应用数学和力学，第14卷 第9期（1993年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

有限水深中的极限非线性波

马 瑜　　陈耀松

（北京大学力学系，1992年6月23日收到）

摘　要

本文用参数优化方法，计算出有限水深中的极限Stokes波．计算的精度高，效率也高．从而进一步证明了用优化手段求Stokes波动解里的待定系数是一个合理的、行之有效的方法．

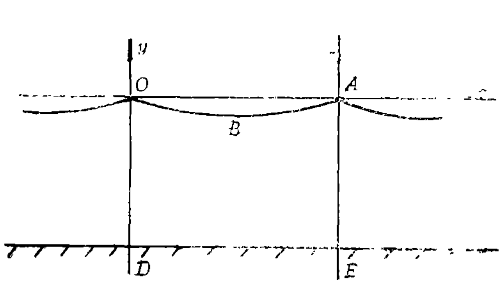
关键词　Stokes波　极限位势波　优化求解

一、引　　言

极限Stokes波是典型的非线性波动．对无限水深的情况已有数位名家究研过[1]．但对有限水深的情况尚无人问津．在无限水深情况下，对于Stokes波，Некрасов[1]在数学上将它归结为求解一个非线性方程的问题．对函数中待定的各项系数，他假定了逐阶减小而求出的方法把它们找到．这样所得的解的精度比较差．文献[2]则采用参数优化方法，对非线性波级数展开式中所留的全部系数统一用优化法求解，这样不但不增加工作量（有现成的最小二乘优化算法程序可用）而且求得的结果精度甚高，与准确解几乎完全吻合．作为补充，本文试图在前文的基础上应用参数优化方法来对有限水深情况下的极限非线性波进行计算．

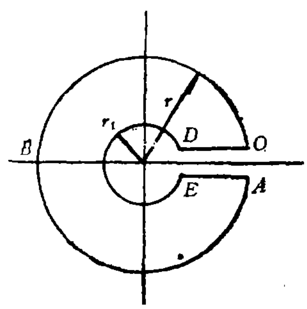
二、数 学 表 示

对于具有平直底部的、有限水深的、周期性的二维位势波(图1)，可采用复速度势w来表



"z"

图 1



"u"

图 2

* 蔡树棠推荐．

示其运动，w是由速度势Φ和流函数Ψ两部分组成.它可表为：

$$w=\Phi+i\Psi \tag{2.1}$$

为寻找w与z之间的关系，用保角映射设法将物理平面"z"上Stokes波的种一周期性运动区域EABODE变换到"u"平面上的一个环形区域（图2）.在"u"平面中我们采用极坐标即$u=r\exp[i\theta]$，其中r表示向径，θ表示幅角.对于环形区域，我们假设外径取为1，而内径则设为r_1.这个变换的数学表示式取为：

$$\frac{dz}{du}=\frac{\lambda f(u)}{2\pi i\cdot u\cdot\sqrt[3]{(1-u)\left(1-\frac{r_1^2}{u}\right)}} \tag{2.2}$$

其中 $f(u)=1+a_1\left(u+\frac{r_1^2}{u}\right)+a_2\left(u+\frac{r_1^2}{u}\right)^2+a_3\left(u+\frac{r_1^2}{u}\right)^3+\cdots \qquad (2.3)$

（2.3）式中的a_1，a_2，…，a_n，…为待定系数.而λ则代表波长.变换式（2.2）中等号右边引入因子$\sqrt[3]{1-u}$的目的是将极限点A的奇性分离出去，从而使其余部分能成为一个解析函数.而另一因子$\sqrt[3]{1-\frac{r_1^2}{u}}$的引入以及在$f(u)$的表达式中以$\left(u+\frac{r_1^2}{u}\right)$来代替原无限水深时$f(u)$中出现的$u$[1]或[2]是为了使"$u$"平面上的内圆周$r=r_1$在物理空间成为水平底部.

再用变换

$$w=\frac{c\lambda}{2\pi i}\ln u \tag{2.4}$$

（其中c表示波速，而λ则表示波长）

将"u"平面上的外径为1的单位圆的环形区域变换到"w"平面上的一个水平条带.因此，w与z有下列关系：

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dz}&=\frac{dw}{du}\cdot\frac{du}{dz}\\&=\frac{c\lambda}{2\pi i\cdot u}\cdot\frac{2\pi i\cdot u\cdot\sqrt[3]{(1-u)\left(1-\frac{r_1^2}{u}\right)}}{\lambda f(u)}\\&=\frac{c\cdot\sqrt[3]{(1-u)\left(1-\frac{r_1^2}{u}\right)}}{f(u)}\end{aligned} \tag{2.5}$$

根据上述变换，"u"平面上半径为r_1的圆周对应"z"平面上的平直底部DE，而单位圆则对应于物理空间的自由面OBA.

