应用数学和力学，第14卷第8期（1993年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

弹性力学中集中力下的奇异性问题*

王 泉 王大钧

（北京大学力学系，1992年5月4日收到）

摘 要

本文先讨论一类含有δ函数的偏微分方程的奇异性问题。作为此结果的推论，给出集中力作用下各种弹性力学问题的奇异性结果。最后指出振动问题中的相应结论。

关键词 弹性力学 集中力 奇异性

在弹性力学中，研究集中力作用下的奇异性是个很重要的问题，一部分问题可以直接求解[3,6]，如集中力作用于无限半平面的弹性力学解等．还有一些问题可以从模型上简化求解，如圆板的轴对称解等．但很多问题直接去求解来分析奇异性是件繁琐的事情．而且振动理论中[1]研究具有集中质量、弹簧和支承的结构理论的合理性问题直接依赖于力学的奇异性与否．所以给出弹性力学集中力下的奇异性结论是有意义的．本文从分析一类含有δ函数的偏微分方程的奇异性来导出问题的结果．

1． 考虑m维偏微分方程

$$D^n u(\boldsymbol{x})=P(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

其中$(\boldsymbol{x})=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$D^n$为微分算子，它的表达式为

$$D^n=\sum_{a_1}\sum_{a_2}\cdots\sum_{a_m}\frac{\partial^n}{\partial^{a_1}x_{a_1}\partial^{a_2}x_{a_2}\cdots\partial^{a_m}x_{a_m}}$$

a_1，a_2，…，a_m 为为非负整数，且有$\sum_{i=1}^{M}a_i=n$.

对于各种力学问题，a_1，a_2，…，a_m为确定的，并且存在$a_i=n$ （$i=1$，2，…，m）的情形．

设方程（1）的右端顶为

$$P(\boldsymbol{x})=F\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

$\boldsymbol{x}_0$为给定的点，则方程(1)有积分

$$\int_{x_{10}-\varepsilon_1}^{x_{10}+\varepsilon_1}\int_{x_{20}-\varepsilon_2}^{x_{20}+\varepsilon_2}\cdots\int_{x_{m0}-\varepsilon_m}^{x_{m0}+\varepsilon_m}D^n u(\boldsymbol{x})dx_1dx_2\cdots dx_m=F \tag{2}$$

其中ε_1，ε_2，…，ε_m为任意小的数．

---

* 朱照宣推荐．
高等学校博士学科点专项科研基金课题．

以下为讨论方便设：

$$\varepsilon_i=\varepsilon \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

定理 a) 若$n\leqslant m$，则解$u(x)$在点(x_0)是奇异的．

$n<m$时，其奇异性阶数为$O(\varepsilon^{n-m})$．

$n=m$时，其奇异性阶数为$O(\ln\varepsilon)$．

b) 若$n>m$，则$u(x)$在点(x_0)是非奇异的．

这里给出简单的证明：

a) 由(2)知，$D^n u(x)$在(x_0)有$O(1/\varepsilon^m)$的奇异性．设n，$m>2$（如果$n=m=1$，则是简单的推论．）

由Taylor展开式：

$$D^{n-1}u(x_0+\varepsilon)=D^{n-1}u(x_0)+\frac{1}{n!}D^n u(x_0)\cdot\varepsilon+\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}(x_0)\cdot\varepsilon^2+\cdots$$

$$=D^{n-1}u(x_0)+O\left(\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\right)$$

$$D^{m-2}(x_0+\varepsilon)=D^{n-2}u(x_0)+\frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}u(x_0)\cdot\varepsilon+\cdots$$

$$=D^{n-2}u(x_0)+O\left(\frac{1}{\varepsilon^{m-2}}\right)$$

当$n=m$时，有：

$$Du(x_0+\varepsilon)=Du(x_0)+O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

即$Du(x_0)$具有$O(1/\varepsilon)$奇异性．

∴ $u(x_0)$的奇异性为$O(\ln\varepsilon)$．

若$n<m$，则有：

$$u(x_0+\varepsilon)=u(x_0)+O\left(\frac{1}{\varepsilon^{m-n}}\right)$$

∴ $u(x_0)$具有$O(1/\varepsilon^{m-n})$的奇异性．

b) 的结论是显然的．

2. 如上所述，各种力学问题的微分算子D^n是由一些条件限定的．且存在$a_i=n(i=1, 2, \cdots, m)$的情形．但从奇异性角度分析，定理的结论仍是成立的．下面给出集中力作用下弹性力学奇异性问题的结论．

