应用数学和力学，第14卷第8期（1993年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

控制系统中的分形*

程 代 展

（中科院系统科学研究所，1992年4月30日收到）

摘　要

本文将整数维与分形的Hausdorff测度引入并应用于控制系统，同时也介绍了准自相似集这个新概念，证明了这种集合的存在性与唯一性。并将计算自相似集维数的公式推广到准自相似集，在此基础上，说明了控制系统的可达集可以具有分数维。表明在分析非线性系统可控性与可观性时，分形几何学也将是一种有意义的工具。

关键词　分形　准自相似　分数维　可达集

一、引　言

考虑系统

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}=Ax+Bu, \quad x\in \mathbf{R}^n,\ u\in \mathbf{R}^m \\ &y=Cx, \quad y\in \mathbf{R}^p \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

可知[1]它的可控子空间可表示为

$$R=\mathrm{span}\{B,\ AB,\ \cdots,\ A^{n-1}B\} \tag{1.2}$$

易知，它是$\mathbf{R}^n$的一个子空间．粗略地说，R是Ax与B不断相互作用而产生的一系列子空间B，AB，A^2B，…生成的．在每一次作用后要么在原有的可控子空间上加上新的可控子空间，要么就保持原状，可观性与此类似．

类似地，考虑非线性系统

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}=f(x)+\sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i, \quad x\in M \\ &y=h(x), \quad y\in N \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

它的可控性可由可控性秩条件[2]来描述，即

$$R=\{f\cdot g_i\}_{LA} \tag{1.4}$$

这是线性情况(1.2)的一种推广．

类似于线性系统的讨论，每一次，$f(x)$与$g(x)$相互作用，即$ad_f g_i$，$ad_f^2 g_i$，…或$ad_f ad_{g_i} g_j$等之间进行李括号，逐渐生成R．但是由于由李括号生成的新的向量场可能是奇异的，或者

* 朱照宣推荐．

说，不一定每次都能生成“完整”的TM的子空间（这里TM是状态流形M的切空间）.而且，即使每次都能生成非奇异（带有整数维或零维）的向量场，可达子流形也可能仍不能以整数维的方式增长，原因是可控性李代数可能不是对合的.

因此，考虑非线性系统的可达集时，普通的子流形的描述方式对一些较为一般的情况可能不适用，而必须涉及到分形的结构. 利用分形等概念，可知控制系统的可达集及可观集都可能具有分数维.

即使讨论线性情况，当控制集受到约束时（如 bang-bang 控制），可达集仍能具有分数维.

本文的目的是探索描述控制系统可控程度的新方法，实际上，还有许多工作需要进一步完成.

二、Hausdorff 测度

近年来，分形在科学中显得越来越重要，已被用于解释分析大量的科学现象，如布朗运动、湍流、浑沌吸引子等等[3,4,5]. 而 Hausdoff 测度就是描述分数维的一种有力的工具，本节先引入一些有关的基本概念，以备后面讨论.

定义2.1 设$U\subset \mathbf{R}^n$是一非空集，U的直径定义为

$$|U|=\sup\{|x-y| \mid x,\ y\in U\}$$

如果集合E满足

$$E\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \quad 和 0<|U_i|\leqslant\delta \quad \forall i$$

我们称$\{U_i\}$是一个E的δ覆盖(cover)。令$E\subset\mathbf{R}^n$，$s\geqslant 0$，对$\delta>0$定义

$$H_\delta^s(E)=\inf_{\delta\text{-cover}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s\right) \tag{2.1}$$

易知$H_\delta^s(E)$随δ下降而增长，因此可定义

$$H^s(E)=\lim_{\delta\to 0}H_\delta^s(E)=\sup H_\delta^s(E) \tag{2.2}$$

这被称为 Hausdorff s维外测度.

一些有关 Hausdoff s维外测度的性质以命题形式给出.

