应用数学和力学，第14卷第8期（1993年8月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

用变分方法求解大变形对称弹性力学问题*

赵玉祥　顾祥珍　宋熙太

（洛阳水利工程研究所，1992年1月9日收到）

摘　要

文中以经典力学的数学理论和陈氏定理[1]为基础，用变分的方法[2]求解大变形对称弹性力学问题，得出了以瞬时位形为基准的位能广义变分原理和余能广义变分原理，以及两个变分原理的等价性；此外，还给出了以瞬时位形为基准的动力学问题的广义变分原理。

关键词　动力学　大变形　自变函数　广义变分原理

一、引　　言

目前在抗爆结构的野战工事研究中，轻质高强材料不断地被采用。因此，在理论分析与计算中，对于几何大变形的分析显得十分突出，文中仅就这些问题提出一些研究成果。

非线性弹性问题分为材料的物理非线性和变形的几何非线性，在几何非线性弹性问题中不考虑体矩的影响，称为大变形对称弹性力学问题。变形的几何非线性理论，是研究变形体空间运动与变形的准确的数学理论。在有限变形理论中，形变梯度包括应变张量和转动张量两部分，在经典有限变形理论中，通常采用Green应变张量和 Новожилов 平均整旋角来描述，乘积分解定理是把变换分解成形变与转动乘积的形式；陈至达教授提出新的变换分解定理，是把运动变换分解为应变张量与转动张量的直和形式，并给出了应变张量与转动张量的显示表达式，准确地解决了几何非线性问题中的理论问题。应用陈至达教授的研究成果，1985年曾提出过“大变形对称弹性理论的广义变分原理”[3]。本文是在陈至达教授提出的几何非线性理论的基础上，再次建立以瞬时位形为基准的位能广义变分原理和余能广义变分原理，以及动力学问题的广义变分原理。这些广义变分原理在复杂问题的近似计算中将是非常有用的。

二、符号说明

设一变形体在初始位形上（变形前）占有空间Ω_0，相应的曲线坐标系$\{X\}$的基标矢量与度规张量表示成$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^i$，g_{ij}，g^{ij}；经运动后在实时位形上(变形后)占有空间Ω，与其相应的曲线坐标系$\{x\}$的基标矢量与度规张量表示成$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^i$，g_{ij}，g^{ij}。

* 薛大为推荐。

本文采用拖带坐标系，当变形体发生大变形时，其微元体的体积将发生改变，与之相应的位移矢量、应力张量、应变张量、质量密度等的尺度均因变形而改变，它们本身不是标准物理量纲度量的量值，因此将涉及到把实时位形上的量换算成物理分量的问题，如实时位形上的应力张量σ^{ij}，$\sigma^{i}_{\cdot j}$和应变张量S^{i}_{j}需换算成相应的物理分量$\hat{\sigma}^{ij}$，$\hat{\sigma}^{i}_{\cdot j}$和$\hat{S}^{i}_{j}$。

当变形体发生有限变形时，作用在变形体上的力可能是保守力或非保守力，因此，在研究大变形时，我们以变形体瞬时位形为基准，以能量增率的形式表达变分原理．热力学第一定律是我们研究问题的基础，我们可以证明作用在变形体上的机械力和场力之功率$\dot{W}$等于变形体宏观动能的增率$\dot{K}$，变形能的增率$\dot{\psi}$之和，即

$$\dot{K}+\dot{\psi}=\dot{W} \tag{2.1}$$

本文以实时位形（在g_i，g^i系）为基准，在任意平面曲线正交系和空间曲线正交系中，应力张量$\sigma^{i}_{\cdot j}$和应变张量增率$\dot{S}^{j}_{i}$之积等于其相应的物理分量之积，即

$$\sigma^{i}_{\cdot j}\dot{S}^{j}_{i}=\hat{\sigma}^{i}_{\cdot j}\dot{\hat{S}}^{j}_{i} \tag{2.2}$$