(1) 弦问题

方程为：$T\dfrac{d^2u}{dx^2}=P(x)$

T为弦的张力．

此微分方程阶数为2，维数是1．由定理知：在集中力作用下，不存在奇异性．

(2) 梁问题

方程为：$EI\dfrac{d^4u}{dx^4}=P(x)$

其中，EI为弹性常数．

此方程阶数为4，维数是1．由定理知：在集中力作用下，不存在奇异性．

(3) 薄膜问题

方程为：$T\Delta u=P(x,y)$

其中，T为张力，Δ为Lapace算子．

方程阶数为2，维数是2．由定理知：在集中力作用下，存在奇异性$O(\ln\varepsilon)$．

（4） 二维弹性力学问题

以平面应力问题计，方程为：

$$\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+X=0$$

$$\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+Y=0$$

其中E，μ为弹性常数．

方程阶数为2，维数是2．由定理知在集中力作用下，存在奇异性为$O(\ln\varepsilon)$．

（5） 三维弹性力学问题

方程为：

$$\frac{E}{z(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial x}+\nabla^2 u\right)+X=0$$

$$\frac{E}{z(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial y}+\nabla^2 v\right)+Y=0$$

$$\frac{E}{z(1+\mu)}\left(\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial z}+\nabla^2 w\right)+Z=0$$

其中 $$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

方程阶数为2，维数是3．由定理知：在集中力作用下，存在奇异性为$O(1/\varepsilon)$．

（6） 板问题

1） Kirchhoff板（不考虑横剪效应）

方程为：$D\nabla^4 W=q(x,y)$

其中$D=Eh^3/12(1-\mu^2)$．$\nabla^4=\nabla^2\nabla^2$，$h$为板厚．

方程阶数为4，维数是2．由定理知：在集中力作用下，不存在奇异性．

2） Reissner板（考虑横剪效应）．

方程为：$D\nabla^4 w=q-D_1\nabla^2 q$ （*）

其中 $$D_1=\frac{h^2}{10}\frac{2-\mu}{1-\mu}$$

处理方程如下

先说明算子∇^{-2}．

若 $\nabla^2 u=f(x,y)$

则我们把u写成： $u=\nabla^{-2}f(x,y)$

即u是∇^{-2}作用于$f(x,y)$的解．就是逆算子意义．

方程(*)两边作用算子∇^{-2}．

$$D\nabla^2 w=\nabla^{-2}q-D_1 q$$

在q为δ函数情况下，$\nabla^{-2}q$为二维Laplace问题的Green函数。形式为$A+B\ln\varepsilon$。

对照定理的证明知：在集中力作用下，存在奇异性为$O(\ln\varepsilon)$。

（7） **壳问题**

不失一般性，以圆柱壳为例，并只说明挠度w的奇异性问题。

1） 壳的无矩理论

方程为：

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\mu}{a}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\varphi}\right)\right]+\frac{(1-\mu)}{2a}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\varphi}+\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{1-\mu^2}{Eh}q_x=0 \tag{a}$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+\frac{1}{a}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\varphi}\right]+\frac{(1-\mu)}{2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{a}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\varphi}\right]+\frac{1-\mu^2}{Eh}q_\varphi=0 \tag{b}$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{w}{a}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{1-\mu^2}{Eh}q_z=0 \tag{c}$$

这里a为柱壳半径，h为壳厚．q_x，q_φ为切向力，q_z为法向力．

方程(c)，关于w阶数为0，维数是2．由定理知，在法向集中力作用下，存在奇异性为$O(1/\varepsilon^2)$．

方程(a)，(b)，关于w阶数为1，维数是2．由定理知，在切向集中力作用下，存在奇异性为$O(1/\varepsilon)$．

2） 壳的有矩理论

方程为：（前两式与无矩理论相同，第三式不同）

$$\frac{1}{a}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)+\left(\frac{h^2}{12}\nabla^4+\frac{1}{a^2}\right)w+\frac{12\mu^2}{Eh}q_z=0 \tag{d}$$

方程(d)，关于w阶数为4，维数是2．由定理知，壳的有矩理论中，法向集集中力不存在奇异性．这一点与无矩理论不同．

（8） **振动问题中的一点说明**

在振动问题中，有一类具有集中质量、弹簧和支承的结构[1]，它的合理性也取决于上面讨论的各种弹性力学的奇异性与否．

本文在写作中，孟庆国博士生给予了很好的建议和帮助，在此表示感谢．

参 考 文 献

[1] 王大钧等，振动问题中具有集中质量、弹簧和支承结构理论的合理性问题，固体力学学报，10(2) (1989)，184—187．

[2] 胡海昌，关于用里兹法求位移等量的收敛条件，力学学报，16(1) (1984)，36—42．

[3] 徐芝纶著，《弹性力学》，人民教育出版社 (1978)．

[4] Fung. Y.C., *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, INC. (1965).

[5] Graff, Karl F., *Wave Motion in Elastic Solids*, Oxford University Press (1975).

Singularity under a Concentrated Force in Elasticity

Wang Quan Wang Da-jun

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

We first discuss singularty problem of a sort of partial differential equation involving δ function. Using this result we then have the answer to various singularity problems in elasticity due to the presentation of a concentrated force. Lastly corresponding conclusions in vibration problem are drawn.

Key words elasticity, concentrated force, singularity