命题2.1

i) H^s是一个外测度，且H^s可测集的σ域包含 Borel 集合.

ii) 如果对$E\subset\mathbf{R}^n$，$0<H^t(E)<\infty$，那么

$$H^s(E)=\infty \qquad s<t$$

$$H^s(E)=0 \qquad \delta>t$$

iii) 令$s=n$为整数，那么

$$H^n(E)=\frac{2^n\Gamma(n/2+1)}{\pi^{n/2}}L^n(E)$$

这里$L^n(E)$是 n 维 Lebesgue 测定，Γ是Γ-函数，

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

外测度μ是正规的，如果对每个集A，都存在一个μ可测集E包含A，且$\mu(E)=\mu(A)$在度量空间(X, d)中，外测度μ被称为度量外测度，如果$\mu(E\cup F)=\mu(E)+\mu(F)$. 这里要求

$$d(E, F)=\inf\{d(x, y)\mid x\in E, y\in F\}>0$$

命题2.2　Hausdorff 外测度是正规度量外测度。

因为本文只讨论 Borel 集，且大多是F_σ（闭集的可数并）或G_δ（F_σ的补集），下面就简单称H^s为s维 Hausdorff 测度。

三、准自相似集

映射$\Psi: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$被称为压缩映射，如果

$$\|\Psi(y)-\Psi(x)\|\leqslant c\|y-x\|$$

对所有的x，$y\in\mathbf{R}^n$成立，其中$c<1$.

定义3.1[3]　集合$E\subset\mathbf{R}^n$是对一组压缩映射Ψ_1，Ψ_2，…，Ψ_m不变的，如果

$$E=\bigcup_{i=1}^{m}\Psi_i(E)$$

另外，如果这些压缩映射都是相似的，且对某个s，有

$$H^s(E)>0, \quad H^s(\Psi_i(E)\cap\Psi_j(E))=0, \qquad i\neq j$$

那么E则称为自相似集.

比如 Cantor 集E就是一个简单的自相似集，令$E_0=[0, 1]$，E_{j+1}由去掉E_j中每个区间上中间的三分之一的开子区间构成（$\Psi_1(x)=x/3$，$\Psi_2(x)=(x+2)/3$），这是Cantor集可表示为

$$E=\bigcap_{j=1}^{\infty}E_j$$

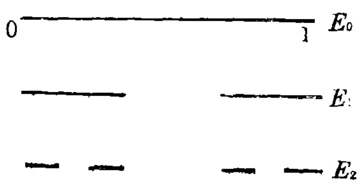


图1　Cantor集

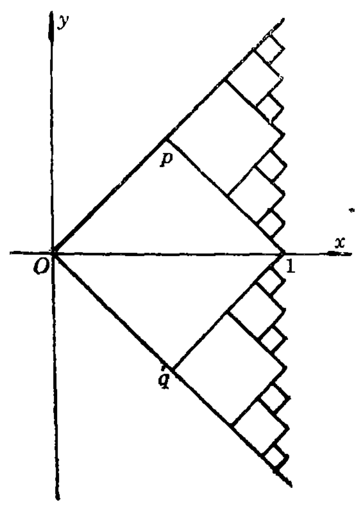


图2　准自相似集

在许多实际问题中，我们可发现一些很象但又不完全自相似的集合，比如图2. 图形并不是自相似集，因为整个图形不能分成有限个与原整图形相似的部分.

例3.1　通过分析图2，可以看出，在

$$\left.\begin{aligned}\Psi_1: (x, y)&\mapsto\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right)\\ \Psi_2: (x, y)&\mapsto\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}\right)\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

两个压缩映象作用后，留下一个剩余A，它由两个线段Op和Oq构成：

$$A=(\overline{Op})\cup(\overline{Oq})$$

其实，另外还有如植物的生长等许多类似的例子反映了这种结构，下面给出其定义.

定义3.2 集合$E\subset \mathbf{R}^n$称为准自相似集，如果有压缩映射Ψ_1，Ψ_2，…，Ψ_m和紧集$A\subset\mathbf{R}^n$使得

i) $E=\bigcup\limits_{i=0}^{m}\Psi_i(E)$

其中Ψ_0：$\mathbf{R}^n\to A$是变形限制映射[6]；

ii) $\Psi_i(E)$与E相似，$i=1,\ 2,\ \cdots m$；

iii) $H^s(E)>0$；$H^s(A)=0$

$$H^s(\Psi_i(E)\cap\Psi_j(E))=0 \qquad i\neq j$$

集合A称作准自相似集E的残余，且假定是连通的.

命题3.1 设A是准自相似集的残余，则A是单连通的.

证明 由于Ψ_0：$\mathbf{R}^n\to A$是变形限制，那么Ψ_0引出基本群$\pi_1(A,\ a)$到$\pi_1(\mathbf{R}^n,\ a)$的一个同构[6]. 现在因$\mathbf{R}^n$单连通，即$\pi_1(\mathbf{R}^n,\ a)$是平凡的，于是$\pi_1(A,\ a)$也是. 由假设A是连通，A是单连通.

