

油藏渗流问题的新模型及其精确解*

李笑萍 赵子刚

(大庆石油学院, 1990年8月5日收到)

摘 要

本文在考虑到井筒储集和表皮效应情况下, 利用双重介质渗流方程组建立了油藏渗流问题的新模型, 并通过各种极限形式得到了外边界为无限大, 有界封闭, 有界定压三种情况下二类常见油藏(裂缝性油藏, 均质油藏)内压力分布的精确解析表达式。

关键词 油藏渗流 新模型 精确解

一、前 言

六十年代初Баренблатт等人^[1,2]提出了双重介质渗流方程组(2.1); 文[3]在简化条件下求得了该方程组的解; 文[4]考虑到井筒储集和表皮效应的影响, 但只得到了拉普拉斯空间解; 文[5]求得了方程组(2.1)的精确解, 但未考虑井筒储集和表皮效应的影响。这些解不但为开发双重介质油藏提供了重要理论, 而且在试井分析中有着重要应用^[6~8], 对于方程组(2.1)的求解, 考虑井筒储集与表皮效应的情况迄今无人求得精确解。事实上, 由于井筒容积和液体的可压缩性, 当井筒中压力变化时, 其中总有流体积聚。此外, 由于实际井的井底污染或各种增产措施, 在井壁附近常有表皮效应产生, 所以研究油藏内渗流问题时, 考虑到井筒储集和表皮效应的影响有着普遍的实际意义。本文利用各种不同的极限形式, 得到了弱可压缩液体在二类常见油藏(裂缝性油藏, 均质油藏)内向具有井筒储集和表皮效应井渗流时, 各类油藏内压力分布的精确解。

在目前一些广泛使用的油藏渗流问题模型中^[4,6~8], 一直用如下内边界条件描述表皮效应对压力的影响:

$$P_w(t) = P(r_w, t) - S \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right)_{r_w}$$

式中 P 表压力, r_w 表井半径, S 表井的表皮系数。这种描述方法给渗流方程组的求解及解的应用带来困难。在实际应用中往往只好先求压力在拉普拉斯空间解, 解的形式也较复杂, 而且对于负表皮效应并不收敛, 因而在实际应用时, 必须首先进行恰当的近似处理及适当的参数组合^[4,6~8], 然后或是反演出压力在各种简化情况下的近似公式或是利用Stehfest^[9]提出的拉氏变换的数值反演方法求压力的近似值。本文将有效半径引入渗流方程组的内边界条

* 钱伟长推荐。

件,建立了简便的油藏渗流问题的新模型.用新模型对一般的油藏渗流问题都可进行严格求解,从而可得到考虑到井筒储集及表皮效应情况下的储层内压力分布的精确解析表达式,并且所得到的压力拉氏空间解形式也较简单,对于正、负和零表皮效应均收敛,可以不必进行近似处理直接利用计算机计算与绘图.另外,参见文[6~8]易证本文的模型与目前广泛使用的双重介质油藏压力分布模型所描述的系统是完全一致的.

应用本文的压力分布表达式(取井底压降),通过电子计算机已绘出了均质储层内具有井筒储集和表皮效应井的试井曲线图版,与美国SSI石油公司引进(Gringarten等著)的相应图版一致;又绘出了双重介质储层中具有井筒储集和表皮效应井的试井曲线图版比SSI公司(Gringarten等著)的相应图版精度高. Gringarten等人^[7,8]是用目前使用的压力分布模型的拉氏空间解经过近似处理与参数组合,再利用文[9]提出的拉氏变换近似反演方法得出的近似值,把一条完整的压降曲线分成三段来绘制的,在似合实测曲线时,各段之间的过渡部分产生了拟合的“盲区”.应用本文的公式绘制相应的曲线图版,弥补了这方面的不足,因而本文精确解可以用来衡量各种简化解的精度及适用范围.美国SSI石油公司(Gringarten等人)虽然绘制了一套试井样版曲线图,而且在当代试井分析中占有重要地位,但这套图版的精确理论公式并无人找到,利用本文的这些精确解(取井底压降),就可得出美国SSI石油公司(Gringarten等人)的均质、双重介质地层试井样版曲线图版的全部理论公式.