当不考虑体矩$\boldsymbol{m}$时（m^{i}_{j}为矢量$\boldsymbol{m}$的二阶混合张量分量），由方程

$$\sigma^{i}_{\cdot j}-\sigma^{\cdot i}_{j}+\rho m^{i}_{j}=0 \tag{2.3}$$

可求得应力张量的对称条件．

此外，为了研究的方便，我们还假设弹性体的表面力$\bar{P}_j$和体力ρf_j不随时间变化．

对于各向同性的弹性体，其应力一应变关系（物性方程）为

$$\sigma^{i}_{j}=2G\left(S^{i}_{j}+\frac{\nu}{1-2\nu}S^{k}_{k}\delta^{i}_{j}\right) \tag{2.4}$$

$$S^{i}_{j}=\frac{1}{2G}\left(\sigma^{i}_{j}-\frac{\nu}{1+\nu}\sigma^{k}_{k}\delta^{i}_{j}\right) \tag{2.5}$$

其中：ν是泊松比，$G=E/2(1+\nu)$是剪切模量，E是弹性模量，δ^{i}_{j}为Kronecker符号．

任一矢量（如位移）沿任一空间曲线x^k的协变导数（在g_i，g^i系）为

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^k}=u^i\|_k \boldsymbol{g}_i \tag{2.6}$$

其中$u^i\|_k$是一阶逆变分量u^i对x^k的协变导数，可表示成沿坐标x^k的变化部分与因坐标系的扭曲而影响的部分之和，即

$$u^i\|_k=\frac{\partial u^i}{\partial x^k}+\Gamma^{i}_{lk}u^l \tag{2.7}$$

式中：Γ^{i}_{lk}为Christoffel第二类记号．

三、运动几何方程

弹性变形体中一点的位移矢量u，可在拖带系中沿初始（未变形）位形坐标线切向方向确定的三个协变基标矢量$\mathring{g}_i$（$i=1,2,3$）上分解，也可在实时（变形后）位形坐标线切向方向确定的三个协变基标矢量g_i上进行分解，即$\boldsymbol{u}=u^i\mathring{\boldsymbol{g}}_i=u^i\boldsymbol{g}_i$．当变形体做一般空间运动时，基标矢量由$\mathring{g}_i$到$g_i$的变换关系由下式给出

$$\boldsymbol{g}_i=F^{j}_{i}\mathring{\boldsymbol{g}}_j \tag{3.1}$$

其中F称为形变梯度，它包含应变张量$S(S=S^T)$和转动张量$R(RR^T=I)$两部份．

形变梯度的分解有多种，较常用的极分解为 $F=RU$，或 $F=VR$，其中 $RR^T=I$，$U=U^T$ 为右伸张张量，$V=V^T$ 为左伸张张量；在三维问题中，因形变与转动的联合结果与次序有关，解是非唯一的。目前在求三维应变分量与转动分量时，只有 Biot 的近似式，应用不方便。

本文采用陈至达教授提出来的 S—R 分解定理，该定理是将形变梯度分为正交转动张量和对称应变张量的直和，即 $F=S+R$，其中应变张量的解析表达式为

$$S^i_j=(u^i|_j+u^i|^*_j)/2-L_k^{\cdot i}L_j^{\cdot k}(1-\cos\vartheta) \tag{3.2}$$

在一点的平均整旋角为

$$\vartheta=\pm\arcsin\left\{\frac{1}{2}[(u^1|_2-u^1|^*_2)^2+(u^2|_3-u^2|^*_3)^2+(u^3|_1-u^3|^*_1)^2]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{3.3}$$

转动轴的方向余弦为

$$L_j^{\cdot i}=\frac{1}{2\sin\vartheta}(u^i|_j-u^i|^*_j) \tag{3.4}$$

上面诸式中各量的物理分量为

$$\hat{u}^i|_j=\sqrt{g_{(ii)}/g_{(jj)}}\,u^i|_j \tag{3.5}$$

$$\hat{S}^i_j=(\hat{u}^i|_j+\hat{u}^i|^*_j)/2-\hat{L}_k^{\cdot i}\hat{L}_j^{\cdot k}(1-\cos\vartheta) \tag{3.6}$$

$$\vartheta=\pm\arcsin\left\{\frac{1}{2}[(\hat{u}^1|_2-\hat{u}^1|^*_2)^2+(\hat{u}^2|_3-\hat{u}^2|^*_3)^2+(\hat{u}^3|_1-\hat{u}^3|^*_1)^2]^{\frac{1}{2}}\right\} \tag{3.7}$$

$$\hat{L}_j^{\cdot i}=\frac{1}{2\sin\vartheta}(\hat{u}^i|_j-\hat{u}^i|^*_j) \tag{3.8}$$

