

# 球体的弹性动力学解和动应力集中现象\*

王 熙

(南京 华东工学院应用力学系, 1992年2月10日收到)

## 摘 要

本文提出了一种解析方法求解球体的弹性动力学问题。将球体弹性动力学基本解, 分解为一个满足给定非齐次混合边界条件的准静态解和一个仅满足齐次混合边界条件的动态解的叠加。利用变量替换将动态解需满足的动态方程变换为贝塞尔方程, 并通过定义一个有限汉克尔变换, 就可以容易地求得非齐次动态方程的动态解, 从而, 得到球体弹性动力学的精确解。从计算结果中可以发现, 在冲击外压作用下的球体圆心处具有动应力集中现象, 并导致很高的动应力峰值, 这对球体的动强度研究有一定的实际意义。

**关键词** 球体 弹性动力学 动应力集中

## 一、引 言

球体在动载作用下的动应力响应和分布规律是一个典型的弹性动力学问题。得到这类问题解析解的关键在于求解一个满足给定的边界条件和初始条件的弹性动力学基本方程。Laplace 变换<sup>[1][2]</sup>可以被用来求解这类问题, 但这种求解过程较复杂, 并且有时对于 Laplace 的反变换是非常困难或是不可能的。球体在外载作用下的动应力响应至今还没有得到充分的研究。

本文将球体的弹性动力学解分解为两个基本解的叠加。一个是满足给定的非齐次混合边界条件的准静态解, 另一个为仅满足齐次混合边界条件的动态解。通过定义一个有限汉克尔变换对动态解应满足的非齐次动态方程进行有限汉克尔变换即可较容易地得到动态解。最终得到所求问题的精确解。

最后, 本文计算了实心球体在突加外载作用下的动应力响应。通过计算特例验证了本文的解是波动解, 具有波的一切特性。从解的解析表达式和计算结果中可以发现球体在突加外载作用下, 在球心处具有动应力集中现象, 并导致该点呈现很高的动应力峰值。值得注意的是球心处的动应力值虽然很大但是一个有限值并无奇异性存在。球心处的动应力响应和球体内其它各点动应力响应一样, 随着应力波在外边界不断地反射作用而产生强烈的周期性的振荡曲线。

本文的主要作用在于提供了一种简便有效的求解方法, 获得了球体的弹性动力学解并揭

\* 钱伟长推荐。

示了球心处存在着动应力集中现象。

## 二、弹性动力学场方程和求解方法

外半径为  $b$  的弹性球体，外表面受到均布的动载荷  $p(t)$ ，它的弹性动力学基本平衡方程为：

$$\frac{\partial^2 U(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U(r,t)}{\partial r} - \frac{2}{r^2} U(r,t) = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 U(r,t)}{\partial t^2} \quad 0 \leq r \leq b, t \geq 0^+ \quad (2.1a)$$

上式中， $U=U(r,t)$  是径向位移， $r$  和  $t$  分别是径向坐标和时间变量。 $V=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$  表示波速，其中  $\lambda$  和  $\mu$  是Lame弹性常数， $\rho$  表示质量密度。

设在时间  $t=0$  的初始时刻，球体具有任意给定的初始条件：

$$U(r,0)=U_0(r), \quad U(r,0),_t=V_0(r) \quad (2.1b)$$

由球心( $r=0$ )位移等于零和外边界( $r=b$ )承受均布的动载  $p(t)$ ，可得用径向位移  $U(r,t)$  表示的混合非齐次边界条件：

$$U(0,t)=0 \quad (2.1c)$$

$$\sigma_r = \left[ (\lambda+2\mu) \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2\lambda}{r} U \right]_{r=b} = p(t) \quad (2.1d)$$

其中， $\sigma_r = \sigma_r(r,t)$  表示径向应力分量。

由位移场、几何关系和物理关系，可得球体动应力的表达式为：

$$\sigma_r(r,t) = (\lambda+2\mu) \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2\lambda}{r} U \quad (2.2a)$$

$$\sigma_\varphi(r,t) = \sigma_\theta(r,t) = \lambda \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2(\lambda+\mu)}{r} U \quad (2.2b)$$

基本方程(2.1)的解  $U(r,t)$  可以表示为一个准静态解  $U_1(r,t)$  和一个准动态解  $U_2(r,t)$  的组合。即

$$U(r,t) = U_1(r,t) + U_2(r,t) \quad (2.3)$$

其中准静态解  $U_1(r,t)$  应满足下面方程和非齐次混合边界条件，

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_1}{\partial r} - \frac{2}{r^2} U_1 = 0 \quad (2.4a)$$

$$U_1(0,t) = 0 \quad (2.4b)$$

$$\left[ (\lambda+2\mu) \frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{2\lambda}{r} U_1 \right]_{r=b} = p(t) \quad (2.4c)$$