根据自由面上的条件：

$$\frac{1}{2}q^2+gy=0 \tag{2.6}$$

其中q为速度的模.若以V_1和V_2表示速度的实部和虚部，则$q^2=|V^1+iV_2|^2=\left|\frac{dw}{dz}\right|^2=V_1^2+V_2^2$. g为重力加速度，而y为竖向坐标.

由（2.6）式可得：

$$\left.\frac{dq^2}{d\theta}\right|_{r=1}=-2g\left.\frac{dy}{d\theta}\right|_{r=1}$$

$$=-2g\mathrm{Im}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)\Big|_{r=1}$$

$$=-2g\mathrm{Im}\left(iu\frac{dz}{du}\right)\Big|_{r=1}$$

将（2.2）式代入上式再对θ积分，有：

$$q^2|_{r=1}=-\frac{g\lambda}{\pi}\int_0^\theta \mathrm{Im}\left[\frac{f(\exp[i\theta])}{\sqrt[3]{(1-\exp[i\theta])(1-r_1^2\exp[-i\theta])}}\right]d\theta \tag{2.7}$$

根据（2.5）式，上式又可写为如下形式：

$$1=-\frac{g\lambda}{\pi c^2}\int_0^\theta \mathrm{Im}\left[\frac{f(\exp[i\theta])}{\sqrt[3]{(1-\exp[i\theta])(1-r_1^2\exp[-i\theta])}}\right]d\theta \cdot\left[\left|\frac{f(\exp[i\theta])}{\sqrt[3]{(1-\exp[i\theta])(1-r_1^2\exp[-i\theta])}}\right|^2\right] \tag{2.8}$$

余下的问题是如何适当地选择系数a_1，a_2，…，a_n，…使(2.8)式成立.一但系数a_1，a_2，…，a_n，…，确定，$\frac{dz}{du}$，$\frac{dw}{dz}$以及w等均可随之而得，有限水深中的极限非线性波解的问题可谓基本解决.

三、参数优化方法

实际上，要准确满足（2.8）式必须保留全部系数a_1，a_2…，a_n，…. 实用上我们只能保留有限个系数a_1，a_2，…，a_m.代替准确满足（2.8）式的是使$1-J$达到最小值.其中

$$J=-\frac{g\lambda}{\pi c^2}\int_0^\theta \mathrm{Im}\left[\frac{f(\exp[i\theta])}{\sqrt[3]{(1-\exp[i\theta])(1-r_1^2\exp[-i\theta])}}\right]d\theta \cdot\left[\left|\frac{f(\exp[i\theta])}{\sqrt[3]{(1-\exp[i\theta])(1-r_1^2\exp[-i\theta])}}\right|^2\right]$$

采用最小二乘法，使在$\Phi(a_1,a_2,\cdots,a_m)=\sum_{i=1}^{N}(1-J)^2$达到极小以定出系数$a_1$，$a_2$，…，$a_m$.

在具体算例中，我们对系数a_k（$k=1$，2，…，m）只取了五项.即$m=5$，并取$r_1=0.5$.

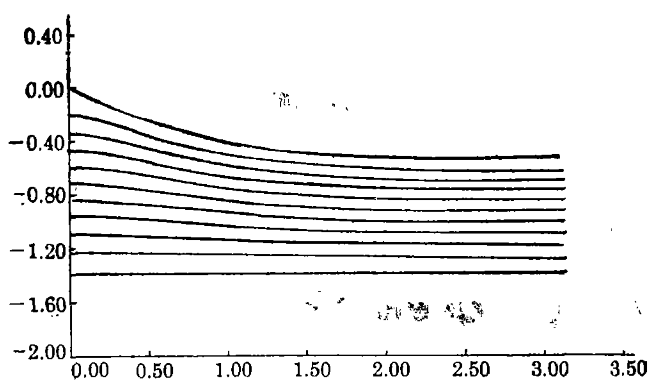


图 3

由于对称性，我们只计算了"u"平面上半个圆周（对应在物理平面即为半个波长的区域.）将此半圆周均分100等份（亦即$N=100$)即$\Delta\theta=\frac{\pi}{100}$．算得：$a_1=2.507388, a_2=-0.158412$, $a_3=-0.017414428$, $a_4=+0.0077478806$, $a_5=0.011524487$并由此绘出流线于图3．如上所述，此流线只画出了半个波长，另一半可由对称得到．图中共画了十一条流线．由图可见，呈现出Stokes波的极限情况：波峰处张角为120°．且最后一条流线为水平直线，即为水面底部．

此一算例在PC/386机上计算仅用了两分钟．

参考文献

[1] Сретенский Л. Н., *Теория Волновых Движений Жидкости*, ОНТИ НКТП СССР (1936).

[2] 陈耀松、田天，Stokes波的优化解法，水动力学研究与进展，4(4)(1989).

The Limiting Stokes Wave with Finite Water Depth

Ma Yu　　Chen Yao-song

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

In this paper we extend the method devloped in[1] for limiting Stokes wave of infinite water depth to cover the case of finite depth. The method has high efficiency and the result is accurate.

Key words Stokes wave, limiting wave, optmization