

偏心环空中幂律流体层流螺旋流流动规律的研究*

李帮达 刘永健 张景富

(大庆石油学院开发系, 1992年5月15日)

摘 要

本文依据流体力学基本原理, 比较深入地研究了幂律流体在偏心环空中的层流螺旋流流动规律。文中探讨了偏心环空中幂律流体层流螺旋流视粘度分布、速度分布; 以及计算流量和压降的方法。分析了影响流场性质的因素, 并将部分结果与同心环空流理论作了对比。经过验证表明本文新的理论公式正确, 可用于钻井水力参数计算。

关键词 幂律流体 偏心环空 螺旋流 流量 压降 速度 视粘度

一、前 言

在石油钻井工程中, 特别是在定向井、水平井正常钻进时, 井眼中的上返泥浆液流属于偏心环空层流螺旋流, 而不是轴向流。

关于钻井泥浆的偏心环空层流螺旋流研究, 目前在国内外均属刚刚起步。有许多问题亟待解决。在本文中, 笔者对这一问题进行了新的探索性工作, 中心内容是将泥浆近似地当作幂律流体来处理, 从理论上研究了偏心环空中的幂律流体层流螺旋流流动规律。提出了视粘度分布、速度分布、流量及压降的解析函数表达式; 分析了影响流动的因素; 与同心环空螺旋流作了对比。另外, 文末还应用前人^[1]的研究成果对本文新理论进行了初步验证, 验证结果表明了本文理论的正确性。

二、偏心环空过流断面的几何特征

偏心环空任一过流断面均如图1所示, 由图1可知有下述两式成立, 即

$$h = (R_2^2 - e^2 \sin^2 \theta)^{1/2} - R_1 + e \cos \theta \quad (2.1)$$

$$R_0 = (R_2^2 - e^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + e \cos \theta \quad (2.2)$$

式中 e 为偏心距; R_1 , R_2 为内管(钻柱)、外管(井眼)半径; h 为任一 θ 角度处过流断面宽度; R_0 为偏心环空外边界距 O 点的距离。

* 吴望一推荐。

三、基本方程

1. 假设条件

研究偏心环空幂律流体层流螺旋流问题的假设条件：(1) 流道为无限长，任一过流断面如图1所示；(2) 等温、稳定的层流螺旋流，忽略二次流；(3) 泥浆在壁面无滑移；(4) 偏心环空外管静止，由管以恒定角速度 Ω 旋转；(5) 分析问题取圆柱坐标系，即 $O(r, \theta, z)$ ，且压力梯度 P 的作用方式如图2所示。

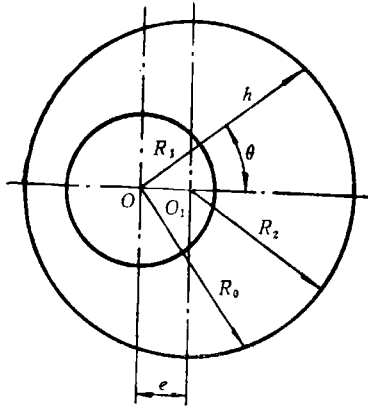


图 1 过流断面示意图

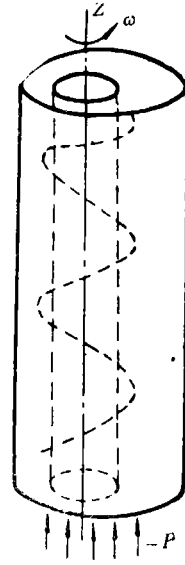


图 2 流道示意图

在本文假设条件下，偏心环空层流螺旋流速度分量可表示为：

$$\left. \begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= v_\theta(r, \theta) = r\omega \\ v_z &= v_z(r, \theta) = u \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式 (3.1) 中的 u 、 ω 分别为轴向速度及角速度； v_r 、 v_θ 、 v_z 及 r 、 θ 、 z 分别为速度分量柱坐标分量。

2. 一阶 Rivlin—Ericksen 张量及其第二不变量

根据一阶 Rivlin—Ericksen 张量 A_1 及其第二不变量 I 的定义，并结合本文的假设条件，可以得到：

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & r \frac{\partial \omega}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ r \frac{\partial \omega}{\partial r} & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\text{I} = \left[\left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.3)$$