方程(2.4a)的通解为

$$U_1(r,t) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r^2} \quad (2.5)$$

将式(2.5)代入非齐次混合边界条件(2.4b~c)，可以求得方程(2.4)的定解为

$$U_1(r,t) = \varphi(r) \cdot p(t) \quad (2.6)$$

其中， $\varphi(r) = r/(3\lambda+2\mu)$

将式(2.3)和式(2.4)代入方程(2.1)，可以得到动态解  $U_2(r,t)$  应满足的非齐次方程、初始条件和相应的齐次混合边界条件。

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_2}{\partial r} - \frac{2}{r^2} U_2 = \frac{1}{V^2} \left[ \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \right] \quad (2.7a)$$

$$U_2(r, 0) = U_0(r), \quad U_2(r, 0),_{,t} = V_0(r) \quad (2.7b)$$

$$U_2(0, t) = 0 \quad (2.7c)$$

$$\left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{2\lambda}{r} U_2 \right]_{r=b} = 0 \quad (2.7d)$$

其中,  $U_1(r, t)$  为式(2.6)所示的已知函数.

$$\text{设} \quad U_2(r, t) = r^{-\frac{1}{2}} f(r, t) \quad (2.8)$$

将式(2.8)代入方程(2.7), 则方程(2.7)可改写为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{(3/2)^2}{r^2} f = \frac{1}{V^2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U_{1,r}}{\partial t^2} \right] \quad (2.9a)$$

$$f(r, 0) = U_{0,r}(r), \quad f(r, 0),_{,t} = V_{0,r}(r) \quad (2.9b)$$

$$\left[ r^{-\frac{1}{2}} f(r, t) \right]_{r=0} = 0 \quad (2.9c)$$

$$\left[ \frac{(\lambda + 2\mu)}{r^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{(3\lambda - 2\mu)}{2r^{3/2}} f \right]_{r=b} = 0 \quad (2.9d)$$

其中,

$$U_{1,r} = r^{\frac{1}{2}} U_1(r, t), \quad U_{0,r} = r^{\frac{1}{2}} U_0(r), \quad V_{0,r} = r^{\frac{1}{2}} V_0(r) \quad (2.10)$$

非齐次方程(2.9a)的齐次式为

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_0}{\partial r} - \frac{(3/2)^2}{r^2} f_0 = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

设

$$f_0 = g(r) e^{i\omega t} \quad (2.12)$$

其中,  $g(r)$  为特征函数,  $\omega$  是固有频率.

将式(2.12)代入式(2.11)可得下式,

$$\frac{d^2 g(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg(r)}{dr} + \left( k - \frac{(3/2)^2}{r^2} \right) g(r) = 0 \quad (2.13)$$

$$\text{上式中,} \quad k = \omega/V \quad (2.14)$$

方程(2.13)是标准贝塞尔方程, 它的通解是

$$g(r) = AJ_{\frac{3}{2}}(kr) + BY_{\frac{3}{2}}(kr) \quad (2.15)$$

其中,  $J_{\frac{3}{2}}(kr)$  和  $Y_{\frac{3}{2}}(kr)$  分别为第一类和第二类  $3/2$  阶贝塞尔函数,  $A$  和  $B$  是待定常数.

式(2.15)应满足边界条件(2.9c), 即

$$\left[ Ar^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(kr) + Br^{-\frac{1}{2}} Y_{\frac{3}{2}}(kr) \right]_{r=0} = 0 \quad (2.16)$$

由贝塞尔函数的性质,

$$\left[ r^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(kr) \right]_{r=0} = 0 \quad (2.17a)$$

$$\left[ r^{-\frac{1}{2}} Y_{\frac{3}{2}}(kr) \right]_{r=0} = -\infty \quad (2.17b)$$

可知式(2.16)成立的充要条件是  $B=0$ . 所以贝塞尔方程(2.13)的解(2.15)可简化为:

$$g(r) = AJ_{\frac{3}{2}}(kr) \quad (2.18)$$

将式(2.18)代入边界条件(2.9d), 可得一系列特征值  $k_n (n=1, 2, \dots, \infty)$  应该满足的特征方程,

$$k_n J'_{\frac{3}{2}}(k_n b) + h J_{\frac{3}{2}}(k_n b) = 0 \quad (2.19)$$

其中,

$$h = \frac{3\lambda - 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)b}$$