二、新模型介绍

在有越流的二层油藏中心打开一个半径为 r_w 的井.设储层内的初始压力为 P_0 ,井筒储集常数为 C ,并在第 i 层位的有效半径 $r_{we_i} = r_w \exp[-S_i]$, S_i 为表皮系数($i=1,2$).从 $t=0$ 时刻起,井以储层条件下的变产量 $q(t)$ 生产(采油井的产量为正,注水井的产量为负),则均质微压缩液体在二储层内向井底渗流问题,具有下列方程组:

$$\begin{cases} \frac{k_1 h_1}{\mu} \nabla^2 P_1 = (\phi C_i h)_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} - \alpha \frac{k_2}{\mu} (P_2 - P_1) \\ \frac{k_2 h_2}{\mu} \nabla^2 P_2 = (\phi C_i h)_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} + \alpha \frac{k_2}{\mu} (P_2 - P_1) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\text{初始条件} \quad P_1(r, 0) = P_2(r, 0) = P_0 \quad (2.2)$$

内边界条件

$$P_w(t) = P_1(r_{we_1}, t) = P_2(r_{we_2}, t) \quad (2.3)$$

$$2\pi \sum_{i=1}^2 \left(\frac{k_i h_i}{\mu} r \frac{\partial P_i}{\partial r} \right)_{r_{we_i}} = q(t) + C \frac{dP_w}{dt} \quad (2.4)$$

外边界条件

$$\text{对无限大地层} \quad P_1(\infty, t) = P_2(\infty, t) = P_0 \quad (2.5)$$

$$\text{对有界封闭地层} \quad \left. \frac{\partial P_1}{\partial r} \right|_{r_{c1}} = \left. \frac{\partial P_2}{\partial r} \right|_{r_{c2}} = 0 \quad (r_{c1,2} \text{ 为外边界半径}) \quad (2.6)$$

$$\text{对外边界定压地层} \quad P_1(r_{ce}, t) = P_2(r_{ce}, t) = P_0 \quad (2.7)$$

式中 P 是压力, k , ϕ , C_i 分别为渗透率、孔隙度, 地层综合压缩系数, μ 是液体粘度, α 是孔隙间流动形状系数, h 是地层厚度; 下标 1、2 分别表示介质 1、2.

三、双重孔隙度油藏渗流问题精确解

在定解问题(2.1)~(2.2)中,考虑二种介质;第一种是裂缝系统,其渗透率较高,是流油的主要通道.第二种是基岩系统,渗透率较低,是储油的主要空间.假设基岩系统到油井的渗透率趋于零,即认为该井所产的油仅通过裂缝被采出,那么双重孔隙度型油藏渗流问题满足下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_1 h}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r} \right) - (\phi C_{1h})_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial k_2}{\mu} (P_2 - P_1) &= 0 \\ (\phi C_{1h})_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{\alpha k_2}{\mu} (P_2 - P_1) &= 0 \quad (t > 0, r > r_{we}) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

而初始条件和内边界条件可写为

$$P_1(r, 0) = P_2(r, 0) = P_0 \quad (3.2)$$

$$r \frac{\partial P_1}{\partial r} \Big|_{r=r_{we}} = -\frac{\mu}{2\pi k h} \left[q(t) + C \frac{dP_{1w}}{dt} \right] \quad (3.3)$$

外边界条件可写为

$$\text{对无限大地层 } P_1(\infty, t) = P_0 \quad (t > 0) \quad (3.4)$$

$$\text{对有界封闭地层 } \frac{\partial P_1}{\partial r} \Big|_{r=r_c} = 0 \quad (t > 0) \quad (3.5)$$

$$\text{对有界定压地层 } P_1(r_o, t) = P_0 \quad (t > 0) \quad (3.6)$$

1. 精确解介绍

(i) 无限大储集层内渗流问题具有下列精确解

$$P_1(r, t) = P_0 - \frac{\mu}{2\pi k r h} \int_0^t v_1 \left(\frac{r}{r_{we}}, \theta \eta \right) q(t - \eta) d\eta \quad (3.7)$$

$$P_2(r, t) = \exp \left[-\frac{\theta}{b} \eta \right] \left[P_0 + \frac{\theta}{b} \int_0^t \exp \left[\frac{\theta}{b} \eta \right] P_1(r, \eta) d\eta \right] \quad (3.8)$$

当 q 为常产量时,有

$$P_1(r, t) = P_0 - \frac{q\mu}{\pi^2 k_1 h} \int_0^\infty y \sum_{i=1}^2 \frac{A_i(y)}{u_i(y)} [1 - \exp[-u_i(y)\tau]] G_{1i}(\xi, y) dy \quad (3.9)$$