3. 幂律流体的本构方程

对应本文研究的问题，幂律流体的本构方程可以表达为：

$$T = K \left[\left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} A_1 \quad (3.4)$$

$$\eta = K \left[\left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (3.5)$$

式中的 T 为偏应力张量， η 为幂律流体的粘度， K 为幂律流体稠度系数， n 为幂律流体性指数。

用 S 表示应力张量， I 为单位张量，则可得幂律流体的应力张量为：

$$S = -P'I + T \quad (3.6)$$

式中 P' 为静水压强， T 即为式(3.4)。

将 S 用应力分量表示，则有

$$S_{rr} = S_{\theta\theta} = S_{zz} = -P'$$

$$S_{r\theta} = S_{\theta r} = \eta r \frac{\partial \omega}{\partial r}$$

$$= K \left[\left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} r \frac{\partial \omega}{\partial r} \quad (3.7)$$

$$S_{rz} = S_{zr} = \eta \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$S_{\theta z} = S_{z\theta} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

4. 运动方程

在本文假设条件下，偏心环空中幂律流体层流螺旋流运动方程为：

r 方向：

$$-\rho r \omega^2 = \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta r}}{\partial \theta}$$

θ 方向：

$$0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 S_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial \theta} \quad (3.8)$$

z 方向：

$$\rho g + \rho \omega \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial S_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z}$$

式中的 ρ 为幂律流体密度， g 为重力加速度。

四、偏心环空中幂律流体层流螺旋流粘度分布

引进文献[1]~[3]的理论分析方法，在图1的任一 θ 角度处，解式(3.8)可得：

$$S_{r\theta} = \frac{B(\theta)}{[r(\theta)]^2} \quad (4.1)$$

$$S_{r\theta} = \frac{P}{2} r(\theta) + \frac{C(\theta)}{r(\theta)} \quad (4.2)$$

式中 $B(\theta)$, $C(\theta)$ 是某 θ 值时的积分常数, P 为压力梯度, $P = \frac{\partial P'}{\partial z} + \rho g$. 以下为书写方便, 将 $r(\theta)$, $B(\theta)$ 及 $C(\theta)$ 函数记为 r , B 和 C . 今令

$$\xi = \frac{r}{R_1 + h} = \frac{r}{R_0} \quad (4.3)$$

$$K_e = \frac{R_1}{R_0} \quad (4.4)$$

则可得

$$S_{r\theta} = \frac{\beta(\theta)}{\xi^2}, \quad \beta(\theta) = \frac{B}{R_0^2} \quad (4.5)$$

$$S_{rz} = \frac{PR_0}{z} \left\{ \xi^2 - \frac{[\lambda(\theta)]^2}{\xi} \right\}, \quad [\lambda(\theta)] = \frac{-zC}{PR_0} \quad (4.6)$$

为书写方便, 也将 $\beta(\theta)$, $\lambda(\theta)$ 记为 β 和 λ .

因为由式(4.5)、式(4.6)可知:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\beta}{\eta \xi} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{PR_0^2(\xi^2 - \lambda^2)}{z\eta\xi} \quad (4.8)$$

联立式(4.7)、式(4.8)及式(3.5)可得:

$$\eta = \eta(r, \theta) = K \frac{1}{n} \left[\frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{P^2 R_0^2 (\xi^2 - \lambda^2)^2}{4\xi^2} \right]^{\frac{n-1}{2n}} \quad (4.9)$$

式(4.9)便是偏心环空中幂律流体层流螺旋流的视粘度分布函数。

五、偏心环空中幂律流体层流螺旋流速度分布

1. 角速度分布

由式(4.7)与式(4.9)可得角速度 ω 为:

$$\omega = \int_1^\xi \frac{\beta d\xi}{K \frac{1}{n} \xi^n \left[\frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{P^2 R_0^2 (\xi^2 - \lambda^2)^2}{4\xi^2} \right]^{\frac{n-1}{2n}}} \quad (5.1)$$

2. 轴向速度分布

由(4.8)与(4.9)式可得轴向速度 u 为:

$$u = \frac{PR_0^2}{2} \int_1^\xi \frac{(\xi^2 - \lambda^2) d\xi}{K \frac{1}{n} \xi^n \left[\frac{\beta^2}{\xi^4} + \frac{P^2 R_0^2 (\xi^2 - \lambda^2)^2}{4\xi^2} \right]^{\frac{n-1}{2n}}} \quad (5.2)$$

