

分析表面裂纹的一种新方法*

曾昭景 戴树和

(南京化工学院化工机械系, 1992年7月24日收到)

摘 要

本文作者综合了线弹簧模型及边界元法的优点, 开发了一种新的线弹簧边界元法。该方法把表面裂纹这一三维问题简化为拟一维问题, 可用于分析受到多种载荷作用的含表面裂纹的板。本文对该方法进行了理论分析和数值验证, 报告了计算结果。结果表明, 该方法经济有效。利用该方法仅使用个人计算机就可以分析表面裂纹问题。

关键词 线弹簧模型 边界元法 表面裂纹 应力强度因子

符 号

a	表面裂纹的最大深度	N_x	远端单位长度上作用的切向力
c	表面裂纹长度的一半	N_y	远端单位长度上作用的拉力
C_{ij}	单边裂纹条的柔度系数($i, j=t, b$)	M_x	远端单位长度上作用的弯矩
F	正则化应力强度因子	Q	第二类完全椭圆积分的平方
F_t, F_b	无量纲应力强度因子, 由 $K_I(x) = F_t N_x + F_b M_x$ 定义	t	含表面裂纹板的厚度, 或单边裂纹板条的宽度
H	含表面裂纹板板高的一半	u_n, v_n	板中面的法向位移、法向转角
K_I	I型应力强度因子	W	含表面裂纹板板宽的一半
K_{II}	II型应力强度因子	δ, θ	单边裂纹板条因裂纹存在而对应的加载点的位移和转角

一、引 言

表面裂纹在化工设备及其部件上时有发生, 因而分析表面裂纹是对含裂纹的设备、部件进行可靠性评估的重要任务之一。一般来说, 表面裂纹问题属三维裂纹问题, 而各种估算断裂参数的三维方法如有限元法, 从花费的人力和计算成本的角度看是很不经济的。因此, 必须开发一种求解表面裂纹的断裂参量的更经济的方法。

Rice和levy提出的线弹簧模型^[1]把三维表面裂纹问题约简为拟二维问题, 从工程应用的角度看, 该方法给出的结果具有足够的精度。

人们把线弹簧模型与奇异积分方程相耦合^[2, 3], 与有限元法相耦合^[3~8]用于分析表面裂

• 钱伟长推荐。

纹。该模型已成为评估含表面裂纹板壳的强有力的工具。

边界元法是求解边值问题的一种方法。较之其它数值方法如有限元法其主要优点是降低了问题的阶数从而使系统方程的阶数大大减小。近年来边界元法已引起研究人员的极大关注,考虑到边界元法的这些优点,本文作者已将线弹簧模型与边界元法相耦合^[9],用于求解表面裂纹问题。本文概述了线弹簧模型的基本概念;在常规边界元法的边界条件中引入弹簧边界条件,描述了如何求取补充方程;报导了线弹簧边界元法在分析含表面裂纹板方面的应用。

二、线弹簧模型简介

在线弹簧模型中,厚度为 t 的板中所含的长为 $2c$,深为 $a(x)$ 的表面裂纹被理想化为长为 $2c$ 的等效穿透裂纹。含真实表面裂纹板的韧带作用由连接等效穿透裂纹两裂纹面的一系列弹簧来代替。而弹簧则由平面应变单边裂纹板条来模拟。该单边裂纹板条宽为 t ,裂纹长 $a(x)$ 等于相应的含表面裂纹的板在坐标为 x 处的裂纹深度 $a(x)$ 。单边裂纹板条每单位厚度上受到轴向力 $N_n(x)$ 及弯矩 $M_n(x)$ 。同时,该弹簧对等效穿透裂纹两裂纹面作用有一定的膜力 $N_n(x)$ 及弯矩 $M_n(x)$ 。只要求出作用在等效穿透裂纹上及弹簧上的力 $N_n(x)$,弯矩 $M_n(x)$,就可以从下列关系式求出局部应力强度因子 $K_I(x)$ 。

$$K_I(x) = F_t N_n + F_b M_n \quad (2.1)$$

式中无量纲因子 F_t , F_b 分别由单边裂纹板条在纯拉及纯弯条件下的平面应变解获得^[10]。

三、弹簧边界条件及补充方程

为了开发能求解表面裂纹问题的线弹簧边界元法,必须考虑含表面裂纹板的面内面外变形;另一方面,横向剪切变形对表面裂纹问题有较大的影响,因而对每一个结点,必须同时考虑三个平移自由度和两个转动自由度。

