x_0$$

$$x_2^* = \left(1 + \frac{8}{3\pi}\right)x_0 + A \sin x_0$$

且 (x_0, y_0) 在 F_A 下象点的横坐标为 $x_2^* = 2x_0 - y_0 + A \sin x_0$. 由于 F_A 在 H 上是 y -方向溢出的, 故有 $x_1^* < x_0^*$, 下证当 $4 < A \leq 1.5\pi$ 时 $x_0^* < x_2^*$:

$$\text{考虑函数 } g(y) = \frac{1}{1 - \frac{8}{3\pi}} y - \left[\left(1 + \frac{8}{3\pi}\right)y + A \sin y \right]$$

$$\therefore g'(y) = \frac{1}{1 - \frac{8}{3\pi}} - \left(1 + \frac{8}{3\pi} + A \cos y\right)$$

$$\geq \frac{3\pi}{3\pi - 8} - \left(1 + \frac{8}{3\pi} + 1.5\pi\right)$$

$$\approx 6.6358 - 6.5592 > 0$$

且 $g(0) = 0$, 故当 $4 < A \leq 1.5\pi$ 时, 有

$$g(y) > 0 \quad (y > 0)$$

即

$$\frac{1}{1 - \frac{8}{3\pi}} y > \left(1 + \frac{8}{3\pi}\right)y + A \sin y$$

亦即 $x = \left(1 + \frac{8}{3\pi}\right)y + A \sin y$ 位于 $y = \left(1 - \frac{8}{3\pi}\right)x$ 的上方, 故有 $y_0 > \left(1 - \frac{8}{3\pi}\right)x_0$ ($\because (x_0,$

$y_0) \in \text{int}(H)$), 即 $x_0 - y_0 < \frac{8}{3\pi} x_0$, 进而有

$$x_0^* < x_2^*$$

综上所述, 当 $4 < A \leq 1.5\pi$ 时, x_1^*, x_0^*, x_2^* 满足不等式

$$x_1^* < x_0^* < x_2^*$$

因而有 $F_A(l) \subset D$, 由此易得

$$F_A(H) - \text{int}(H) \subset (D-H) \cup \overline{P_1Q}$$

即 $F_A(H) - \text{int}(H)$ 位于图3所示的阴影部分之中.

命题5 P_0 的不稳定流形 $w^u(P_0)$ 必有一侧与 \mathcal{L} 相交后穿过 \mathcal{L} .

证明 利用命题2, 命题4可知, $w^u(P_0)$ 向前只有两种可能:

(1) 从 H 的以 \mathcal{L} 为边界的那部分穿出 H ;

(2) 以 P_1 为其渐近点, 且在 $y = \pi$ 下方趋于 P_1 点 (换言之, $w^u(P_0)$ 为 P_1 的稳定流形的

一支).

由于 $w^s(P_1)$, $F_A(\mathcal{A})$ 在 P_1 点的切向满足不等式

$$2 - A + \sqrt{(2-A)^2 - 1} < 1 - A < 0$$

故 P_1 的稳定流形 $w^s(P_1)$ 不可能进入 $\text{int}(H)$, 因此可能性(2)不成立, 从而 $w^u(P_0)$ 必与 \mathcal{A} 相交后穿过 \mathcal{A} .

命题6 当 $4 < A \leq 1.5\pi$ 时, F_A 存在正规同宿点.

证明 由命题5知, $w^u(P_0)$ 必与 \mathcal{A} 相交后穿过 \mathcal{A} , 分两种情形讨论:

① 若 $w^u(P_0)$ 与 \mathcal{A} 横截相交穿过 \mathcal{A} , 则交点就是正规同宿点;

② 若 $w^u(P_0)$ 与 \mathcal{A} 相切相交后穿过 \mathcal{A} , 则因(2.1)是解析的, 由[2]的结论可知, 对充分大的 n , $F_A^{-n}(\mathcal{A})$ 与 $w^u(P_0)$ 横截相交. 现令 $R_1 = F_A^{-n} \circ R$, 则不难验证,

$$R_1^2 = \text{id}, R_1 \circ F_A = F_A^{-1} \circ R_1,$$

$\text{Fix}(R_1) = \left\{ (x, y) \mid x - y + \frac{n}{2} A \sin x = 0 \right\}$, 故 R_1 是对合映射, F_A 是 R_1 -可逆的, 且

$$F_A^{-n}(\text{Fix}(R)) \subset \text{Fix}(R_1)$$

此由知 $F_A^{-n}(\mathcal{A}) \cap w^u(P_0) \subset \text{Fix}(R_1) \cap w^u(P_0)$ 从而我们又构选出一个 $\text{Fix}(R_1) \cap w^u(P_0)$ 上的正规同宿点.