3. 合速度 W

偏心环空中幂律流体层流螺旋流合速度为:

$$W = \sqrt{(r\omega)^2 + (u)^2} \quad (5.3)$$

六、偏心环空中幂律流体层流螺旋流流量

根据流量Q的定义可得:

$$\begin{aligned}
 Q &= 2 \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_0} u r dA = 2 \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_0} u r dr d\theta \\
 &= 2 \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_0} u R_0^2 \xi d\xi d\theta \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

解式(6.1)便可得偏心环空中幂律流体层流螺旋流流量为:

$$Q = \frac{P}{2} \int_0^\pi R_0^4 \left[\int_{K_e}^1 K_n^{-1} \left[\frac{\beta}{\xi^4} + \frac{P^2 R_0^2 (\xi^2 - \lambda^2)^2}{4\xi^2} \right]^{\frac{n-1}{2n}} d\xi \right] d\theta \tag{6.2}$$

由式(6.2), 可以很容易地求得平均流速为v

$$\begin{aligned}
 v &= Q / \pi (R_2^2 - R_1^2) \\
 v &= \frac{-P}{2\pi (R_2^2 - R_1^2)} \int_0^\pi R_0^4 \left[\int_{K_e}^1 K_n^{-1} \left[\frac{\beta}{\xi} + \frac{P^2 R_0^2 (\xi^2 - \lambda^2)^2}{4\xi^2} \right]^{\frac{n-1}{2n}} d\xi \right] d\theta \tag{6.3}
 \end{aligned}$$

七、偏心环空中幂律流体层流螺旋流压降

压降方程可以由式(6.2)或式(6.3)导出, 将式(6.2)及式(6.3)变换可得:

$$P = \frac{-2Q}{\int_0^\pi R_0^4 \left[\int_{K_e}^1 K_n^{-1} \left[\frac{\beta}{\xi^4} + \frac{P^2 R_0^2 (\xi^2 - \lambda^2)^2}{4\xi^2} \right]^{\frac{n-1}{2n}} d\xi \right] d\theta} \tag{7.1}$$

$$P = \frac{-2\pi (R_2^2 - R_1^2) v}{\int_0^\pi R_0^4 \left[\int_{K_e}^1 K_n^{-1} \left[\frac{\beta}{\xi^4} + \frac{P^2 R_0^2 (\xi^2 - \lambda^2)^2}{4\xi^2} \right]^{\frac{n-1}{2n}} d\xi \right] d\theta} \tag{7.2}$$

八、边界条件方程

分析前面的讨论可知, 要求解偏心环空中幂律流体层流螺旋流的各个流动参数, 必须先求出系数λ及β的值, λ, β的求解需要利用边界条件方程.

因为, 在某一压降P下, 当r=R₁或ξ=K_e时, 必有u=0, ω=Ω, 于是可得边界条件方程为式(7.1)或(7.2), 以及:

$$\Omega + \beta \int_{K_e}^1 K_n^{-1} \xi^3 \left[\frac{\beta}{\xi^4} + \frac{P^2 R_0^2 (\xi^2 - \lambda^2)^2}{4\xi^2} \right]^{\frac{n-1}{2n}} d\xi = 0 \tag{8.1}$$

$$\int_{K_e}^1 K_n^{-1} \xi^3 \left[\frac{\beta}{\xi^4} + \frac{P^2 R_0^2 (\xi^2 - \lambda^2)^2}{4\xi^2} \right]^{\frac{n-1}{2n}} d\xi = 0 \tag{8.2}$$

具体计算需应用迭代算法。计算步骤是：①先假定一个 P 值，在已知 $R_1, R_2, n, K, \rho, \Omega$ 及 Q （或 v ）的条件下，利用式(8.1)与式(8.2)求出 λ 及 β 值。②利用式(7.1)或式(7.2)，通过迭代运算，验算由步骤①所得到的一组 P, λ 及 β 值。若所得 λ, β 值适合压降方程则为所求，否则重新假定 P ，重复步骤①，直到得到满足压降方程的 P, λ 及 β 值为止。运算时应注意到 λ, β 是 θ 的函数，得到了 λ, β 后便可计算其它参数了。