其中

$$v_1(\xi, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty y \sum_{i=1}^2 A_i(y) \exp[-u_i(y)\tau] G_{1i}(\xi, y) dy \quad (3.10)$$

$$G_{1i}(\xi, y) = \frac{y\varphi_{0,1}(\xi, 1, y) - C_e u_i(y)\varphi_{0,0}(\xi, 1, y)}{[yJ_1(y) - C_e u_i(y)J_0(y)]^2 + [yY_1(y) - C_e u_i(y)Y_0(y)]^2} \quad (i=1, 2) \quad (3.11)$$

$$A_i(y) = \frac{1}{2a} \left[b + (-1)^{i+1} \frac{b(1+by^2) - 2a}{\sqrt{(1+by^2)^2 - 4ay^2}} \right] \quad (i=1, 2) \quad (3.12)$$

$$u_i(y) = \frac{1}{2a} [1 + by^2 + (-1)^{i+1} \sqrt{(1+by^2)^2 - 4ay^2}] \quad (i=1, 2) \quad (3.13)$$

$$\varphi_{m,n}(\alpha, \beta, y) = Y_m(\alpha y) J_n(\beta y) - J_m(\alpha y) Y_n(\beta y) \quad (3.14)$$

其中 $J_n(\xi)$, $Y_n(\xi)$ 表 n 阶贝塞尔函数

$$\left. \begin{aligned} a &= \omega b, \quad \omega = \frac{(\phi C_i h)_1}{(\phi C_i h)_1 + (\phi C_i h)_2} \\ b &= \frac{1-\omega}{\lambda}, \quad C_e = \frac{C}{[(\phi C_i h)_1 + (\phi C_i h)_2] r_{we}^2} \\ \lambda &= \alpha r_{we}^2 \frac{k_2}{k_1}, \quad \theta = \frac{kh}{\mu r_{we}^2 [(\phi C_i h)_1 + (\phi C_i h)_2]} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

(ii) 有界封闭地层问题(3.1)~(3.3)、(3.5)仍具有形如(3.7)、(3.8)的精确解, 但(3.7)式中的函数 v_1 应改为:

$$\begin{aligned} v_2(\xi, \tau) &= 2 \left[\frac{1}{R^2 - 1 + 2C_e} + \nu \frac{\frac{b}{a} - 1}{R^2 - 1} \exp\left[-\frac{\tau}{a}\right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 A_i(\alpha_n^i) \exp[-u_i(\alpha_n^i)\tau] G_{2i}(\xi, R, \alpha_n^i) \right], \quad \nu = \begin{cases} 0, C \neq 0 \text{ 时} \\ 1, C = 0 \text{ 时} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

当 $q(t) = q$ 为常数时, 有

$$\begin{aligned} P_1(r, t) &= P_0 - \frac{q\mu}{\pi k_1 h} \left\{ \frac{\theta t}{R^2 - 1 + 2C_e} + \nu \frac{b-a}{R^2 - 1} \left[1 - \exp\left[-\frac{\theta}{a} t\right] \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{A_i(\alpha_n^i)}{u_i(\alpha_n^i)} [1 - \exp[-u_i(\alpha_n^i)\tau]] G_{2i}(\xi, R, \alpha_n^i) \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\text{其中 } G_{2i}(\xi, R, y) = \phi_{0,1}(\xi, R, y) / M_2 \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } M_2 &= R\phi_{0,1}(R, 1, y) - \phi_{0,1}(1, R, y) - \frac{C_e}{y} u_i(y) [R\phi_{0,0}(R, 1, y) \\ &\quad + \phi_{1,1}(1, R, y)] + 2C_e A_i(y) \phi_{0,1}(1, R, y) \end{aligned}$$

$$R = \frac{r_c}{r_{we}}, \quad \alpha_n^i (n=1, 2, \dots) \text{ 是方程(3.19)的 } n \text{ 个正根.}$$

$$y\phi_{1,1}(1, R, y) - C_e u_i(y) \phi_{0,1}(1, R, y) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (3.19)$$

(iii) 外边界定压问题(3.1)~(3.3)、(3.6)仍具有形如(3.7)和(3.8)式的精确解, 但(3.7)式中的函数 v_1 应改为

$$v_2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 A_i(\beta_n^i) \exp[-u_i(\beta_n^i)\tau] G_{3i}(\xi, R, \beta_n^i) \quad (3.20)$$