式中 * 表示转置。

由于参考位形是相对的概念，我们可取瞬时的拖带系 g_i 为基准，比较基标矢量经无穷小时间间隔后的变化，可得到变形体运动时，速度、角速度与应变速率的协调方程。

$$v^i\|_j=L_j^{\cdot i}\dot{\vartheta}+\dot{S}^i_j \tag{3.9}$$

$$\dot{S}^i_j=(v^i\|_j+v^i\|^*_j)/2 \tag{3.10}$$

$$L_j^{\cdot i}\dot{\vartheta}=(v^i\|_j-v^i\|^*_j)/2 \tag{3.11}$$

其中各量的物理分量为

$$\hat{v}^i\|_j=\sqrt{g_{(ii)}/g_{(jj)}}\,v^i\|_j \tag{3.12}$$

$$\hat{\dot{S}}^i_j=(\hat{v}^i\|_j+\hat{v}^i\|^*_j)/2 \tag{3.13}$$

式中：v^i 是速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 的上标一阶逆变分量，$\|_j$ 表示变形后拖带量对拖带坐标 x^j 的协变导数。

四、应力张量及平衡方程

在拖带系中，作用在变形体实时位形上的应力张量 σ^{ij}，$\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}$ 是在变形后的基标矢量 $\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^i$ 所构成的平面上定义的应力，由于此时的单位面积尺度因变形而改变，其应力并非通常习惯上所指的单位面积上的应力，因此，必须将实时位形上（在 $\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^i$ 系）的应力张量 σ^{ij}，$\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}$ 换算成相应的物理分量 $\hat{\sigma}^{ij}$，$\hat{\sigma}^{\cdot i}_{\cdot j}$，$\hat{\sigma}^{ij}$，$\hat{\sigma}^{\cdot i}_{\cdot j}$ 才是在 $\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^i$ 系中指定方位上的单位面积上的作用力。其换算关系如下

$$\hat{\sigma}^{ij}=\sigma^{ij}\sqrt{g_{(jj)}/g^{(ii)}},\qquad \hat{\sigma}^{\cdot i}_{\cdot j}=\sigma^{\cdot i}_{\cdot j}\sqrt{g^{(jj)}/g^{(ii)}} \tag{4.1}$$

当体矩m为零时，应力张量是对称的

$$\sigma^{ij}=\sigma^{ji}, \qquad \sigma^{i}_{\cdot j}=\sigma_{j}^{\cdot i} \tag{4.2}$$

有限变形弹性力学的平衡运动方程是

$$\rho W^{j}-\sigma^{ij}\|_{i}+\rho f^{j}=0 \tag{4.3a}$$

或

$$\rho W_{j}-\sigma^{i}_{\cdot j}\|_{i}+\rho f_{j}=0 \tag{4.3b}$$

式中：W_j，W^j分别为加速度矢量的协变与逆变分量(在$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^i$系)。

拖带系初始位移上(在$\mathring{\boldsymbol{g}}_i$，$\mathring{\boldsymbol{g}}^i$系)单位微元体积的质量$\rho_0$，与实时位形上(在$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^i$系)的质量$\rho$之间遵守质量守恒定律

$$\rho\sqrt{g}=\rho_0\sqrt{g_0} \tag{4.4}$$

式中　$g=|g_{ij}|$；　$g_0=|\mathring{g}_{ij}|$

在实时位形上，变形体表面上的已知作用力$\boldsymbol{P}_j$和应力张量存在着下列的平衡关系

$$\boldsymbol{P}_j=\sigma^{i}_{\cdot j}n_i, \qquad \boldsymbol{P}^j=\sigma^{ij}n_i \tag{4.5}$$

n_i是在$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{g}^i$系中，变形体表面S外法线单位矢量的协变分量。