式(2.18)可以展成一系列与特征值  $k_n (n=1, 2, \dots, \infty)$  有关的正交级数和, 即

$$g(r) = \sum_{k_n} A_n J_{\frac{3}{2}}(k_n r). \quad (2.20)$$

利用贝塞尔函数的正交性, 由式(2.20)可得

$$A_n = \int_0^b r g(r) J_{\frac{3}{2}}(k_n r) dr / \int_0^b r J_{\frac{3}{2}}^2(k_n r) dr \quad (2.21)$$

若定义

$$\bar{g}(k_n) = H[g(r)] = \int_0^b r g(r) J_{\frac{3}{2}}(k_n r) dr \quad (2.22)$$

为  $g(r)$  的有限Hankel变换<sup>[3]</sup>, 则式(2.20)给出其反变换, 并可表示为

$$g(r) = \sum_{k_n} \frac{\bar{g}(k_n)}{F(k_n)} J_{\frac{3}{2}}(k_n r) \quad (2.23)$$

其中,

$$F(k_n) = \int_0^b r J_{\frac{3}{2}}^2(k_n r) dr = \frac{b^2}{2} \left\{ [J'_{\frac{3}{2}}(k_n b)]^2 + \left[ 1 - \left( \frac{3/2}{k_n b} \right)^2 \right] J_{\frac{3}{2}}^2(k_n b) \right\} \quad (2.24)$$

利用有限Hankel变换定义(2.22)对非齐次动态方程(2.9a)进行有限Hankel变换, 则式(2.9a)变为

$$\begin{aligned} & \frac{b^{3/2}}{(\lambda + 2\mu)} J_{\frac{3}{2}}(k_n b) \left[ \frac{(\lambda + 2\mu)}{b^{1/2}} f'(b) + \frac{(3\lambda - 2\mu)}{2b^{3/2}} f(b) \right] - k_n^2 \bar{f}(k_n) \\ & = \frac{1}{V^2} \left[ \frac{d^2 \bar{f}}{dt^2} + \frac{d^2 \bar{U}_{1r}}{dt^2} \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

其中  $\bar{U}_{1r} = H[r^{\frac{1}{2}} \cdot U_1(r, t)]$  (2.26)

式(2.25)中的  $f(r, t)$  应满足齐次边界条件(2.9d), 因此式(2.25)等式左边第一项恒等于零, 则式(2.25)又可写为

$$-k_n^2 \bar{f}(k_n) = \frac{1}{V^2} \left[ \frac{d^2 \bar{f}}{dt^2} + \frac{d^2 \bar{U}_{1r}}{dt^2} \right] \quad (2.27)$$

对式(2.27)进行Laplace变换, 且利用初始条件(2.9b), 可得

$$\bar{f}^*(k_n) = -\bar{U}_{1r}^* + \frac{w_n^2}{w_n^2 + S^2} \bar{U}_{1r}^* + \frac{S^2}{w_n^2 + S^2} \bar{U}_{0r} + \frac{1}{w_n^2 + S^2} \bar{V}_{0r} \quad (2.28)$$

其中,  $\bar{U}_{0r} = H[r^{\frac{1}{2}} U_0(r)]$ ,  $\bar{V}_{0r} = H[r^{\frac{1}{2}} V_0(r)]$  (2.29)

$S$  表示Laplace变换参量, 对式(2.28)进行Laplace反变换, 并利用卷积定理, 式(2.28)变为

$$\bar{f}(k_n) = -\bar{U}_{1r} + w_n \int_0^t \bar{U}_{1r} \cdot \sin[w_n(t - \tau)] d\tau$$

$$+\bar{U}_{0r}\cos\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\bar{V}_{0r}\sin\omega_n t \quad (2.30)$$

利用有限Hankel反变换定义和式(2.30), 可得

$$f(r,t) = \sum_{k_n} \frac{\bar{f}(k_n)}{F(k_n)} J_{\frac{3}{2}}(k_n r) \quad (2.31)$$

将式(2.31)代入式(2.8)可得准动态解

$$U_2(r,t) = \sum_{k_n} \frac{\bar{f}(k_n)}{F(k_n)} r^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(k_n r) \quad (2.32)$$