在线弹性力学的范围内,根据小变形假设迭加原理是成立的。因而可以把平面问题的边界元法方程与 Reissner 型板问题的边界元法方程相迭加,以获得同时受到面内、面外作用的板问题的边界元法方程。在我们所开发的程序中,Reissner型板的基本解取自文献[11],平面问题的基本解取自文献[12]。迭加所得的边界元法系统方程的具体形式可详见文献[8]。

当人们把线弹簧模型与有限元法相耦合时,在单元库中构造了新的单元——弹簧单元。类似地,当把线弹簧模型与边界元法相耦合时,必须引入新的边界条件——弹簧边界条件。如果在所考虑的边界上广义力的值和广义位移的值都是未知的,那么这种边界条件就称为弹簧边界条件。本文把具有弹簧边界条件的结点称为弹簧边界结点。

对于弹簧边界结点,广义力和广义位移都是未知的,因而必须补充附加方程。补充方程可由等效穿透裂纹面与弹簧之间的位移相容性导出。

例如,让我们考虑含表面裂纹的板受到 I 型载荷的情况。令 $\delta(x)$ 和 $\theta(x)$ 分别表示单边裂纹板条加载点处因裂纹的存在而引起的位移和转角。 $\delta(x)$ 和 $\theta(x)$ 与板中面的法向位移 $u_n(x)$,法向转角 $v_n(x)$ 的相容关系可表示为:

$$\begin{Bmatrix} \delta(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2u_n(x,0) \\ 2v_n(x,0) \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

值得注意的是, $\delta(x)$ 和 $\theta(x)$ 可以从线弹簧的柔度关系式,即从单位厚度上受到轴向力

$N_n(x)$, 弯矩 $M_n(x)$ 的单边裂纹板条的柔度关系求得^[11]。

$$\begin{Bmatrix} \delta(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{ii}(x) & C_{ib}(x) \\ C_{bi}(x) & C_{bb}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_n(x) \\ M_n(x) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

补充了方程(3.1)和(3.2)之后, 未知变量的数目与方程的数目相等, 因而总体方程组可以求解。

根据上述思路, 本文作者开发了线弹簧边界元法的程序, 下一节我们将介绍线弹簧边界元法的某些应用实例。

四、线弹簧边界元法的应用

运用上述线弹簧边界元法, 我们对受到远端均匀拉伸和弯曲的含表面裂纹的板进行了弹性断裂力学分析。假设表面裂纹为半椭圆形的, 长为 $2c$, 最大深度为 a , 且裂纹位于对称轴上如图1(a)所示。板的材料是钢, 其杨氏弹性模量等于205.8GPa, 泊松比等于0.3。

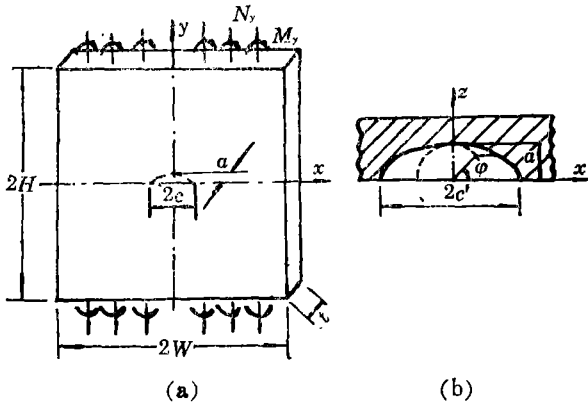


图1 含表面裂纹的板以及参数角 φ 的定义

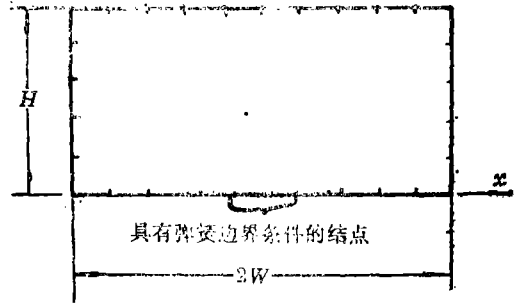


图2 离散了的计算模型

由于对称, 仅取板的一半作为计算模型。用54个结点将该计算模型的边界划分成54个单元, 见图2。其中19个结点属于弹簧边界结点。弹簧边界结点安排在等效穿透裂纹的裂纹面上。