九、数值模拟、验证及分析

图3是视粘度分布图示例之一。数值模拟结果表明：中、小偏心距条件下，随着内管转速的增加视粘度下降； Ω 值越高，偏心环空的宽、窄间隙处的视粘度差值越小。当偏心距增加时，偏心环空宽、窄间隙处视粘度差值明显增大。流性指数 n 值与视粘度的关系是随着 n 值增大，视粘度分布会趋于均匀， $n=1$ 时视粘度是常数，即牛顿流体粘度

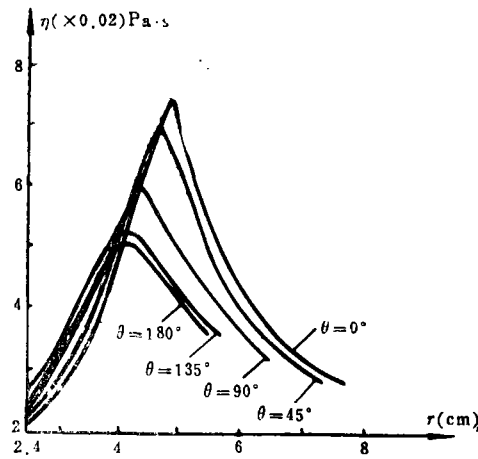


图 3 视粘度分布

图4是速度分布的数值模拟结果示例之一。由数值模拟知道：内管转速增加，轴向速度分量有所增加，特别是窄间隙处轴向速度增值幅度大，从而可知内管旋转对定向井及水平井泥

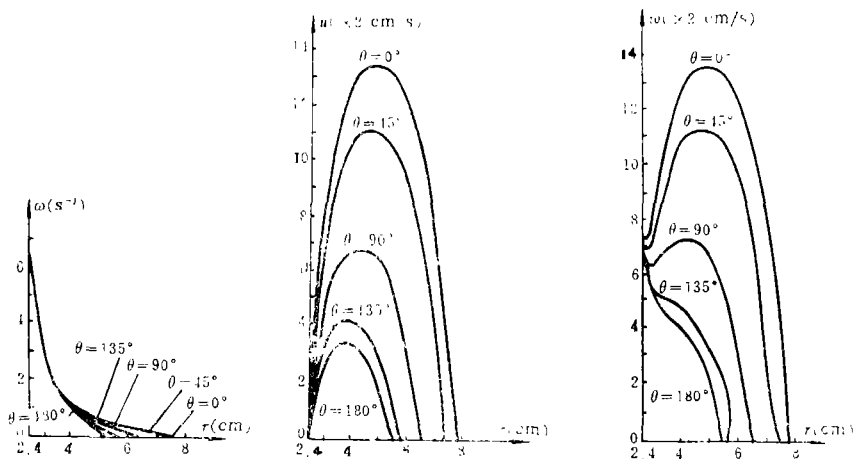


图 4 速度分布

浆携带岩屑有利。偏心距对速度的分布影响规律与偏心环空轴向流的情况相类似，但当偏心距达最大值时，内管转速几乎不影响宽间隙处的速度分布。流性指数 n 值对偏心环空层流螺旋流速度分布有影响， n 值减小时，速度分布曲线变得平坦。

图5、图6是流量 Q 的模拟计算结果。由图可知内管转速增加 Q 会增大，这和速度分布模拟结果吻合；偏心距增加 Q 会增大，这与轴向流规律一致，显然这是合理的结论。

