应用数学和力学，第14卷第7期（1993年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

完备凸度量空间中(次)相容和集值广义非扩张映象的公共不动点定理*

刘立山

（曲阜师范大学数学系，1992年1月5日收到）

摘要

本文在完备凸度量空间中，利用集值和单值映象（次）相容的一些条件，建立了数值广义非扩张映象存在公共不动点的一个充要条件和一个充分条件。我们的结果改进、扩充和发展了文[2～7]中的主要结果。

关键词 凸度量空间 （次)相容映象 集值广义非扩张映象 公共不动点

一、引言

Sessa在[1]中引入了度量空间(X, d)上两个单值映象弱可换的概念，(X, d)上的自映象对(T, I)称为弱可换的，若对任意$x, y\in X$，有

$$d(TIx, ITx)\leqslant d(Tx, Ix).$$

最近，Fisher和Sessa[2]对弱可换映象对(T, I)推广了Gregus[3]的一个定理，得到了如下的结果：

定理1.1 设C是Banach空间中的非空闭凸子集，T和I是C上的弱可换映象对，且对任意$x, y\in C$有

$$\|Tx-Ty\|\leqslant a\|Ix-Iy\|+(1-a)\max\{\|Tx-Ix\|, \|Ty-Iy\|\},$$

其中 $0<a<1$. 若I是线性的，非扩张的且$TC\subseteq IC$，则T和I在C中存在唯一公共不动点.

Mukherjee和Verma[4]证明了定理1.1中的"I是线性的"可以用"I是仿射的"代替. 最近，Jungck[5]证明了定理1.1中的(T, I)弱可换可以用相容代替且I非扩张可以用I连续代替.

本文的目的是利用集值和单值映象之间(次)相容的一些条件进一步改进和推广定理1.1. 我们在完备的凸度量空间中建立了集值广义非扩张映象存在公共不动点的一个充要条件和一个充分条件.我们的结果改进，扩充和发展了Fisher和Sessa[2]，Mukherjee和Verma[4]，Jungck[5]，Li[6]，Fisher[7]，Gregus[3]等中的主要结果.

* 张石生推荐. 1989年5月22日第一次收到.

二、定义和引理

设(X, d)是一个完备度量空间，$B(X)$是X中所有非空有界子集全体．同[8～11]一样，定义函数$\delta: B(X)\times B(X)\to[0, \infty)$如下：

$\delta(A, B)=\sup\{d(a,b): a\in A, b\in B\}$， $\forall A, B\in B(X)$，且简记$\delta(\{a\},B)=\delta(a,B)$，$\delta(\{a\}, \{b\})=d(a, b)$．从定义易知，对$\forall A, B, C\in B(X)$有

$$\delta(A, B)=\delta(B, A)\geqslant 0, \quad \delta(A, B)\leqslant\delta(A, C)+\delta(C, B),$$

$$\delta(A, A)=\mathrm{diam}A, \quad \delta(A, B)=0\Leftrightarrow A=B=\{a\}.$$

定义2.1([8,10]) X中的一个集列$\{A_n\}$称为收敛到X中的一个子集A(简记为$A_n\to A$)，若满足：

(i) $\forall a\in A$，X中存在一个序列$\{a_n\}$使得$a_n\in A_n(n=1,2,\cdots)$且$\{a_n\}$收敛到a；

(ii) $\forall\varepsilon>0$，存在正整数N，使得$n>N$时，有$A_n\subseteq A_\varepsilon$，其中$A_\varepsilon=\{x\in X: d(x,a)<\varepsilon, a\in A\}$．

引理2.1([8,10]) 设$\{A_n\}$和$\{B_n\}$是$B(X)$中的两个集列，若$A_n\to A$，$B_n\to B$，则$\delta(A_n, B_n)\to\delta(A, B)$．

引理2.2([10]) 设$\{A_n\}$是$B(X)$中的集列，$y\in X$，若$\delta(A_n, y)\to 0$，则$\{A_n\}$在$B(X)$中收敛到$\{y\}$．

定义2.2([8,10]) 设$F: X\to B(X)$，$x\in X$．若对任意收敛于x的序列$\{x_n\}$都有$Fx_n\to Fx$，则称F在点x连续；若F在X中的每一点连续，则称F在X上连续．