沿裂纹前缘任意一点的正则化应力强度因子 F 可表示为:

$$F = K_I / [(N_y/t + 6M_y/t^2) \sqrt{\pi a/Q}] \quad (4.1)$$

式中 K_I 根据式(2.1)求得; Q 是第2类完全椭圆积分的平方, 可近似表示为^[18]:

$$Q = 1 + 1.464(a/c)^{1.65}$$

用线弹簧边界元法分析了 $a/W = a/H = 0.2, 0.4, 0.6$ 和 0.8 , 同时 $a/c = 0.4$ 的情况。所得到的正则化应力强度因子 F 示于图3。图中的横坐标是正则化的裂纹参数角, 裂纹参数角 φ 的定义见图1(b)。图中同时给出了 Raju 和 Newman 对同一问题的三维有限元解^[13]。Raju 和 Newman 用了近6900个自由度在大型计算机上获得该结果, 其可靠性得到普遍的承认。

从图3可以看出, 线弹簧边界元法的分析

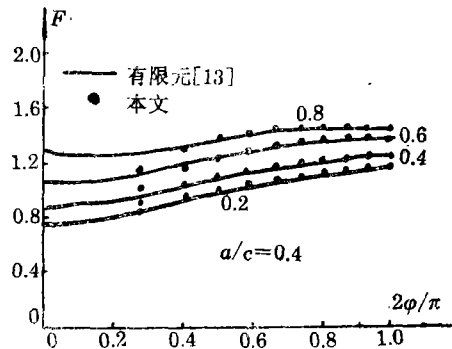


图3 含表面裂纹的板在远端受拉且 $a/c = 0.4$ 的条件下沿裂纹前缘的正则化应力强度因子

结果与三维有限元法的分析结果^[13]吻合得较好，特别是在裂纹的最深点。可是在裂纹前缘与板的自由表面交界点，不能直接从线弹簧模型求得该点的应力强度因子。如文献[8]所指出的那样，这是由线弹簧模型本身的弱点造成的。裂纹前缘与板自由表面交界点的应力强度因子，可以用线弹簧边界元法由虚裂纹扩展技巧求出，见另文。

只要将位移相容条件(式(3.1))及柔度关系(式(3.2))加以推广，就可将线弹簧边界元法用于分析含表面裂纹在其它加载条件下的情况。例如，我们用线弹簧边界元法分析了含半椭圆形表面裂纹的板，该板在远端受到切向力 N_t 。图4(b)同时给出了用线弹簧边界元法和用交替法^[14]对 $a/c=0.4$ ， $a/t=0.2$ 及 0.8 的表面裂纹计算的结果。图4(b)中参数角 φ_0 从表面裂纹的最深点起算并按顺时针方向测量，见图4(a)。