当 $q(t) = q$ 为常量时

$$P_1(r, t) = P - \frac{q\mu}{\pi k_1 h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \frac{A_i(y)}{u_i(y)} [1 - \exp[-u_i(y)\tau]] G_{3i}(\xi, R, \beta_n^i) \quad (3.21)$$

$$\text{其中 } G_{3i}(\xi, R, y) = \phi_{0,0}(\xi, R, y) / M_3 \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} M_3 &= R\phi_{1,1}(1, R, y) - \phi_{0,0}(1, R, y) - \frac{C_e}{y} u_i(y) [R\phi_{0,1}(1, R, y) \\ &\quad + \phi_{1,0}(1, R, y)] + 2C_e A_i(y) \phi_{0,0}(R, 1, y) \end{aligned}$$

$\beta_n^i (n=1, 2, \dots)$ 是下列方程的第 n 个正根。

$$y\phi_{0,i}(1, R, y) - C_o u_i(y)\phi_{0,0}(1, R, y) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (3.23)$$

2. 无限大地层问题的解

在式(3.1)~(3.5)中先作代换

$$\psi_1(\xi, \tau) = \frac{2\pi k_1 h}{\mu} (P_0 - P_1(r, t)), \quad \xi = \frac{r}{r_{we}}$$

$$\psi_2(\xi, \tau) = \frac{2\pi k_1 h}{\mu} (P_0 - P_2(r, t)), \quad \tau = \theta t$$

再将各得式对 τ 取拉普拉斯变换, 经整理可得

$$\frac{d^2 \bar{\psi}_1}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\bar{\psi}_1}{d\xi} - f(S)\bar{\psi}_1 = 0 \quad (3.24)$$

其中 $f(S) = \frac{S(1+aS)}{1+bS} \quad (S \neq -\frac{1}{b})$ (3.25)

$$\xi \frac{d\bar{\psi}_1}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = -q(S) + C_o S \bar{\psi}_1(1, S) \quad (3.26)$$

$$\bar{\psi}_1(\infty, S) = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{d\bar{\psi}_1}{d\xi} \Big|_{\xi=R} = 0 \quad (3.28)$$

$$\bar{\psi}_1(R, \tau) = 0 \quad (3.29)$$

易知方程(3.24)满足条件(3.26)、(3.27)的解为

$$\bar{\psi}_1(\xi, S) = V(\xi, S)q(S) \quad (3.30)$$

而 $V(\xi, S) = \frac{K_0(\sqrt{f}\xi)}{\sqrt{f}K_1(\sqrt{f}) + C_o SK_0(\sqrt{f})}$ (3.31)

\sqrt{f} 表主值支, $K_n(\xi)$ 表虚宗量 Bessel 函数
先计算积分

$$v_1(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-t\infty}^{t\infty} \exp[S\tau] V(\xi, S) dS \quad (v > 0) \quad (3.32)$$

由于 $|\arg S| \leq \pi$ 时, 有 $|\arg \sqrt{f}| \leq \pi/2$, 又 $K_0(\xi), K_1(\xi)$ 在区域 $|\arg \xi| \leq \pi$ 内单值解析, 且在区域 $|\arg \xi| \leq \pi/2$ 内无零点, 所以, (3.32) 式的被积函数的多值性仅由 \sqrt{f} 所引起, 它的支点为 $S=0, -1/b, -1/a$, 从而(3.32) 式中的被积函数在复平面 S 内除去负实轴上的线段 $[-1/b, 0]$ 可和射线 $(-\infty, -1/a]$ 后所得的区域内单值解析, 那么我们可以取图 1 所示的围线来计算(3.32)式的积分。

令 $R \rightarrow \infty, L_1, L_2, L_3$ 的半径趋于零, 则易证积分 $\int_{L_R}, \int_{L_1}, \int_{L_2}, \int_{L_3}$ 皆趋于零, 从而

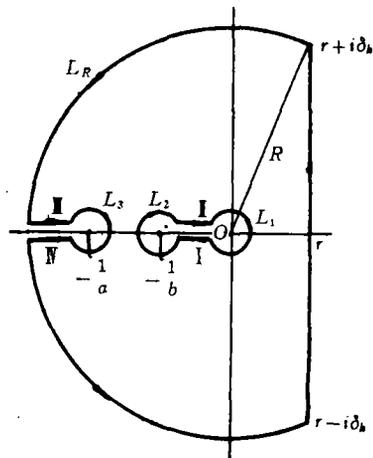


图 1

根据柯西定理对于任意的 $R > 1/a$ 有

$$u_1(\xi, \tau) = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_I + \int_{\bar{I}} + \int_{\mathbb{R}} + \int_{\mathbb{R}^+} \right\} \quad (3.33)$$