定义3.3[ ] 如果$E\subset\mathbf{R}^n$，E的δ平行体定义为

$$[E]_\delta=\inf\{x\in\mathbf{R}^n|\inf_{y\in E}|x-y|\leqslant\delta\}$$

而 Hausdorff 度量d为

$$d(E,\ F)=\inf\{\delta|E\subset[F]_\delta;\ F\subset[E]_\delta\}$$

定理3.1[3] 令C是在有界$B\subset\mathbf{R}^n$中非空紧集的无限集合，那么就存在一列C中的互不相交集$\{E_i\}$在 Hausdorff 度量意义收敛到一个非空紧集E，且

$$E=\bigcap_{j=1}^{\infty}\left(\overline{\bigcup_{i=j}^{\infty}E_i}\right) \tag{3.2}$$

下面证明准相似集的存在与唯一性定理.

定理3.2 给定变形限制Ψ_0：$\mathbf{R}^n\to A$和压缩映射Ψ_1，…，Ψ_m，那么存在唯一集$E\subset\mathbf{R}^n$对$\Psi=(\Psi_0,\ \cdots,\ \Psi_m)$不变，而且若$F\supset A$是任一紧集，那么$\Psi^k(F)$在 Hausdorff 意义下当$k\to\infty$时收敛到$E$。

证明 考虑

$$S=\{E\in C|E\supset A\}$$

在其上定义Hausdorff度量. 由(3.2)可看出，它是C的一个完备的度量子空间. 如果$\{E_j\}$是S的 Cauchy 序列，则(3.2)蕴涵极限集$E\in S$.

令A_i，$B_i\in C$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$。如果$A_i\subset[B_i]_\delta$那么

$$A_i\subset\left[\bigcup_{i=1}^{m}B_i\right]_\delta \qquad (i=1,\ \cdots,\ m)$$

因此

$$\bigcup_{i=1}^{m}A_i\subset\left[\bigcup_{i=1}^{m}B_i\right]_\delta$$

于是有

$$d\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i,\ \bigcup_{i=1}^{m} B_i\right)\leqslant\max_i d(A_i,\ B_i) \tag{3.3}$$

考虑任两个集合F_1，$F_2\in S$，由(3.3)和$\Psi_0(F_1)=\Psi_0(F_2)$，可得

$$d(\Psi(F_1),\ \Psi(F_2))=d\left(\bigcup_{i=0}^{m}\Psi(F_1),\ \bigcup_{i=0}^{m}\Psi(F_2)\right)$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m} d(\Psi_i(F_1)\Psi_i(F_2))\leqslant(\max_{1\leqslant i\leqslant m} c_i)d(F_1,\ F_2) \tag{3.4}$$

其中c_i为Ψ_i收缩的系数．即

$$\|\Psi_i(x)-\Psi_j(y)\|\leqslant c_i\|x-y\|,\qquad x,\ y\in\mathbf{R}^n$$

利用(3.4)和压缩映射定理可知存在一个唯一的$E\in S$使得$\Psi(E)=E$

对任意集合$F\in S$，

$$d(\Psi^k(F),\ E)=d(\Psi^k(F),\ \Psi^k(E))\leqslant(\max_{1\leqslant i\leqslant m} c_i)^k d(F,\ E)$$

因此，$\Psi^k(F)\to E$　当$k\to\infty$时，

下面证明本文的主要定理．

定理3.3　由定义3.2定义的准自相似集E的维数满足如下方程：

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^s=1 \tag{3.5}$$

其中r_i是$\Psi_i(E)$到E的相似率．

证明　由定义，对给定$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使

$$H^s(E)-H_\delta^s(E)<\varepsilon \tag{3.6}$$

因为$H^s(A)=0$，不失一般性，假定

$$H_\delta^s(A)<\varepsilon \tag{3.7}$$

再由定义，可找δ覆盖$\{U_i\}$，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s-H_\delta^s(E)<\varepsilon \tag{3.8}$$

由(3.6)和(3.8)知

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s-H^s(E)\right|<2\varepsilon \tag{3.9}$$

根据相似性，$\{\Psi_j(U_i),\ i=1,\ 2,\ \cdots\}$是$\Psi_j(E)$的$r_j\delta$覆盖，且

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\Psi_j(U_i)|^s-H_{r_j\delta}^s(\Psi_j(E))<r_j^s\varepsilon$$

$$H_\delta^s(\Psi_j(E))\leqslant H_{r_j\delta}^s(\Psi_j(E))\leqslant H^s(\Psi_j(E))$$

$$H^s(\Psi_j(E))-H_\delta^s(\Psi_j(E))\leqslant r_j^s\varepsilon$$

最后有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\Psi_j(U_i)|^s-H_\delta^s(\Psi_j(E))<2r_j^s\varepsilon \tag{3.10}$$

