应用数学和力学，第14卷第6期(1993年6月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

带有任意形状初缺陷的弹性圆柱壳冲击扭转屈曲

王德禹　张善元　杨桂通

(太原工业大学应用力学研究所，1992年3月23日收到)

摘　要

本文给出带有初缺陷的弹性圆柱壳在阶跃突加扭矩作用下的冲击屈曲摄动分析，而且初缺陷假设为小量但其形状是任意的．研究表明影响临界冲击扭矩和静态临界扭矩的只是具有经典静力扭转屈曲模态的那一部分初缺陷大小，文中给出了临界冲击扭矩的计算公式．

关键词　冲击扭转屈曲　弹性圆柱壳　摄动分析　初缺陷敏感性

一、引　言

众所周知，对于缺陷敏感结构，其初始缺陷的存在使得临界屈曲载荷降低，几十年来，人们围绕这一问题进行了大量的研究，其中包括静力屈曲和冲击屈曲．圆柱壳作为典型的工程构件和典型的初缺陷敏感结构，它在各类载荷作用下的屈曲研究受到了特别的重视，有关这一问题的较新综述文献可见[1]．

一般地来说，人们总是假定初始几何缺陷的形状和屈曲模态相同，如文献[2，3]对圆柱壳扭转屈曲的研究．但事实上，缺陷的形状总是任意的，因此研究任意形状缺陷存在时结构的屈曲特性更具有实际意义．Lockhart等[4,5]采用摄动方法研究了任意形状初缺陷存在时弹性圆柱壳受外法向阶跃冲击载荷作用下的冲击屈曲，并指出影响临界冲击载荷下降的只是具有经典屈曲模态形状的那部分初缺陷，这一研究结果的意义在于它说明了在圆柱壳受外压作用时的屈曲分析中，假定初缺陷形状和屈曲模态相同是可行的．

本文试图研究具有任意形状初缺陷的两端固支弹性圆柱壳，两端受阶跃扭矩作用时的冲击屈曲．

二、动力学控制方程

对于半径为R，厚为h，长为L，密度ρ的弹性圆柱壳，两端受量值为M的阶跃突加扭矩作用，采用Donnell非线性大挠度动力方程有：

$$\rho W_{,TT}+D\nabla^4 W+F_{,XX}/R=S(W+\overline{W},F) \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4 F-\frac{1}{R}W_{,XX}=-S\left(W,\frac{1}{2}W+\overline{W}\right) \tag{2.2}$$

这里：$\nabla^2 W=\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}$，$F_{,XX}=\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}$

$$S(P,\ Q)=\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial Y^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}-2\frac{\partial^2 P}{\partial X\partial Y}\frac{\partial^2 Q}{\partial X\partial Y}$$

上式中E为弹性模量，ν为泊松比，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$．$F(X,Y)$是应力函数，W和$\overline{W}$分别为壳体的法向位移和初始几何缺陷，而且二者并不要求具有相同的形状，T为时间，X和Y分别是壳体沿轴向和周向的坐标．当壳体两端固支时，其边界条件可以写为：

$$W=W_{,X}=0 \qquad (X=0\ 或\ L) \tag{2.3}$$

$$-\int_0^{2\pi R} RF_{,XY}dY=M,\quad \int_0^{2\pi R} F_{,YY}dY=0 \qquad (X=0\ 或\ L) \tag{2.4}$$

初始条件为：

$$W=W_{,T}=0 \qquad (T=0) \tag{2.5}$$

引入如下的无量纲量：

$$x=\pi X/L,\quad y=Y/R,\quad \varepsilon\overline{w}=\overline{W}/h,\quad w=W/h,\quad t=T\pi^2(D/\rho)^{1/2}/L^2$$

$$H=h/R,\ A^2=\frac{L^4E}{\pi^4DR}=\frac{12(1-\nu^2)L^4}{\pi^4h^3R},\quad \lambda=-\frac{ML^3}{DR^3\pi^4},\quad \xi=\left(\frac{L}{\pi R}\right)^2$$