在积分 \int_I 中令 $S = u_2 \exp[-\pi i]$, $0 < u_2 < 1/b$ 那么 $\sqrt{S} = -i\sqrt{u_2}$,

令

$$y = \sqrt{\frac{u_2(1-au_2)}{1-bu_2}} \quad \left(0 < u_2 < \frac{1}{b} \right) \quad (3.34)$$

则 $\sqrt{f} = -iy$, 且 $0 < y < +\infty$, 由此易得

$$\begin{aligned} \int_I \exp[S\tau] V(\xi, S) dS = & -\int_0^{1/b} \frac{\exp[-u_2\tau]}{[yJ_1(y) - u_2 C_e J_0(y)]^2 + [yY_1(y) - u_2 C_e Y_0(y)]^2} \\ & \cdot \{y[J_0(\xi y)J_1(y) + Y_0(\xi y)Y_1(y)] - u_2 C_e [J_0(\xi y)J_0(y) + Y_0(\xi y)Y_0(y)] + \\ & + i[y\phi_{0,1}(\xi, 1, y) - u_2 C_e \phi_{0,0}(\xi, 1, y)]\} du_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

类似地可计算出 $\int_{\bar{I}}$ 和 $\int_{\mathbb{R}}$ 相加后得

$$\int_I + \int_{\bar{I}} = -2i \int_0^{1/b} \frac{\exp[u_2\tau] [y\phi_{0,1}(\xi, 1, y) - C_e u_2 \phi_{0,0}(\xi, 1, y)] du_2}{[yJ_1(y) - u_2 C_e J_0(y)]^2 + [yY_1(y) - u_2 C_e Y_0(y)]^2} \quad (3.36)$$

$$\text{由于函数 } y(u_1) = \sqrt{\frac{u_1(1-au_1)}{1-bu_1}} \quad \left(\frac{1}{a} < u_1 < +\infty \right) \quad (3.37)$$

$$u_1(y) = \frac{1}{2a} [1 + by^2 + \sqrt{(1+by^2)^2 - 4ay}], \quad (0 < y < +\infty) \quad (3.38)$$

都是单值单增的且互为反函数, 又 $u_1(0) = \frac{1}{a}$,

$$\text{函数 } y(u_2) = \sqrt{\frac{u_2(1-au_2)}{1-bu_2}}, \quad (0 < u_2 < \frac{1}{b}) \quad (3.39)$$

$$u_2(y) = \frac{1}{2a} [1 + by^2 - \sqrt{(1+by^2)^2 - 4ay^2}] \quad (0 < y < +\infty) \quad (3.40)$$

都是单值单增的且互为反函数, 又 $u_2(0) = 0$, 并在 $0 < y < +\infty$ 内有

$$\frac{du_i(y)}{dy} = 2yA_i(y), \quad A_i(y) > 0, \quad (i=1, 2) \quad (3.41)$$

其中 $A_i(y)$ 的表达式见(3.12)式, 那么(3.36)式可简化为

$$\begin{aligned} \int_I + \int_{\bar{I}} = & -4i \int_0^{+\infty} \frac{yA_2(y)\exp[-u_2(y)\tau]}{[yJ_1(y) - u_2 C_e J_0(y)]^2 + [yY_1(y) - u_2 C_e Y_0(y)]^2} \\ & \cdot [y\phi_{0,1}(\xi, 1, y) - C_e u_2 \phi_{0,0}(\xi, 1, y)] dy \end{aligned} \quad (3.42)$$

由类似方法可得

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} + \int_{\mathbb{R}^+} = & -4i \int_0^{+\infty} \frac{yA_1(y)\exp[-u_1(y)\tau]}{[yJ_1(y) - C_e u_1 J_0(y)]^2 + [yY_1(y) - C_e u_1 Y_0(y)]^2} \\ & \cdot [y\phi_{0,1}(\xi, 1, y) - C_e u_1 \phi_{0,0}(\xi, 1, y)] dy \end{aligned} \quad (3.43)$$