五、弹性力学大变形问题的变分原理

在几何大变形问题中，作用在变形体上的一些力可能是保守的或非保守的。为此，在研究弹性力学大变形问题的变分原理时，我们以瞬时位形为基准，采取增率的形式，即在物体运动的每一瞬时，能量关系公式均成立、同时我们假设体矩$m=0$，以及弹性体的表面力和体力是不随时间变化的。

1. 以瞬时位形为基准的位能广义变分原理

以瞬时位形为基准的位能广义变分原理：设$\sigma^{i}_{\cdot j}$，$\dot{S}^{j}_{i}$，v^j，$\dot{\vartheta}$为不受任何限制的自变函数，则弹性力学大变形问题的精确解使泛函(5.1)取驻值。

$$\dot{\Pi}_p=\int_\Omega(\dot{S}^{j}_{i}-v^j\|_i+L_i^{\cdot j}\dot{\vartheta})\,\sigma^{i}_{\cdot j}d\Omega+\int_\Omega\rho f_j v^j d\Omega+\int_{S_u}(v^j-\bar{v}^j)\sigma^{i}_{\cdot j}n_i dS$$
$$+\int_{S_p}\bar{P}_j v^j dS \tag{5.1}$$

对(5.1)式取变分

$$\delta\dot{\Pi}_p=\int_\Omega(\dot{S}^{j}_{i}-v^j\|_i+L_i^{\cdot j}\dot{\vartheta})\,\delta\sigma^{i}_{\cdot j}d\Omega+\int_\Omega\sigma^{i}_{\cdot j}[\delta\dot{S}^{j}_{i}-\delta(v^j\|_i)+\delta(L_i^{\cdot j}\dot{\vartheta})]d\Omega$$
$$+\int_\Omega\rho f_j\delta v^j d\Omega+\int_{S_u}(v^j-\bar{v}^j)\delta(\sigma^{i}_{\cdot j}n_i)dS+\int_{S_u}\sigma^{i}_{\cdot j}n_i\delta v^j dS+\int_{S_p}\boldsymbol{P}_j\delta v^j dS \tag{5.2}$$

利用Green公式

$$-\int_\Omega\sigma^{i}_{\cdot j}\,\delta(v^j\|_i)d\Omega=-\int_{S=S_p+S_u}\sigma^{i}_{\cdot j}n_i\delta v^j dS+\int_\Omega\sigma^{i}_{\cdot j}\|_i\delta v^j d\Omega$$

将其代入(5.2)中，整理后得

$$\delta\dot{\Pi}_p=\int_\Omega(\dot{S}^{j}_{i}-v^j\|_i+L_i^{\cdot j}\dot{\vartheta})\,\delta\sigma^{i}_{\cdot j}\,d\Omega+\int_\Omega\frac{1}{2}\,(\sigma^{i}_{\cdot j}-\sigma^{\cdot i}_{j})\delta(\dot{S}^{j}_{i}+L_i^{\cdot j}\quad)d\Omega$$

$$+\int_\Omega(\sigma^{i}_{\cdot j}\|_i+\rho f_j)\delta v^j d\Omega+\int_{S_u}(v^j-\bar{v}^j)\delta(\sigma^{i}_{\cdot j}n_i)dS$$

$$-\int_{S_p}(\sigma^i{}_j n_i-\bar{P}_j)\delta v^j dS \tag{5.3}$$

由$\delta\dot{\Pi}_p=0$，可得

$$\sigma^i{}_j\|_i+\rho f_j=0 \qquad (在\Omega内) \tag{5.4}$$

$$\sigma^i{}_j-\sigma^{i*}_j=0 \qquad (在\Omega内) \tag{5.5}$$

$$\dot{S}^i_j-v^j\|_i+L_i{}^j\dot{\vartheta}=0 \qquad (在\Omega内) \tag{5.6}$$

$$v^j-\bar{v}^j=0 \qquad (在S_u上) \tag{5.7}$$

$$\sigma^i{}_j n_i-\bar{P}_j=0 \qquad (在S_p上) \tag{5.8}$$

由上述结果可以看到，泛函(5.1)式取驻值可得到：(1)静力平衡方程；(2)在体矩$m^i_j=0$时，应力张量的对称条件；(3)速度、角速度与应变速率之间的协调条件；(4)在位移边界S_u上，变形速度和已知速度的相容条件；(5)在力边界S_p上，表面力的平衡条件．也就是说，由泛函(5.1)式取驻值，可以导出弹性力学大变形问题的全部方程，从而位能广义变分原理得证．