最近，Jungck[12]用下列方式扩充了自映象对弱可换的概念：

定义2.3 (X, d)上的自映象对(f, g)称为相容的，若对满足$fx_n\to t$，$gx_n\to t$，$t\in X$的任何序列$\{x_n\}$都有$d(fgx_n, gfx_n)\to 0$．

可以看出：弱可换是相容的，反之不成立，例子可见[12]．在[13]中，我们引入了一个集值映象和一个单值映象相容和次相容的概念．

定义2.4 设$f: X\to X$，$F: X\to B(X)$，若对满足$fFx_n\in B(X)$，$Fx_n\to\{t\}$和$fx_n\to t$，$t\in X$的任何序列$\{x_n\}$都有$\delta(Ffx_n, fFx_n)\to 0$，则称$(F, f)$相容．

定义2.5 $f: X\to X$和$F: X\to B(X)$称为次相容的，若$\{t\in X: Ft=\{ft\}\}\subseteq\{t\in X: Fft=fFt\}$．

注2.1 在[13]中我们已指出：(F, f)可换$\Rightarrow(F, f)$轻微可换[10]$\Rightarrow(F, f)$相容$\Rightarrow(F, f)$次相容，但是反之不成立．

定义2.6([14,15]) 映象$W: X\times X\times[0,1]\to X$称为$X$上的一个凸结构，如果对任意$(x, y, \lambda)\in X\times X\times[0,1]$和一切$u\in X$都有

$$d(u, W(x,y,\lambda))\leqslant\lambda d(u,x)+(1-\lambda)d(u,y).$$

具有凸结构的度量空间称为凸度量空间．度量空间(X, d)的一个子集K称为凸的，如果对任意$(x,y,\lambda)\in K\times K\times[0,1]$有$W(x,y,\lambda)\in K$．本文总是用$(X,d,W)$表示一个凸度量空间．

易知，任何线性赋范空间以及它们的凸子集都是凸度量空间．

让Φ表示一个函数族，其中Φ中的元φ：$[0,\infty)\to[0, \infty)$是右连续的，且对任意$t>0$，

有$\varphi(2t)<t$.

引理2.3 设K是完备度量空间(X, d)中的非空闭子集，若$f:K\to K$和$F:K\to B(K)$对任意$x,y\in K$满足下列不等式

$$\delta(Fx, Fy)\leqslant ad(fx, fy)+\varphi(2\max\{\delta(Fx,fx), \delta(Fy,fy)\}) \tag{2.1}$$

其中$0\leqslant a<1$，$\varphi\in\Phi$，则

(i) F和f在K中至多有一个不动点u，且进一步地有$Fu=\{u\}$;

(ii) 若对K中的某一个序列$\{x_n\}$有$\delta(Fx_n,fx_n)\to 0$，则存在$u\in K$使得$Fx_n\to\{u\}$，$fx_n\to u$.

证 (i) 设$u_i=fu_i\in Fu_i$ $(i=1,2)$，则由不等式(2.1)可得

$$\begin{aligned}\delta(Fu_i, u_i)&\leqslant\delta(Fu_i, Fu_i)\\&\leqslant\varphi(2\delta(Fu_i, u_i)),\end{aligned}$$

由此并注意到$\varphi\in\Phi$可得$Fu_i=\{u_i\}$. 再利用不等式(2.1)可得

$$\begin{aligned}d(u_1, u_2)&=\delta(Fu_1, Fu_2)\\&\leqslant ad(fu_1, fu_2)+\varphi(2\max\{\delta(Fu_1,fu_1), \delta(Fu_2,fu_2)\})\\&=ad(u_1, u_2),\end{aligned}$$

由此及$0\leqslant a<1$可知$u_1=u_2$，故(i)得证.

(ii) 假设$\{x_n\}$是K中满足下式的序列

$$\delta(Fx_n, fx_n)\to 0. \tag{2.2}$$

我们证明$\{fx_n\}$是一Cauchy序列. 对任意正整数m,n，由三角不等式及(2.1)式可知

$$\begin{aligned}d(fx_m, fx_n)&\leqslant\delta(fx_m, Fx_m)+\delta(Fx_m, Fx_n)+\delta(Fx_n, fx_n)\\&\leqslant ad(fx_m, fx_n)+\varphi(2\max\{\delta(Fx_m,fx_m), \delta(Fx_n,fx_n)\})\\&\quad+\delta(fx_m, Fx_m)+\delta(Fx_n, fx_n),\end{aligned}$$