并取应力函数$F(x,y)$的形式为：

$$F(x,\ y)=-\frac{ML}{2R\pi^2}xy+\frac{L^2Eh}{\pi^2}f(x,y) \tag{2.6}$$

这里$\overline{w}(x,y)$表示初缺陷的形状，而ε为初缺陷的幅值，于是经过化简后的上述基本方程为：

$$\overline{\nabla}^4 f-Hw_{,xx}=-H^2S(w,\varepsilon\overline{w}+0.5w) \tag{2.7}$$

$$w_{,tt}+\overline{\nabla}^4 w+A^2f_{,xx}=HA^2S(w+\varepsilon\overline{w},f)-\lambda(w+\varepsilon\overline{w})_{,xy} \tag{2.8}$$

$$w=w_{,x}=0 \qquad (x=0\ 或\ \pi) \tag{2.9}$$

$$\int_0^{2\pi} f_{,xy}dy=\int_0^{2\pi} f_{,yy}dy=0 \qquad (x=0\ 或\ \pi) \tag{2.10}$$

$$w=w_{,t}=0 \qquad (t=0) \tag{2.11}$$

其中 $\overline{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\xi\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

三、经典的静力扭转屈曲

如果不考虑(2.8)式中的时间项，并令$\varepsilon=0$，且只计及有关的线性项，则有：

$$\overline{\nabla}^4 f-Hw_{,xx}=0 \tag{3.1}$$

$$\overline{\nabla}^4 w+A^2f_{,xx}+\lambda w_{,xy}=0 \tag{3.2}$$

上述两个方程即圆柱壳的经典静力扭转屈曲控制方程．

取w和$f(x,y)$的形式为：

$$w(x,y)=a_n\cos x\cos(ny-k_nx) \tag{3.3}$$

$$f(x,y)=b_n\cos[ny-(k_n+1)x]+c_n\cos[ny-(k_n-1)x] \tag{3.4}$$

这里n为周向屈曲波纹数，k_n和n有关，它反映了屈曲波纹和壳体轴线的夹角，a_n，b_n和c_n是待定常数．极易验证，(3.3)、(3.4)式在积分意义下满足边界条件(2.9)、(2.10)，将(3.3)、(3.4)两式代入(3.1)、(3.2)可得：

$$\{b_n[(k_n+1)^2+\xi n^2]^2+a_nH(k_n+1)^2\}\cos[ny-(k_n+1)x]$$
$$+\{c_n[(k_n-1)^2+\xi n^2]^2+a_nH(k_n-1)^2\}\cos[ny-(k_n-1)x]=0 \tag{3.5}$$
$$\{a_n[(k_n+1)^2+\xi n^2]^2+\lambda n(k_n+1)a_n-A^2(k_n+1)^2b_n\}\cos[ny-(k_n+1)x]$$
$$+\{a_n[(k_n-1)^2+\xi n^2]^2+\lambda n(k_n-1)a_n$$
$$-A^2(k_n-1)^2c_n\}\cos[ny-(k_n-1)x]=0 \tag{3.6}$$

这里我们应用了如下的关系式：

$$\cos x\cos(ny-k_nx)=\cos[ny-(k_n+1)x]+\cos[ny-(k_n-1)x] \tag{3.7}$$

(3.5)、(3.6)两式意味着：

$$b_n[(k_n+1)^2+\xi n^2]^2+a_nH(k_n+1)^2=0 \tag{3.8a}$$
$$-A^2(k_n+1)^2b_n+\{\lambda n(k_n+1)+[(k_n+1)^2+\xi n^2]^2\}a_n=0 \tag{3.8b}$$
$$c_n[(k_n-1)^2+\xi n^2]^2+a_nH(k_n-1)^2=0 \tag{3.9a}$$
$$-A^2(k_n-1)^2c_n+\{\lambda n(k_n-1)+[(k_n-1)^2+\xi n^2]^2\}a_n=0 \tag{3.9b}$$

于是得到两个分别关于a_n，b_n和a_n，c_n的齐次线性方程组，由(3.8)式的系数行列式为零，可得线性临界静态扭矩为：

$$\lambda_{c1}=-\frac{[(k_n+1)^2+\xi n^2]^2}{n(k_n+1)}-\frac{HA^2(k_n+1)^3}{n[(k_n+1)^2+\xi n^2]^2} \tag{3.10}$$