将(3.42)、(3.43)代入(3.33)式得(3.10)式。由(3.30)式及拉氏变换的卷积定理可得(3.7)式。

3. 有界地层问题的推导

易得方程(3.24)满足条件(3.26)和(3.28)的解为

$$\bar{\varphi}_1 = W(\xi, S)q(S) \quad (3.44)$$

$$\text{其中 } W(\xi, S) = \frac{\Phi_{0,1}(\xi, R, \sqrt{f})}{\sqrt{f} \Phi_{1,1}(1, R, \sqrt{f}) + C_e S \Phi_{0,1}(1, R, \sqrt{f})} \quad (3.45)$$

$$\Phi_{m,n}(\alpha, \beta, y) = K_m(\alpha y) I_n(\beta y) + (-1)^{m+n+1} I_m(\alpha y) K_n(\beta y) \quad (3.46)$$

不难证明 $S=0$ 为 $W(\xi, S)$ 的一阶极点. 当 $C=0$ 时 $S=-1/a$ 为 $W(\xi, S)$ 的一阶极点; 当 $C \neq 0$ 时 $S=-1/a$ 是 $W(\xi, S)$ 的可去奇点. 通过考查边值问题(3.24)、(3.26)、(2.28)对应的齐次边值问题的特征值, 易知

$$\sqrt{f} \Phi_{1,1}(1, R, \sqrt{f}) + C_e S \Phi_{0,1}(1, R, \sqrt{f}) = 0 \quad (3.47)$$

有无穷多个单根, 且只能落在负实轴上. 若令 $S = u \exp[\pi i] = -u$, $y = \sqrt{\frac{u(1-au)}{1-bu}}$ 则 $\sqrt{S} = i\sqrt{u}$, $\sqrt{f} = iy$. 再利用Bessel函数间的关系式可将方程(3.47)转化为(3.19).

在(3.19)式中 $u_i(y)$ ($i=1, 2$)为方程

$$au^2 - (1+by^2)u + y^2 = 0$$

的二个根, 其表达式及性质由(3.37)~(3.40)式给出.

易知方程(3.19)的根 α_n^i ($i=1, 2, n=1, 2, \dots$)都是实的单根, 且单调增加. 且 $n \rightarrow \infty$ 时, $\alpha_n^i \rightarrow +\infty$

$$\text{记 } S_n^i = -u_i(\alpha_n^i) \quad (i=1, 2, n=1, 2, \dots)$$

则 S_n^i 为方程(3.47)的单根, 由(3.37)~(3.40)式可知:

$$\dots < S_3^1 < S_2^1 < S_1^1 < -\frac{1}{a} < -\frac{1}{b} < \dots < S_3^2 < S_2^2 < S_1^2 < 0 \quad (3.48)$$

$$\text{且有 } \frac{d}{dS} \left[\Phi_{1,1}(1, R, \sqrt{S}) + \frac{C_e u_i}{\sqrt{f}} \Phi_{0,1}(1, R, \sqrt{f}) \right] \Big|_{S=S_n^i} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2y A_i(y) dy} \\ \cdot \frac{d}{dy} \left[\phi_{1,1}(1, R, y) + C_e \frac{u_i(y)}{y} \Phi_{0,1}(1, R, y) \right] \Big|_{y=\alpha_n^i} \quad (i=1, 2, n=1, 2, \dots) \quad (3.49)$$

由上式讨论可知函数 $W(\xi, S) \exp[S\tau]$ 在复平面上除去(3.48)式中各点后所得的区域单值解析, 且 $C=0$ 时 $S=0$, $S=-1/a$ 是它的二个一阶极点; $C \neq 0$ 时, $S=0$, $S=-1/a$ 分别是它的一阶极点与可去极点, 而 $S=-1/b$ 是非孤立奇点.

现在计算积分

$$v_2(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} W(\xi, S) \exp[S\tau] dS \quad (r>0) \quad (3.50)$$

以复平面的原点为中心, 以 R_k ($k=1, 2, \dots$ 且 $R_1 < R_2 < \dots < R_k < \dots$, $k \rightarrow \infty$, $R_k \rightarrow \infty$)为半径作一系列圆周如图2, 它们在直线 $Re s = \nu > 0$ 的左方部分记为 Γ_k , 它们与此直线的交点为 $\nu \pm i\delta_k$. 由 Γ_k 与直线段 $(\nu - i\delta_k, \nu + i\delta_k)$ 围成的封闭曲线记为 C_k , R_1 应选取适当大, 使 C_1 内部含点 S_1^1 , 再以 $-1/b$ 为中心, 以 ε_n 为半径作一系列圆围 l_n ($n=1, 2, \dots$ 且 $l_1 > l_2 > \dots$, $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$). 选取 l_1 内不含 $-1/a$, l_1 在 C_1 内, 且使 S_1^1 在 l_1 外. 不难证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{l_n} W(\xi, S) \exp[S\tau] dS = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_k} W(\xi, S) \exp[S\tau] dS = 0$$