因$H^s(\Psi_i(E)\cap\Psi_j(E))=0$，可取$\delta$使得

$$\left|H^s(E)-\sum_{j=1}^{m} H^s_\delta(\Psi_j(E))-H^s_\delta(A)\right|<\varepsilon \tag{3.11}$$

由(3.10)和(3.11)

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\infty}|\Psi_j(U_i)|^s-H^s(E)\right|\leqslant 2\left(\sum_{j=1}^{m} r_j^s+1\right)\varepsilon$$

或等价地

$$\left|\sum_{j=1}^{m} r_j^s\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s-H^s(E)\right|\leqslant 2\left(\sum_{j=1}^{m} r_j^s+1\right)\varepsilon$$

利用方程(3.9)可知

$$\left|\left(\sum_{j=1}^{m} r_j^s-1\right)H^s(E)\right|\leqslant 2\left(2\sum_{j=1}^{m} r_j^s+1\right)\varepsilon \tag{3.12}$$

因$H^s(E)>0$，$\varepsilon>0$可取充分小，故有

$$\sum_{j=1}^{m} r_j^s=1$$

(3.5)已被用于自相似集[3]．比如，用(3.5)容易算出Cantor 集的维数是$\ln2/\ln3$，因为$r_1=r_2=1/3$。

为计算图 2 中图形的维数，需要下面的推论．

推论3.1 在定义3.2中，用条件

$$0\leqslant H^s(A)<\infty \tag{3.13}$$

来代替$H^s(A)=0$，如果 s 满足(3.5)，则

$$\dim(E)=s$$

证明 假定$0<H^s(A)<\infty$，这时$\dim(E)\geqslant s$．若$\dim(E)=t>s$ 有$H^t(A)=0$，由定理3.3可知：

$$\sum_{i=1}^{m}(r_i)^t=1$$

因此$t=s$，与假设矛盾．故有

$$\dim(E)=s$$

四、对控制系统的应用

本节中，利用第一节中谈到的可控性和可观性，讨论一些具有分维的控制系统的例子．

例4.1 考虑

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda x_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ x_1\\ -x_1\end{pmatrix}u \tag{4.1}$$

取 u 为 bang-bang 控制，即

$$\left.\begin{array}{l} u(t)\in\{-1,\ 0,\ 1\} \\ u(t)=\text{const}, \qquad n\leqslant t<n+1 \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

则 $x_1(t)=x_1(n)e^{-\lambda(t-n)}$

$$x_2(t)=\begin{cases} x_2(n) & u=0 \\ -x_1(n)e^{-\lambda(t-n)}/\lambda+x_2(n) & u=1 \\ x_1(n)e^{-\lambda(t-n)}/\lambda+x_2(n) & u=-1 \end{cases}$$

$$x_3(t)=\begin{cases} x_3(n) & u=0 \\ x_1(n)e^{-\lambda(t-n)}/\lambda+x_3(n) & u=1 \\ -x_1(n)e^{-\lambda(t-n)}/\lambda+x_3(n) & u=-1 \end{cases}$$

$$n\leqslant t\leqslant n+1$$

不难看出可达集是准自相似集，带有 3 个分别对应 $u=1$，$u=0$，$u=-1$的压缩映射

$$\Psi_1(x_1,\ x_2,\ x_3)=\left(e^{-\lambda}x_1,\ x_2-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}x_1,\ x_3+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}x_1\right)$$

$$\Psi_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=(e^{-\lambda}x_1,\ x_2,\ x_3)$$

$$\Psi_3(x_1,\ x_2,\ x_3)=\left(e^{-\lambda}x_1,\ x_2+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}x_1,\ x_3-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}x_1\right)$$

因残余是一维的集合，故可达集的维数应大于等于1．由(3.5)有

$$3e^{-\lambda s}=1 \tag{4.3}$$

当$\lambda\geqslant\ln3$时，$s\leqslant1$于是可达集是一维的($x_1(0)\neq0$)．若$\lambda<\ln3$，我们将在下面讨论．