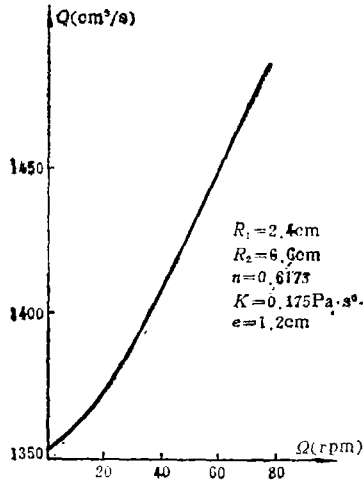


图5 流量-内管转速关系曲线

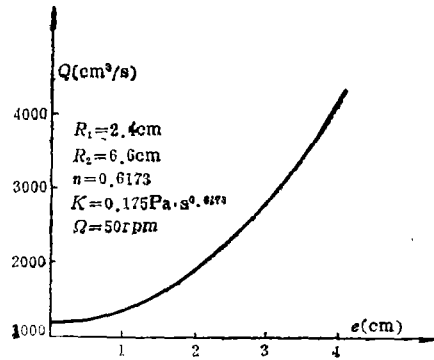


图6 流量-偏心距e关系曲线

本文数值模拟表明，将偏心环空螺旋流当成同心环空轴向流处理误差大。以压降为例则误差为20%左右，并且由轴向流公式得到的计算值偏高。

将 $e=0$ 代入本文理论公式中，其它输入参数与文献[1]相同，计算结果见表1。表1可以证明在特殊情况下，本文理论与刘希圣教授的精确理论相符合，从而初步验证了本文理论及分析方法的正确性。

表 1 验证结果比较表

输入参数		文献[1]理论值			本文所得结果			相对误差		
P ($\times 10\text{Pa}$)	Ω (rpm)	平均流速 (cm/s)	λ	β	平均流速 (cm/s)	λ	β	平均流速 (cm/s)	λ	β
-0.75648	0	10	0.645987	0	9.96378	0.645967	0	0.36%	0	0
-4.74381	10	10	0.645179	-0.256708	9.97203	0.645351	-0.258335	0.28%	0.03%	1.8%
-4.70609	20	10	0.644396	-0.504102	9.96237	0.643876	-0.503243	0.38%	0.08%	0.17%
-4.66554	30	10	0.641736	-0.727903	9.98283	0.641896	-0.730147	0.17%	0.02%	0.63%
-4.61690	40	10	0.669513	-0.941951	9.99803	0.669652	-0.939562	0.02%	0.02%	0.25%
-4.57133	50	10	0.637000	-1.13475	10.0322	0.637387	-1.13263	0.32%	0.05%	0.2%
-4.50833	60	10	0.664900	-1.31246	1000113	0.634971	-1.31318	0.11%	0.01%	0.05%
-4.39364	80	10	0.63059	-1.63872	9.99671	0.630518	-1.64019	0.06%	0.01%	0.09%

十、结 论

通过理论推导及分析，可以得到以下结论：

1. 本文建立的视粘度、速度、流量及压降方程式经与刘希圣教授等所得结论对比验

证,表明是正确的,可用于钻井水力参数计算。

2. 内管转速、偏心距及流性指数等对偏心环空中幂律流体层流螺旋流流动规律有明显影响。内管转速增加,偏心环空宽、窄间隙处视粘度差减小;偏心距增加,宽、窄间隙处视粘度差增加; n 值增大,视粘度分布将趋于均匀。内管转速增加,轴向速度分量增加,且窄间隙处轴向速度增值大,这样对定向井、水平井泥浆携屑有利;偏心距增加,轴向速度沿圆周方向分布不均性增强; n 值对速度分布的影响与周知的情形相同。随着内管转速增加以及偏心距增加流量会增大。

3. 用轴向流压降公式近似处理偏心环空螺旋流问题,计算值会偏高误差大。

参 考 文 献

- [1] 瞿应虎、刘希圣, 环形空间内幂律液体螺旋流层流流场性质的分析, 华东石油学院学报, 3(1985).
- [2] 刘永建、陈家琅, 偏心环空中幂律流体轴向流压降计算, 石油钻采工艺, 5(1989)
- [3] 李邦达、刘永建, 偏心环空中幂律流体层流螺旋流的流量及压降, 石油钻采工艺, 5(1991).

Studies on the Law of Laminar Helical Flow of Power-Law Fluid in Eccentric Annuli

Li Bang-da Liu Yong-jian Zhang Jing-fu

(Daqing Petroleum Institute, Anda)

Abstract

According to the principle of fluid mechanics, the law of laminar helical flow of power-law fluid in eccentric annuli is studied intensively in this paper. The apparent viscosity, velocities distribution of laminar helical flow of power-law fluid are discussed and calculating methods of flow rate and pressure loss are presented. The factors influencing flow are also analysed. On the basis of theoretical studies some new results of the present paper are compared with the theories of the helical flow of the power-law fluid in concentric annuli. The test verified that theoretical formulas in this article are proper and general. They can be used for calculating hydraulic parameters in drilling engineering.

Key words power-law fluid, eccentric laminar helical flow, flow rate, pressure loss, velocity, apparent viscosity