那么由留数定理可得

$$\begin{aligned}
 v_2(\xi, \tau) = & \operatorname{res}\{W \exp[S\tau], 0\} + \operatorname{res}\left\{W \exp[S\tau], -\frac{1}{a}\right\} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res}\{W \exp[S\tau], S_n^1\} + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{res}\{W \exp[S\tau], S_n^2\} \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

易算得

$$\operatorname{res}\{W \exp[S\tau], 0\} = \frac{2}{R^2 - 1 + 2C_e} \quad (3.52)$$

$$\operatorname{res}\left\{W \exp[S\tau], -\frac{1}{a}\right\} = \begin{cases} \frac{2}{R^2 - 1} \left(\frac{b}{a} - 1\right) \exp\left[-\frac{\tau}{a}\right] & (C=0) \\ 0 & (C \neq 0) \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\operatorname{res}\{W \exp[S\tau], S_n^i\} = 2A_i(\alpha_n^i) \exp[-u_i(\alpha_n^i)\tau] G_i(\xi, R, y), \quad (i=1, 2; n=1, 2, \dots) \quad (3.54)$$

将上面各式代入(3.51)式中, 即得(3.16)式。

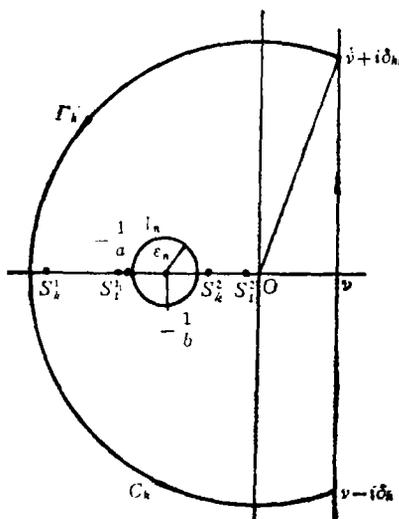


图 2

4. 外边界定压问题

其解法与封闭地层问题的解法类似, 此处从略。

四、均值油藏修流问题的精确解

在双重孔隙油藏透流问题的精确解中, 令 $\omega \rightarrow 1$, 取极限, 则 $A_1(y) \rightarrow 0, A_2(y) \rightarrow 1, u_1(y) \rightarrow \infty, u_2(y) \rightarrow y^2$, 可得均质油藏透流问题的精确解为:

(i) 无限大地层压力分布的精确解

$$P(r, t) = P_0 - \frac{\mu\theta}{2\pi kh} \int_0^t q(t-\eta) w_1\left(\frac{r}{r_{we}}, \theta\eta\right) d\eta \quad (4.1)$$

当 q 为常量时, 有

$$P(r, t) = P_0 - \frac{q\mu}{\pi^2 kh} \int_0^\infty \frac{1 - \exp[-u^2 \theta t]}{y^2} E_1 \left(\frac{r}{r_{we}}, y \right) dy \quad (4.2)$$

$$\text{其中 } w_1(\xi, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp[-y^2 \tau] E_1(\xi, y) dy \quad (4.3)$$

$$E_1(\xi, y) = \frac{\phi_{0,1}(\xi, 1, y) - C_e y \phi_{0,0}(\xi, 1, y)}{[J_1(y) - C_e y J_0(y)]^2 + [Y_1(y) - C_e y Y_0(y)]^2} \quad (4.4)$$

$$\text{这里 } C_e = C/2\pi\phi C_i h r_{we}^2 \quad (4.5)$$

(ii) 有界地层压力分布仍具有(4.1)式的精确解, 但(4.1)式中函数 w_1 应改为

$$w_2(\xi, \tau) = 2 \left\{ \frac{1}{R^2 - 1 + 2C_e} + \sum_{n=1}^\infty \exp[-\alpha_n^2 \theta t] E_2(\xi, R, \alpha_n) \right\} \quad (4.6)$$