由上式并注意到$0\leqslant a<1$可得

$$\begin{aligned}d(fx_m, fx_n)\leqslant\frac{1}{1-a}[&\delta(fx_m, Fx_m)+\delta(Fx_n, fx_n)\\&+\varphi(2\max\{\delta(Fx_m,fx_m), \delta(Fx_n,fx_n)\})],\end{aligned}$$

从而由(2.2)式及$\varphi\in\Phi$可知$\{fx_n\}$是K中的一个Cauchy序列；由K的闭性可知，存在$u\in K$使得$\{fx_n\}$收敛到u，进一步地，从

$$\delta(Fx_n, u)\leqslant\delta(Fx_n, fx_n)+d(fx_n, u)$$

及(2.2)式得到$\delta(Fx_n, u)\to 0$，于是由引理 2.2 可知集列$\{Fx_n\}$在$B(X)$中收敛到集$\{u\}$，故(ii)得证.

三、单值与集值映象的公共不动点定理

定理3.1 设K是完备度量空间(X, d)中的非空闭子集，$F:K\to B(K)$和$f:K\to K$满足不等式(2.1). 如果F和f满足下列条件之一：

(H_1) (F, f)相容且f连续；

(H_2) (F, f)相容，$FK\subseteq fK$且F连续；

(H_3) (F, f)次相容且f是满映象，

则F和f在K中存在唯一公共不动点u且$Fu=\{u\}$的充要条件是

$$\inf\{\delta(Fx,\ fx): x\in K\}=0.$$

证 必要性显然，为了证充分性，令$\{x_n\}$是泛函$\delta(Fx,\ fx)$在K中的极小化序列，即

$$\delta(Fx_n,\ fx_n)\to\inf\{\delta(Fx,fx): x\in K\}=0,$$

于是由引理2.3(ii)可知，存在$u\in K$使$\{fx_n\}$收敛到u且$\{Fx_n\}$收敛到$\{u\}$.

假设(H_1)成立，则$\{f^2x_n\}$和$\{fFx_n\}$分别收敛到fu和$\{fu\}$. 因为

$$\delta(Ffx_n,\ fu)\leqslant\delta(Ffx_n,\ fFx_n)+\delta(fFx_n,\ fu)$$

且$(F,\ f)$相容，所以$\delta(Ffx_n,\ fu)\to 0$，从而由引理 2.2 可知$\{Ffx_n\}$收敛到$\{fu\}$，利用不等式(2.1)可得

$$\delta(Ffx_n,\ Fx_n)\leqslant ad(f^2x_n,\ fx_n)+\varphi(2\max\{\delta(Ffx_n,f^2x_n),\ \delta(Fx_n,fx_n)\}),$$

于上式令$n\to\infty$，并由引理2.1可得$fu=u$. 再利用不等式(2.1)得

$$\delta(Fx_n,\ Fu)\leqslant ad(fx_n,\ fu)+\varphi(2\max\{\delta(Fx_n,fx_n),\ \delta(Fu,fu)\}),$$

令$n\to\infty$由引理2.1可得

$$\delta(u,\ Fu)\leqslant\varphi(2\delta(Fu,\ u)),$$

从而由$\varphi\in\Phi$可知$Fu=\{u\}$，故由引理2.3(i)可知u是F和f在K中的唯一公共不动点且$Fu=\{u\}$.

假设(H_2)成立，则$\{Ffx_n\}$收敛到Fu. 任取$u_n\in Fx_n,n=1,2,\cdots$，则由$d(u_n,u)\leqslant\delta(Fx_n,u)$及$F$连续可得$\{Fu_n\}$收敛到$Fu$. 利用不等式(2.1)可知

$$\begin{aligned}\delta(Fu_n,\ Fx_n)&\leqslant ad(fu_n,\ fx_n)+\varphi(2\max\{\delta(Fu_n,fu_n),\ \delta(Fx_n,fx_n)\})\\&\leqslant a[\delta(fFx_n,\ Ffx_n)+\delta(Ffx_n,\ fx_n)]\\&\quad+\varphi(2\max\{\delta(Fu_n,\ Ffx_n)+\delta(Ffx_n,fFx_n,\ \delta(Fx_n,fx_n)\}),\end{aligned}$$