将式(2.32)和式(2.6)代入式(2.3)可得基本方程(2.1)的精确解为

$$U(r,t) = \varphi(r) \cdot p(t) + \sum_{k_n} \frac{\bar{f}(k_n)}{F(k_n)} r^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(k_n r) \quad (2.33)$$

将式(2.33)代入式(2.2), 可得球体的动应力表达式。

### 三、实例计算和讨论

在实例计算中, 设球体外表面受到均布的突加压力。即

$$p(t) = -\sigma_0 H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -\sigma_0, & t \geq 0^+ \end{cases} \quad (3.1)$$

设球体在加载前是静止的, 初始条件

$$U(r,0) = \dot{U}(r,0) = 0 \quad (3.2)$$

将式(3.1)和式(3.2)代入式(2.33), 球体在突加外载作用下的弹性动力学基本解为

$$U(r,t) = -\varphi(r)\sigma_0 + \sigma_0 \sum_{k_n} \left[ \frac{\bar{\varphi}(k_n)}{F(k_n)} r^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(k_n r) \cos\omega_n t \right] \quad (3.3)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(k_n) = H[\varphi(r)] = & \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi k_n}} \cdot \frac{1}{k_n} \left\{ \left( \frac{3}{k_n^2} - b^2 \right) \sin(k_n b) \right. \\ & \left. - \frac{3b}{k_n} \cos(k_n b) \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

将式(3.3)代入式(2.2), 并利用下列贝塞尔函数性质,

$$J'_m(z) = J_{m-1}(z) - \frac{m}{z} J_m(z) \quad (3.5a)$$

$$\frac{1}{z} J_m(z) = \frac{1}{2m} [J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z)] \quad (3.5b)$$

$m$  表示贝塞尔函数的阶数。相应的动应力表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_r(r,t) = & -\sigma_0 + \frac{\sigma_0}{3} \sum_{k_n} \frac{\bar{\varphi}(k_n)}{F(k_n)} [(3\lambda + 2\mu) k_n r^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(k_n r) \\ & - 4\mu k_n r^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(k_n r)] \cos\omega_n t \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\sigma_\varphi(r,t) = \sigma_\theta(r,t) = -\sigma_0 + \frac{\sigma_0}{3} \sum_{k_n} \frac{\bar{\varphi}(k_n)}{F(k_n)} [(3\lambda + 2\mu) k_n r^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(k_n r)$$

$$+ 2\mu k_n r^{-\frac{1}{2}} J_{5/2}(k_n r)] \cos \omega_n t \quad (3.6b)$$

由贝塞尔函数的性质可知下式成立, 即

$$[r^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(k_n r)]_{r=0} = 1 \quad (3.7a)$$

$$[r^{-\frac{1}{2}} J_{5/2}(k_n r)]_{r=0} = 0 \quad (3.7b)$$

将式(3.7)代入式(3.6)可得知在球体的球心 $r=0$ 处的动应力是有限值, 而不存在奇异性, 并且有 $\sigma_r(0, t) = \sigma_\theta(0, t)$ , 表明在球体圆心 $r=0$ 处的径向动应力响应等于切向动应力响应。

球体的材料性质为 $\lambda = \mu = 80 \text{ GPa}$ ,  $V = 5000 \text{ m/s}$ 。采用无量纲变量为 $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / \sigma_0$ ,  $T = V \cdot t / b$ ,  $R = r / b$ 。图1中▲表示球体在静载作用下的静应力值。

为了进一步验证解的正确性, 首先计算了球体外边界附近点的动应力响应。令动应力响应的历程 $T \leq 1$ , 排除了应力波反射的干涉。由图1可见, 当应力波波头随时间 $T$ 自球体外边界向圆心处传播时, 当应力波波头没有到达某一点时该点的动应力为零。而当波头到达该点时, 该点的动应力呈现强间断跳跃。当波头远离该点时, 该点的动应力趋于和静载时的应力相一致。这一现象和无穷大弹性介质的空腔球体在内边界作用突加均布压力的结果<sup>[4]</sup>相类似, 并与轴对称问题的计算结果相类似<sup>[5]</sup>。由此验证本文解的正确性, 并表明本文动应力响应应具有压缩球面波的一切特性。