注4.1 当 $\lambda<\ln3$ 时，若直接套用(4.3)就会得出荒唐的结论．($s=\ln3/\lambda>1$，若 $0<\lambda<\ln3/3$，则 $s>3$)．原因是，这时的 3 个分支之间相互有重迭，且

$$H^s[\psi_i(E)\cap\psi_j(E)]\neq0, \qquad i\neq j$$

为了计算这样的维数，引入以下结果：

命题4.1 对（广义）准自相似集E，假定任 3 个分支 $\Psi_i(E)$，$\Psi_j(E)$和 $\Psi_k(E)$的交集是零H^s-测度的集合．定义重迭系数为

$$\lambda_i=1-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{r_i^s}{r_i^s+r_j^s}\ \frac{H^s(\Psi_i(E)\cap\Psi_j(E))}{H^s(\Psi_i(E))}$$

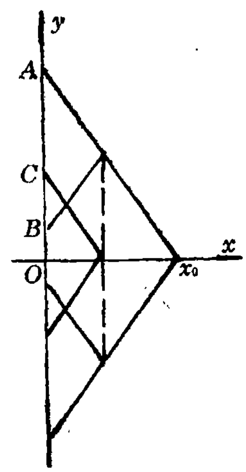
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

那么

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda_j(r_j)^s=1 \tag{4.4}$$

证明与定理 3.3 类似．

接着考虑$\lambda<\ln3$的情况．图 3 表示的是在$y=z$平面上的可达集．易得



$AO=\sqrt{2}\,x_0$

$AB=2\sqrt{2}\,e^{-\lambda}x_0$

$CB=3\sqrt{2}\,e^{-\lambda}x_0-\sqrt{2}\,x_0$

图 3

$$\lambda_1=\lambda_3=1-\frac{3\sqrt{2}\ e^{-\lambda}x_0-\sqrt{2}\,x_0}{4\sqrt{2}\,e^{-\lambda}x_0}=\frac{1+e^{\lambda}}{4}$$

$$\lambda_2=1-\frac{3-e^{\lambda}}{2}=\frac{e^{\lambda}-1}{2}$$

代入(4.4)中，有

$$e^{\lambda}(e^{-\lambda s})=e^{\lambda(1-s)}=1$$

因此，$\lambda<\ln 3$时，可达集的维数还是$s=1$。

例4.2 将前例稍加变动，

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda x_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ x_1\\ 0\end{pmatrix}u_1+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -x_1\end{pmatrix}u_2 \tag{4.5}$$

u_1，u_2都满足(4.2)。为避免重迭，先设$\lambda>\ln 3$类似于例4.1中的讨论，有

$$9e^{-\lambda s}=1$$

当$\lambda\geqslant 2\ln 3$时，可达集的维数是1。而当λ从$2\ln 3$变到$\ln 3$时，相应的维数从1变到2。而对于$\lambda<\ln 3$，可类似上例用(4.4)讨论，知维数仍是2。详细可看表1：

表1

λ	$0<\lambda\leqslant\ln 3$	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.10	$\geqslant 2\ln 3$
s	2	1.23	1.69	1.57	1.46	1.37	1.29	1.22	1.16	1.10	1.05	1

注4.2

1° 前例中，对不同的$x_1(0)\neq 0$，可达集有不同的大小，但维数却一样。

2° 为使可达集R是闭集，定义可达集为有限时间可达集R_F的极限点的集合，即$R=\bar{R}_F$

参 考 文 献

[1] Wonham, M. H., *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer Verlag, Berlin (1979).

[2] Hermann, R. and A. J. Krener, Nonlinear controllability and observability, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-22 (1977), 728—740.

[3] Falconer, K. J., *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge, New York (1985).

[4] Faladin, G. and A. Vulpiani, Anomalous scaling laws in multifractal objects, *Physical Reports(Review Section of Physics Letters)*, 156(4) (1987), 147—225.

[5] Thompson, J. M. T. and H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos, Geometrical Methods for Engineers and Scientisys*, John Wiley & Sons Ltd. (1986).

[6] Massey, W. S., *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag (1987).

Fractal Sets in Control Systems

Cheng Dai-zhan

(Lab. of Managment, Decision and Information, Academia Sinica;
Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper the Hausdorff measure of sets of integral and fractional dimensions is introduced and applied to control systems. A new concept, namely, pseudo-self-similar set is also introduced. The existence and uniqueness of such sets are then proved, and the formula for calculating the dimension of self-similar sets is extended to the psuedo-self-similar case. Using the previous theorem, we show that the reachable set of a control system may have fractional dimensions. We hope that as a new approach the geometry of fractal sets will be a proper tool to analyze the controllability and observability of nonlinear systems.

Key words fractal set, pseudo-self-similar, fractional dimension, reachable set