令$n\to\infty$，由引理2.1和(2.2)式，并注意到$\varphi\in\Phi$且$(F,\ f)$相容可知

$$\delta(Fu,\ u)\leqslant a\delta(Fu,\ u)+\varphi(2\delta(Fu,\ u))\tag{3.1}$$

再利用不等式(2.1)可知

$$\begin{aligned}\delta(Fu_n,\ Fu_n)&\leqslant\varphi(2\delta(Fu_n,\ fu_n))\\&\leqslant\varphi(2\delta(Fu_n,\ Ffx_n)+2\delta(Ffx_n,\ fFx_n)),\end{aligned}$$

令$n\to\infty$，由$(F,\ f)$的相容性及引理2.1可推出

$$\delta(Fu,\ Fu)\leqslant\varphi(2\delta(Fu,\ u)),$$

由此可知$\delta(Fu,\ Fu)=0$，故由(3.1)式可推出$Fu=\{u\}$.又因为$FK\subseteq fK$，所以存在$w\in K$使$fw=u$且由不等式(2.1)可得

$$\delta(Fx_n,\ Fw)\leqslant ad(fx_n,\ fw)+\varphi(2\max\{\delta(Fx_n,fx_n),\ \delta(Fw,fw)\}),$$

令$n\to\infty$由(2.2)式可知

$$\delta(u,\ Fw)\leqslant\varphi(2\delta(Fw,\ u)),$$

由此可知$Fw=\{u\}$. 因为$(F,\ f)$相容，所以$\{u\}=Fu=Ffw=fFw=\{fu\}$，故由引理2.3(i)可知u是F和f在K中的唯一公共不动点.

最后假设(H_3)成立，则存在$v\in K$使得$fv=u$，由不等式(2.1)知

$$\delta(Fv,\ Fx_n)\leqslant ad(fv,\ fx_n)+\varphi(2\max\{\delta(Fv,fv),\ \delta(Fx_n,fx_n)\}),$$

令$n\to\infty$由引理2.1可得

$$\delta(Fv,\ u)\leqslant\varphi(2\delta(Fv,\ u))$$

由此可知$Fv=\{u\}$，从而由$(F,\ f)$次相容可知$Fu=Ffv=fFv=\{fu\}$. 再由不等式(2.1)可知

$$\delta(Fu,\ Fx_n)\leqslant ad(fu,\ fx_n)+\varphi(2\max\{\delta(Fu,fu),\ \delta(Fx_n,fx_n)\})$$

令$n\to\infty$由引理2.1可得

$$d(fu,\ u)\leqslant\delta(Fu,\ u)\leqslant ad(fu,\ u),$$

由此可知$fu=u$，故由引理2.3(i)可知u是F和f在K中的唯一公共不动点．证毕．

推论3.1 设K是完备度量空间$(X,\ d)$中的非空闭子集，$F:K\to B(K)$，$f:K\to K$且对任意$x,y\in K$有

$$\delta(Fx,\ Fy)\leqslant ad(fx,\ fy)+2b\max\{\delta(Fx,fx),\ \delta(Fy,fy)\},$$

其中$0\leqslant a<1$，$0\leqslant 2b<1$．如果F和f满足定理3.1中的条件$(H_1)\sim(H_3)$之一，则F和f在K中有唯一公共不动点u且$Fu=\{u\}$的充要条件是

$$\inf\{\delta(Fx,fx):x\in K\}=0.$$

证 令$\varphi(t)=bt$，$t\in[0,\ \infty)$，则$\varphi\in\Phi$，故由定理3.1可知推论3.1的结论成立．

定理3.2 设K是完备凸度量空间(X,d,w)中的非空闭子集，$F:K\to B(K)$，$f:K\to K$且对任意$x,y\in K$有

$$\delta(Fx,\ Fy)\leqslant ad(fx,\ fy)+(1-a)\max\{\delta(Fx,fx),\ \delta(Fy,fy)\} \tag{3.2}$$

其中$0<a<1$．如果fK是K的一个凸子集，$FK\subseteq fK$且F和f满足定理3.1中的条件$(H_1)\sim(H_3)$之一，则F和f在K中存在唯一的公共不动点u且$Fu=\{u\}$．