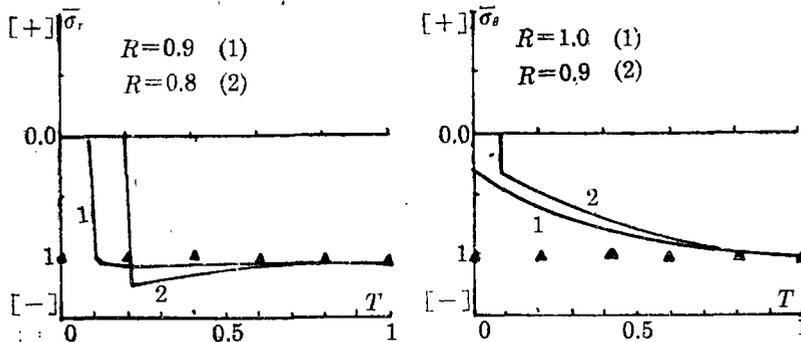


图1 无反射波干涉的动应力响应历程.  $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / \sigma_0$ ,  $R = r / b$ ,  $T = V \cdot t / b$

图2和图3分别表示球体的径向动应力和切向动应力的响应历程及分布规律。球体内动应力在反射波干涉下具有的强间断效应导致动应力响应历程具有周期性的剧烈振荡, 振荡曲线呈现明显的折线, 尖点。由图2(a)曲线1可见在球体的外边界径向应力严格满足给定的边界条件。从图2(c)和图3(c)可见在球心处的动应力峰值远远大于在外边界附近处的动应力峰值。这一现象可解释为: 应力波自外边界向球心处传播时将相聚于球心 $r=0$ 处, 这时沿球体四周(径, 纬)向将在球心点处发生波头相撞导致动应力集中现象, 并由此产生很高的应力峰值。

比较图2和图3, 可以发现球体的径向和切向动应力响应的差异随着 $R = r/b \rightarrow 0$ 而减小。在 $r=0$ 的球心处径向动应力响应和切向动应力响应完全一致。这是因为在球体 $r=0$ 的球心处一点的径向和切向的几何量是相同的。

图2(d)和图3(d)表示径向动应力和切向动应力在不同时刻 $T$ 时的分布规律。从图中可以看到, 当波头在球心处时( $T=1$ ), 球心处的动应力呈现很高的峰值。当波头远离球心处

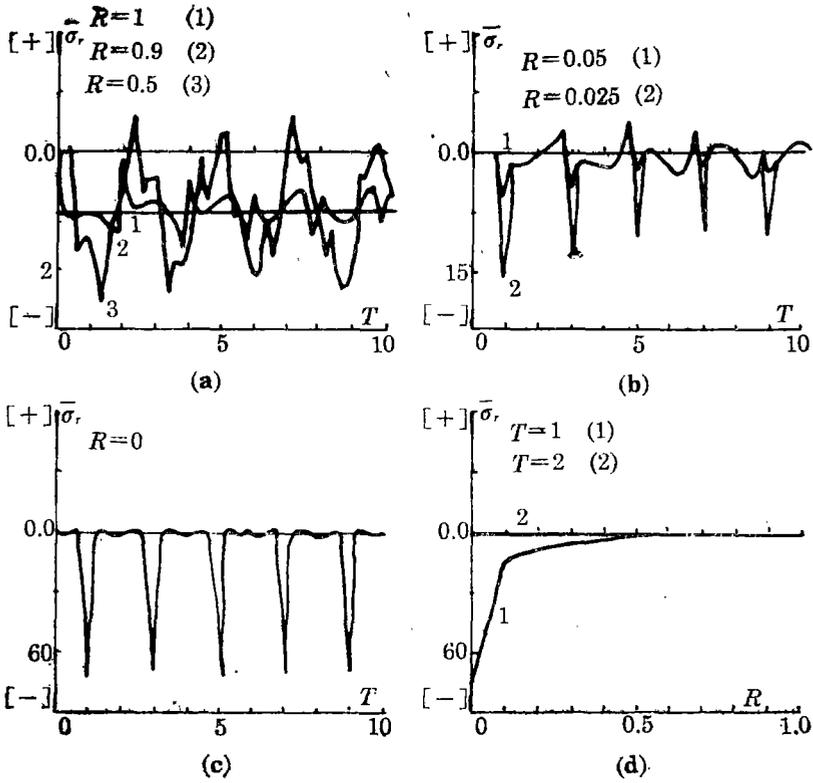


图2 在突加外压作用下，球体的径向动应力响应历程和分布规律  
 $\bar{\sigma}_r = \sigma_r / \sigma_0$ ,  $R = r/b$ ,  $T = V \cdot t/b$