综上此命题获证.

于是由命题6和引理2, 我们有

定理1 对(2.1)而言, 当 $4 < A \leq 1.5\pi$ 时 F_A 有无穷多个周期点.

结合文[3]的结果, 又有

定理2 对(2.1)而言, 当 $A > 4$ 时, F_A 有无穷多个周期点.

三、 $\alpha = 1$ 的弹跳球运动

经过简单变换, $\alpha = 1$ 的弹跳球运动^[4]具有以下形式

$$F_r: \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = 2y - x - r \cos y \end{cases} \quad (r > 0) \tag{3.1}$$

显然 F_r 是光滑微分同胚, 令 $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, x)$, 则 R 是对合映射, F_r 是 R -可逆的, F_r 的不动点为

$$P_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

易知 P_0, P_1 均为双曲不动点, 以下在 $4 < r \leq 1.5\pi$ 下完全类似于第二节的讨论, (H, L 的取法见图4)我们有

定理3 对 $\alpha = 1$ 的弹跳球运动(3.1)而言, 当 $4 < r \leq 1.5\pi$ 时, F_r 有正规同宿点, 因而有无穷多个周期点.

结合文[3]的结果, 又有

定理4 对 $\alpha = 1$ 的弹跳球运动(3.1)而言, 当 $r > 4$ 时, F_r 有正规同宿点, 因而有无穷多个周期点.

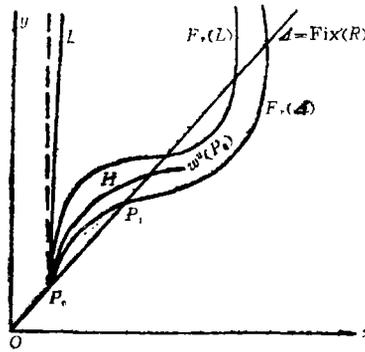


图 4

$$\text{其中 } L = \left\{ (x, y) \mid \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \left(1 - \frac{8}{3\pi} \right) \left(y - \frac{\pi}{2} \right), y \geq \frac{\pi}{2} \right\}$$

这样我们就对Taylor映射和弹跳球运动, 分别在 $A \in (4, +\infty)$, $r \in (1, +\infty)$ 的参数区间里证明了正规同宿点的存在性, 因而在相应参数区间里相应系统均有无穷多个周期点, 从而推广了文[3], [4], [5]的结果.

致谢 作者十分感谢李继彬教授的指导.

参 考 文 献

- [1] Davaney, R. L., Homoclinic Bifurcations and the Area-conserving Hénon Mapping, *J. Diff. Equs.*, 51(1984), 254—266.
- [2] Churchill, R. and D. Rod, Pathology in Dynamical system I, Analytic Hamiltons, *J. Diff. Equs.*, 37(1980), 23—28.
- [3] 朱思铭等, 全国动力系统及其应用学术讨论会交流资料(杭州), (1988).
- [4] Guckenheimer, J. and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*, Springer-Verlag(1983).
- [5] 孙义燧和C. Frvshite, 二维保面积映射的Kolmogorov熵, *中国科学(A)*, 4(1982), 357—363.
- [6] 李继彬, 《浑纯与Melnikov方法》, 重庆大学出版社, 重庆(1989).

Bifurcations of Periodic Solutions for Plane Mappings

Cao Jin-de

(Adult Education College of Yunnan Univerity, Kunming)

Li Qiong

(Department of Mathematics, Kunming Junior Normal College, Kunming)

Abstract

In this paper, using some techniques, we prove that there exists the regular homoclinic point for Taylor mapping with $4 < A \leq 1.5\pi$ and motion of bouncing ball with $4 < r \leq 1.5\pi$. This result implies that the corresponding systems have infinitely many distinct periodic points.

Key words Taylor mapping, motion of bouncing ball, regular homoclinic point, bifurcation, periodic point