证 任取$x_0=x\in K$，由$FK\subseteq fK$可知，存在$x_1,x_2,x_3\in K$使得

$$fx_1\in Fx,\qquad fx_2\in Fx_1,\qquad fx_3\in Fx_2.$$

对于$i=1,2,3$，利用不等式(3.2)可知

$$\begin{aligned}\delta(Fx_i,\ fx_i)&\leqslant\delta(Fx_i,\ Fx_{i-1})\\&\leqslant ad(fx_i,\ fx_{i-1})+(1-a)\max\{\delta(Fx_i,fx_i),\ \delta(Fx_{i-1},fx_{i-1})\}\\&\leqslant a\delta(Fx_{i-1},\ fx_{i-1})+(1-a)\max\{\delta(Fx_i,fx_i),\ \delta(Fx_{i-1},fx_{i-1})\},\end{aligned}$$

由此可知

$$\delta(Fx_i,\ fx_i)\leqslant\delta(Fx_{i-1},\ fx_{i-1}),$$

故对于$i=1,2,3$有

$$\delta(Fx_i,\ fx_i)\leqslant\delta(Fx,\ fx) \tag{3.3}$$

令

$$z=W\left(fx_2,\ fx_3,\ \frac{1}{2}\right),$$

则$z\in K$，从而由fK凸可知，存在$w\in K$使得

$$fw=z=W\left(fx_2,\ fx_3,\ \frac{1}{2}\right)\subseteq W\left(Fx_1,\ Fx_2,\ \frac{1}{2}\right).$$

由凸结构的定义及(3.2)和(3.3)式可知

$$\begin{aligned}d(fx_1,\ fw)&\leqslant\delta\left(fx_1,\ W\left(Fx_1,\ Fx_2,\ \frac{1}{2}\right)\right)\\&\leqslant\frac{1}{2}[\delta(fx_1,\ Fx_1)+\delta(fx_1,\ Fx_2)]\\&\leqslant\frac{1}{2}[\delta(fx,\ Fx)+\delta(Fx,\ Fx_2)]\end{aligned}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[\delta(fx,\ Fx)+ad(fx,\ fx_2)+(1-a)\max\{\delta(Fx,fx),\ \delta(Fx_2,fx_2)\}]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[\delta(Fx,\ fx)+a\delta(fx,\ fx_1)+a\delta(fx_1,\ fx_2)+(1-a)\delta(Fx,\ fx)]$$

$$\leqslant\frac{2+a}{2}\delta(Fx,\ fx) \tag{3.4}$$

$$d(fx_2,\ fw)=d\left(fx_2,\ W\left(fx_2,\ fx_3,\ \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}d(fx_2,\ fx_3)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\delta(Fx,\ fx) \tag{3.5}$$

从而由(3.4)和(3.5)式以及不等式(3.2)可得

$$\delta(Fw,\ fw)\leqslant\delta\left(Fw,\ \ W\left(Fx_1,\ Fx_2,\ \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[\delta(Fw,\ Fx_1)+\delta(Fw,\ Fx_2)]$$

$$\leqslant\frac{a}{2}[d(fw,\ fx_1)+d(fw,\ fx_2)]+(1-a)\max\{\delta(Fw,fw),\ \delta(Fx,fx)\}$$

$$\leqslant\frac{a(3+a)}{4}d(Fx,\ fx)+(1-a)\max\{\delta(Fw,fw),\ \delta(Fx,fx)\}$$

由此可推出

$$\delta(Fw,\ fw)\leqslant\alpha\delta(Fx,\ fx),$$

其中$\alpha=\frac{4-a-a^2}{4}<1$. 因为

$$\inf\{\delta(Fx,fx):x\in K\}\leqslant\inf\left\{\delta(Fw,fw):fw=W\left(fx_2,\ fx_3,\ \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$\leqslant\alpha\inf\{\delta(Fx,fx):x\in K\},$$

所以

$$\inf\{\delta(Fx,fx):x\in K\}=0,$$

故由推论3.1可知定理3.2的结论成立．证毕．

注3.1 定理3.2改进，扩充和发展了[5]中的定理2.1，[2]中的定理2和[4]中的定理3．

推论3.2 设K是完备凸度量空间$(X,\ d,\ W)$中的非空闭子集，K上的单值自映象对T和I满足$TK\subseteq IK$，IK是K的凸子集，且对任意$x,y\in K$有

$$d(Tx,\ Ty)\leqslant ad(Ix,\ Iy)+2b\max\{d(Tx,Ix),\ d(Ty,Iy)\}$$
$$+c[d(Ty,\ Ix)+d(Tx,\ Iy)],$$

其中$a\geqslant0$，$b\geqslant0$，$c\geqslant0$是满足下列条件之一的常数：

(i) $0<a<1$，$a+2b\leqslant1$，$c=0$；

(ii) $bc\neq 0$, $a+2b+2c\leqslant 1$.