上述的变分原理是从弹性体的虚功率原理出发的，对材料的物性方程并没有限制条件，所以对于应力应变关系取成物理线性与非线性的物质都适用．

2. 以瞬时位形为基准的余能广义变分原理

以瞬时位形为基准的余能广义变分原理：设$\sigma^i{}_j$，$\dot{S}^i_j$，v^j，$\dot{\vartheta}$为不受任何限制的自变函数，则弹性力学大变形问题的精确解使泛函(5.9)取驻值．

$$\dot{\Pi}_c=\int_\Omega(\dot{S}^i_j+L_i{}^j\dot{\vartheta})\,\sigma^i{}_j\,d\Omega+\int_\Omega(\sigma^i{}_j\|_i+\rho f_j)v^j d\Omega-\int_{S_p}(\sigma^i{}_j n_i-\bar{P}_j)v^j dS$$
$$-\int_{S_u}\sigma^i{}_j n_i\bar{v}^j dS \tag{5.9}$$

对(5.9)式取变分

$$\delta\dot{\Pi}_c=\int_\Omega(\dot{S}^i_j+L_i{}^j\dot{\vartheta})\,\delta\sigma^i{}_j\,d\Omega+\int_\Omega\sigma^i{}_j\,\delta(\dot{S}^i_j+L_i{}^j\dot{\vartheta})d\Omega+\int_\Omega(\sigma^i{}_j\|_i+\rho f_j)\delta v^j d\Omega$$
$$+\int_\Omega v^j\delta(\sigma^i{}_j\|_i)d\Omega-\int_{S_p}(\sigma^i{}_j n_i-\bar{P}_j)\delta v^j dS-\int_{S_p}v^j\delta(\sigma^i{}_j n_i)dS$$
$$-\int_{S_u}\bar{v}^j\delta(\sigma^i{}_j n_i)dS \tag{5.10}$$

由于

$$\int_\Omega v^j\delta(\sigma^i{}_j\|_i)d\Omega=\int_{S=S_p+S_u}v^j\delta(\sigma^i{}_j n_i)dS-\int_\Omega v^j\|_i\delta\sigma^i{}_j\,d\Omega$$

将其代入(5.10)式中，整理后可得

$$\delta\dot{\Pi}_c=\int_\Omega(\sigma^i{}_j\|_i+\rho f_j)\delta v^j d\Omega+\int_\Omega(\dot{S}^i_j-v^j\|_i+L_i{}^j\dot{\vartheta})\,\delta\sigma^i{}_j\,d\Omega$$
$$+\int_\Omega\frac{1}{2}(\sigma^i{}_j-\sigma^{i*}_j)\delta(\dot{S}^i_j+L_i{}^j\dot{\vartheta})d\Omega-\int_{S_p}(\sigma^i{}_j n_i-\bar{P}_j)\delta v^j dS$$
$$+\int_{S_u}(v^j-\bar{v}^j)\delta(\sigma^i{}_j n_i)dS \tag{5.11}$$

由$\delta\dot{\Pi}_c=0$，可得

$$\sigma^{i}_{\cdot j}\|_i+\rho f_j=0 \qquad (在\Omega内) \tag{5.12}$$

$$\sigma^{i}_{\cdot j}-\sigma^{i*}_{\cdot j}=0 \qquad (在\Omega内) \tag{5.13}$$

$$\dot{S}^{j}_{i}-v^j\|_i+L^{\cdot j}_{i\cdot}\dot{\vartheta}=0 \qquad (在\Omega内) \tag{5.14}$$

$$v^j-\bar{v}^j=0 \qquad (在S_u上) \tag{5.15}$$

$$\sigma^{i}_{\cdot j}n_i-\bar{P}_j=0 \qquad (在S_p上) \tag{5.16}$$

由上述可见，由泛函(5.9)式取驻值，可以导出弹性力学大变形问题的全部方程，从而余能广义变分原理得证。

3. 以瞬时位形为基准，位能广义变分原理与余能广义变分原理的等价性

由

$$\dot{\Pi}_p-\dot{\Pi}_c=-\int_\Omega v^j\|_i\sigma^{i}_{\cdot j}\,d\Omega-\int_\Omega\sigma^{i}_{\cdot j}\|_i v^j d\Omega+\int_{S_u}v^j\sigma^{i}_{\cdot j}n_i dS+\int_{S_p}v^j\sigma^{i}_{\cdot j}n_i dS \tag{5.17}$$