当 q 为常量时, 有

$$P(r, t) = P_0 - \frac{\mu q}{\pi kh} \left[\frac{\theta t}{R^2 - 1 + 2C_e} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1 - \exp[-\alpha_n^2 \theta t]}{\alpha_n^2} E_2 \left(\frac{r}{r_{we}}, R, \alpha_n \right) \right] \quad (4.7)$$

$$\text{其中 } E_2(\xi, R, y) = \phi_{0,1}(\xi, R, \alpha_n) / N_2 \quad (4.8)$$

$$\text{式中 } N_2 = R \phi_{0,1}(R, 1, y) - \phi_{0,1}(1, R, y) - C_e y \left[R \phi_{0,0}(-R, 1, y) + \phi_{1,1}(1, R, y) - \frac{2}{y} \phi_{0,1}(1, R, y) \right]$$

α_n 是方程 $\phi_{1,1}(1, R, y) - C_e y \phi_{0,1}(1, R, y) = 0$ 的第 n 个正根($n=1, 2, \dots$).

(iii) 有界定压地层压力分布仍具有形如(4.1)式的精确表达式, 但(4.1)式中 w_1 应改为

$$w_3(\xi, \tau) = 2 \sum_{n=1}^\infty \exp[-\beta_n^2 \theta t] E_3(\xi, R, \beta_n) \quad (4.9)$$

当 $q(t) = q$ 为常量时, 有

$$P(r, t) = P_0 - \frac{\mu q}{\pi kh} \sum_{n=1}^\infty \frac{1 - \exp[-\beta_n^2 \theta t]}{\beta_n^2} E_3 \left(\frac{r}{r_{we}}, R, \beta_n \right) \quad (4.10)$$

$$\text{其中 } E_3(\xi, R, y) = \phi_{0,0}(\xi, R, y) / N_3 \quad (4.11)$$

$$\text{式中 } N_3 = R \phi_{1,1}(1, R, y) - \phi_{0,0}(1, R, y) - C_e y \left[\phi_{1,0}(1, R, y) + R \phi_{0,1}(1, R, y) - \frac{2}{y} \phi_{0,0}(R, 1, y) \right]$$

β_n 是方程 $\phi_{0,1}(1, R, y) - C_e y \phi_{0,0}(1, R, y) = 0$ 的第 n 个正根($n=1, 2, \dots$).

参 考 文 献

- [1] Баренблатт Г. И., Ю. Л. Желтов, ДАН СССР, 132(3)(1960), 545—548.
- [2] Баренблатт Г. И., Ю. Л. Желтов и И. Н. Кочина, ПММ, 24(5) (1960), 852—864.
- [3] Warren, J. E. and P. J. Root, Behavior of naturally fractured reservoirs, Soc. Pet. Eng. J., (1963), 245.
- [4] Bourdet, D., Pressure Behavior of Layered Reservoirs with Crossflow, SPE

- paper 13628(1985).
- [5] 陈钟祥、姜礼尚, 双重孔隙介质渗流方程组的精确解, *中国科学*, 2(1980), 152~165.
- [6] Bourdet, D. and A. C. Gringarten, Determination of fissure volume and block size in fractured reservoirs by type curve analysis paper SPE 9293 presented at the 55th Annual Fall Technical Conference and Exhibition of SPE of AIME, Dallas, (Sep, 21—24, 1980).
- [7] Mavor, M. J. and H. Cinco, Transient pressure behavior of naturally fractured reservoirs, paper SPE 7977 presented at the 1979 California Regional Meeting, Ventura, CA, (April 18—20, 1979).
- [8] Bourdet, D., J. A., Ayoub, T. M. Whittle, Y. M. Pirard, and V. Kniazeff, Interpreting well tests in fractured reservoirs, *World Oil* (1983), 77—87.
- [9] Stehfest, H, Algorithm 368, Numerical inversion of laplace transforms, *Communication of the ACM*, 13(1) (1970), 47—49.

The Exact Analytical Solutions to the New Model of Reservoir Filtration Problem

Li Xiao-ping Zhao Zi-gang

(Daqing Petroleum Institute, Anda)

Abstract

In this paper, under considering wellbore storage and skin, the new model of reservoir filtration problem is built by using coupled equations of double porous media filtration, and through various forms of limits we have obtained the exact analytical solutions of pressure distribution on two kinds of general reservoirs (fissure reservoir, homogeneous reservoir) and under three conditions, i. e. infinite boundary, finite sealed boundary and finite boundary at the constant pressure.

Key words reservoir filtration, new model, exact analytical solutions