如果T和I满足下列条件之一：

(G_1) (T, I)相容且I连续；

(G_2) (T, I)相容且T连续；

(G_3) (T, I)次相容且I是K上的满映象，

则T和I在K中存在唯一的公共不动点.

证 假设条件(i)成立，则由定理3.2可知结论成立. 假设条件(ii)成立，则类似[16]中定理1的证明可证结论成立. 这里我们略去证明的细节.

注3.2 推论3.2改进，扩充和统一了[16]中的定理1和定理3及[6]中定理1和定理2. 顺便指出：当$c\neq 0$时，[6]中定理2的映象T不是广义非扩张的，而是拟-压缩映象(见[17]).

致谢 张石生教授和周家云教授审查了本文，并提出了许多有价值的修改意见，作者在此对他们表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Sessa, S., On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, *Publ. Inst. Math.*, 32(46) (1982), 149-153.

[2] Fisher, B. and S. Sessa, On a fixed point theorem of Gregus, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, 9(1986), 23-28.

[3] Gregus, Jr. M., A fixed point theorem in Banach space, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (5) 17-A (1980), 193-198.

[4] Mukher,Jee, R.N. and V., Verma, A note on a fixed point theorem of Gregus, *Math. Japon.*, 33(1988), 745-749.

[5] Jungck, G., On a fixed point theorem of Fisher and Sessa, *Internat. J. Math. & Math. Sci*, 13(1990), 497-500.

[6] 李秉友，凸度量空间中非扩张映象的不动点定理，应用数学和力学，10(2) (1989), 173-178.

[7] Fisher, B., Common fixed points on a Banach space, *Chung Juan J.*, XI (1982), 12-15.

[8] Fisher, B., Common fixed points of mappings and set-valued mappings, *Rostock. Math. Kolloq.*, 18(1981), 69-77.

[9] Sessa, S. and B. Fisher, On common fixed points of weakly commuting mappings and set-valued mappings, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, 9(1986), 323-329.

[10] Imdad, M., M. S. Khan, and S. Sessa, On some weak conditions of commutativity in common fixed point theorems, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, 11 (1988), 289-296.

[11] Naidu, S.V.R. and J. R. Prasad, Fixed point theorems for a pair of set-valued maps on a metric space, *Nonlinear Anal. T.M.A.*, 10(1986), 1421-1426.

[12] Jung, G., Compatibble mappings and common fixed points, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, 9(1986), 771-779.

[13] 刘立山，关于单值映象对和多值映象对的公共不动点，曲阜师大学报，18(1) (1992), 6-10.

[14] Takahashi, W., A convexity in metric space and nonexpansive mappings,

Kodai Math. Sem. Kep., 22(1970), 142-149.

[15] Guay, M. D., K. L. Singh, and J. H. M. Whitfield, Fixed point theorems for nonexpansive mappings in convex metric spaces, *Proceedings Conference on Nonlinear Analysis* (Ed. by S. P. Singh and J. H. Burry), Marcel Dekker, Inc., New York, 80(1982), 179-189.

[16] 赵汉宾，Banach空间中平均非扩张映象，不动点的存在定理，数学学报，22(4) (1979)，459-469.

[17] 张石生，《不动点理论及其应用》，重庆出版社(1984).

Common Fixed Point Theorems for (sub) Compatible and Set-Valued Generalized Nonexpansive Mappings in Complete Convex Metric Spaces

Liu Li-shan

(Department of Mathematics, Qufu Normal University, Qufu)

Abstract

In this paper, using some conditions of (sub) compatibility between a set-valued mapping and a single-valued mapping, we establish a necessary and sufficient condition and a sufficient condition for set-valued generalized nonexpansive mappings to have a unique common fixed point in complete convex metric spaces. Our results improve, extend and develop the main results in [2～7].

Key words convex metric spaces, (sub) compatible mapping, set-valued generalized nonexpansive mapping, common fixed points