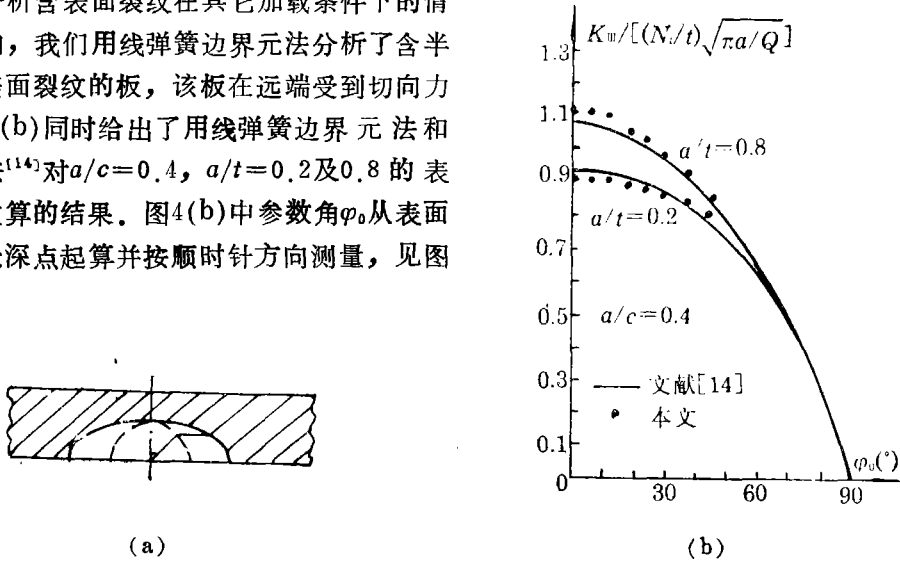


图4 (a)图4(b)中的参数角 φ_0 的定义
(b)含表面裂纹的板在远端切向力 N_t 及 $a/c=0.4$ 的条件下沿裂纹前缘的正规化应力强度因子

五、结 论

本文介绍了一新的线弹簧边界元法。该方法综合了线弹簧模型的优点以及边界元法的优点，因而用于准备数据所花费的时间和计算所花费的时间都大为减少。利用该方法，使用小内存的个人计算机就可以对三维表面裂纹问题进行分析。

将线弹簧边界元法所得的结果与有代表性的三维有限元法的计算结果以及交替法的计算结果相比较，可以认为，从工程应用的角度，线弹簧边界元法给出的断裂参数值具有足够的精度，特别是在表面裂纹的最深点。

参 考 文 献

- [1] Rice, J.K. and N. Levy, The part-through surface crack in an elastic plate, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, 39 (1972), 185—194.
- [2] Delate, F. and F. Erdogan, Line-spring model for surface cracks in a Reissner plate, *International Journal of Engineering and Science*, 19 (1981), 1331—1340.
- [3] Parks, D. M., The inelastic line-spring for elastic-plastic fracture mechanics parameters for surface-cracked plates and shells, *ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, 103 (1981), 246—254.
- [4] Parks, D. M. and C. S. White, Elastic-plastic line-spring finite elements for surface-cracked plates and shells, *ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, 104 (1982), 289—292.
- [5] German, M. D. and V. Kumar and H. G. De Lorenzi, Analysis of surface cracks in plates and shells using the line-spring model and ADINA, *Computers & Structures*, 17 (1983), 881—890.
- [6] Kumar, V. and M.D. German and B.I. Schumacher, An analysis of elastic surface cracks in cylinders using the line-spring model and the shell finite element method, *ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, 107 (1985), 403—411.
- [7] Miyoshi, T. and M. Shiratori and Y. Yoshida, Analysis of J -integral and crack growth for surface cracks by line-spring method, *ASME, Journal of Pressure Vessel Technology*, 108 (1986), 305—311.
- [8] De Langre, E. and L. Ebersolt, The use of a new line-spring shell element for elastic surface crack analysis, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 10 (1987), 153—167.
- [9] 曾昭景, 浅长型表面裂纹问题的理论与试验研究, 南京化工学院博士学位论文 (1990).
- [10] Rooke, D.P. and D.J. Cartwright, *Compendium of Stress Intensity Factors*, H.M.S.O., London (1976).
- [11] Wang, Y.C., et al., SBEM for Reissner's plate and its application to foundation plate, *Boundary Elements*, Ⅷ, Ed. by C. A. Brebbia, Vol. 2, Springer-Verlag (1987), 111—125.
- [12] Brebbia, C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London (1978).
- [13] Raju, I.S. and J.C. Newman, Stress-intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates, *Engineering Fracture Mechanics*, 11 (1979), 817—829.
- [14] 中国航空研究院, 《应力强度因子手册》, 科学出版社, 北京 (1981).

A New Method for Analyzing Surface Cracks

Zeng Zhao-jing Dai Shu-ho

*(Department of Chemical Mechanical Engineering, Nanjing Institute
of Chemical Technology, Nanjing)*

Abstract

The authors have developed a new line-spring boundary element method, which combines the advantage of the line-spring model with that of the boundary element method. The method reduces a three-dimension problem of the surface crack into a quasi-one-dimension problem and can be used to analyze a surface cracked plate under various loading conditions. In this paper theoretical analyses and numerical verifications are carried out. The calculated results are reported, which indicate that the present method is efficient and can be used to analyze the surface crack problem on a personal computer.

Key words line spring model, boundary element method, surface crack, stress intensity factor