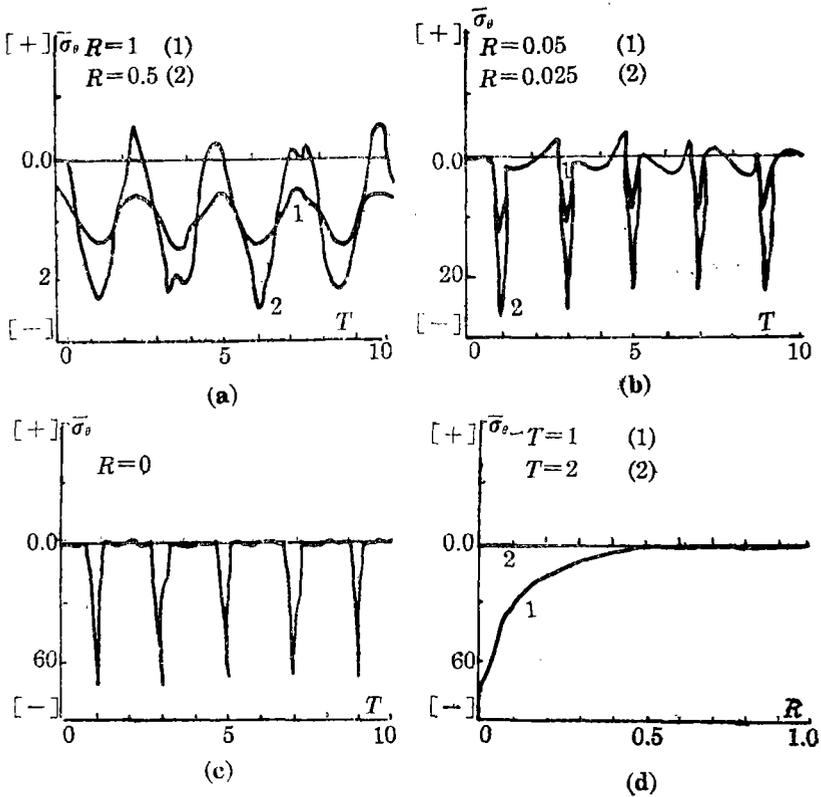


图3 在突加外压作用下，球体的切向动应力响应历程和分布规律  
 $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta / \sigma_0$ ,  $R = r/b$ ,  $T = V \cdot t/b$

时( $T=2$ ), 球体内分布的动应力值非常低, 此时球心处的动应力集中现象也消失。如图 2(d)和图 3(d)的曲线 2 所示。

本文的主要工作在于给出一种简便有效的解析方法求解球体的弹性动力学问题, 并揭示由于应力波波头在球心处相撞时引起的动应力集中现象, 从而导致圆心处的动应力呈现很高的峰值。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Tanter, C. J., Application of the Laplace transform to a problem in elastic vibration, *Philosophical Magazine*, 33 (1942), 614.
- [ 2 ] Baker, W. E. and F. J. Allen, The response of elastic spherical shells to spherically symmetric internal blast loading, Ballistic Research Laboratories, BRL Memo-1113, Nov, AD156639 (1957).
- [ 3 ] Cinelli, G., An extension of the finite Hankel transform and applications, *Int. J. Engng. Sci.*, 3 (1965), 539—559.
- [ 4 ] Miklowitz, J., Elastic wave propagation, *Applied Mechanics Surveys*, Eds. by H. N. Abramson, et al., Spartan Books, Washington (1966), 809.
- [ 5 ] Wang Xi and Gong Yu-ning, A theoretical solution for axially symmetric problems in elastodynamics, *Acta Mechanica Sinica*, 7( 3 ) (1991).

## The Elastodynamic Solution for a Solid Sphere and Dynamic Stress-Focusing Phenomenon

Wang Xi

(Department of Applied Mechanics, East China Institute of  
Technology, Nanjing)

### Abstract

This paper presents an analytical method of solving the elastodynamic problem of a solid sphere. The basic solution of the elastodynamic problem is decomposed into a quasi-static solution satisfying the inhomogeneous compound boundary conditions and a dynamic solution satisfying the homogeneous compound boundary conditions. By utilizing the variable transform, the dynamic equation may be transformed into Bessel equation. By defining a finite Hankel transform, we can easily obtain the dynamic solution for the inhomogeneous dynamic equation. Thereby, the exact elastodynamic solution for a solid sphere can be obtained. From the results carried out, we have observed that there exists the dynamic stress-focusing phenomenon at the center of a solid sphere under shock load and it results in very high dynamic stress-peak.

**Key words** solid sphere, elastodynamics, dynamic stress-focusing