因为

$$-\int_\Omega v^j\|_i\sigma^{i}_{\cdot j}\,d\Omega=-\int_{S=S_p+S_u}v^j\sigma^{i}_{\cdot j}n_i dS+\int_\Omega\sigma^{i}_{\cdot j}\|_i v^j d\Omega$$

将其代入(5.17)式中，可得

$$\dot{\Pi}_p-\dot{\Pi}_c=0 \tag{5.18}$$

从而证明了以瞬时位形为基准，位能广义泛函$\dot{\Pi}_p$与余能广义泛函$\dot{\Pi}_c$的等价性。

4. 以瞬时位形为基准的动力学问题广义变分原理

大变形动力学问题的广义变分原理：设$\sigma^{i}_{\cdot j}$，$\dot{S}^{j}_{i}$，v^j，$\dot{\vartheta}$为不受任何限制的自变函数，则弹性力学大变形动力学问题的精确解使泛函(5.19)和(5.20)取驻值。

$$\dot{\Pi}_{kp}=\int_\Omega(\dot{S}^{j}_{i}-v^j\|_i+L^{\cdot j}_{i\cdot}\dot{\vartheta})\,\sigma^{i}_{\cdot j}\,d\Omega+\int_\Omega(Pf_j-\rho w_j)v^j d\Omega$$

$$+\int_{S_u}(v^j-\bar{v}^j)\sigma^{i}_{\cdot j}n_i dS+\int_{S_p}\bar{P}_j v^j dS \tag{5.19}$$

$$\dot{\Pi}_{kc}=\int_\Omega(\dot{S}^{j}_{i}+L^{\cdot j}_{i\cdot}\dot{\vartheta})\,\sigma^{i}_{\cdot j}\,d\Omega+\int_\Omega(\sigma^{i}_{\cdot j}\|_i+\rho f_j-\rho w_j)v^j d\Omega$$

$$-\int_{S_p}(\sigma^{i}_{\cdot j}n_i-\bar{P}_j)v^j dS-\int_{S_u}\sigma^{i}_{\cdot j}n_i\bar{v}^j dS \tag{5.20}$$

上述大变形动力学问题的广义变分原理的证明是显而易见的；同时也可容易地证明$\dot{\Pi}_{kp}-\dot{\Pi}_{kc}=0$。

弹性力学大变形问题的广义变分原理用于近似计算是很方便的，这是因为容许的自变函数$\sigma^{i}_{\cdot j}$，$\dot{S}^{j}_{i}$，v^j，$\dot{\vartheta}$的选取不受任何限制，所有的约束条件都是通过变分近似地得到满足的，这就克服了应用非广义变分原理时，自变函数在选取时必须满足约束条件的困难。当然，自变函数选取得好坏，将对计算结果的精度是有影响的。

参考文献

[1] 陈至达，《有理力学》，中国矿业学院研究生部 (1980).
[2] 钱伟长，《变分法及有限元》，科学出版社 (1980).

[3] 赵玉祥、顾祥珍，大变形对称弹性理论的广义变分原理，《国际非线性力学会议论文集》(1985).

Large Deformation Symmetrical Elasticity Problems Solved by the Variational Method

Zhao Yu-xiang Gu Xiang-zhen Song Xi-tai

(Luoyang Institute of Hydraulic Engineering, Luoyang, He'nan)

Abstract

In this paper, based on the mathematical theory of classical mechanics and Chen's theorem[1], the variational method[2] is used in the study of large deformation symmetrical elasticity problems. The generalized variational principles of potential energy and complementary energy based on the instantaneous configularation are obtained, and the equivalence between the two principles is proved. Besides, the generalized variational principles of dynamical problems based on the instantaneous configuration are also given.

Key words dynamics, large deformation, independent function, generalized variational principle