同理由(3.9)可得静态临界扭矩为：

$$\lambda_{c2}=-\frac{[(k_n-1)^2+\xi n^2]^2}{n(k_n-1)}-\frac{HA^2(k_n-1)^3}{n[(k_n-1)^2+\xi n^2]^2} \tag{3.11}$$

但(3.10)、(3.11)两式给出的临界扭矩应相等，从而得到k_n和n的关系为：

$$\frac{[(k_n+1)^2+\xi n^2]^2}{n(k_n+1)}+\frac{HA^2(k_n+1)^3}{n[(k_n+1)^2+\xi n^2]^2}$$
$$=\frac{[(k_n-1)^2+\xi n^2]^2}{n(k_n-1)}+\frac{HA^2(k_n-1)^3}{n[(k_n-1)^2+\xi n^2]^2} \tag{3.12}$$

这样按照(3.10)式或(3.11)式对于每一个n，均可以给出该波纹数下对应的临界扭矩λ_{cn}，即：

$$\lambda_{cn}=\lambda_{cn}(n,k_n) \tag{3.13}$$

将λ_{cn}对n求极小，并令此时的n为m，从而可得所求的线性临界扭矩为：

$$\lambda_{cm}=\lambda_{cm}(m,k_m) \tag{3.14}$$

四、摄动方程的建立

现在回过头来研究本文所主要关心的问题，即初缺陷量ε为小量时圆柱壳在阶跃扭矩作用下的屈曲问题．由于ε为小量，故可以认为η也为小量，η满足：

$$\eta^2=1-\lambda/\lambda_c \tag{4.1}$$

再令：

$$\tau=\eta t \tag{4.2}$$

$$\frac{\varepsilon\lambda}{\lambda_c}=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^{(j)}\eta^j \tag{4.3}$$

$$\binom{w}{f}=\sum_{j=1}^{\infty}\binom{w^{(j)}}{f^{(j)}}_{(x,y,\tau)}\eta^{j} \tag{4.4}$$

将(4.1)～(4.4)式代入基本方程(2.7)～(2.11)，并令η的各阶系数相等，可得如下的各阶摄动方程：

$$L^{(1)}(f^{(1)},w^{(1)})\equiv\bar{\nabla}^4 f^{(1)}-Hw^{(1)}_{,xx}=0 \tag{4.5a}$$

$$L^{(2)}(f^{(1)},w^{(1)})\equiv\bar{\nabla}^4 w^{(1)}+A^2 f^{(1)}_{,xx}+\lambda_c w^{(1)}_{,xy}=-\lambda_c\varepsilon^{(1)}\varpi_{,xy} \tag{4.5b}$$

$$L^{(1)}(f^{(2)},w^{(2)})=-H^2 S(w^{(1)},0.5w^{(1)}+\varepsilon^{(1)}\varpi) \tag{4.6a}$$

$$L^{(2)}(f^{(2)},w^{(2)})=-\lambda_c\varepsilon^{(2)}\varpi_{,xy}+HA^2 S(w^{(1)}+\varepsilon^{(1)}\varpi,f^{(1)}) \tag{4.6b}$$

$$L^{(1)}(f^{(3)},w^{(3)})=-H^2[S(w^{(1)},w^{(2)})+\varepsilon^{(2)}S(w^{(1)},\varpi)+\varepsilon^{(1)}S(w^{(2)},\varpi)] \tag{4.7a}$$

$$\begin{aligned}L^{(2)}(f^{(3)},w^{(3)})=&-w^{(1)}_{,\tau\tau}-\lambda_c\varepsilon^{(3)}\varpi_{,xy}+\lambda_c w^{(1)}_{,xy}\\&+HA^2[S(w^{(1)}+\varepsilon^{(1)}\varpi,f^{(2)})+S(w^{(2)}+\varepsilon^{(2)}\varpi,f^{(1)})]\end{aligned} \tag{4.7b}$$

等等．相应的边界条件及初始条件为：

$$w^{(j)}=w^{(j)}_{,x}=\int_0^{2\pi}f^{(j)}_{,xy}dy=\int_0^{2\pi}f^{(j)}_{,yy}\,dy=0\qquad(x=0\ 或\ \pi) \tag{4.8}$$

$$w^{(j)}=w^{(j)}_{,\tau}=0\qquad(\tau=0) \tag{4.9}$$

另一方面对于如下的边值问题：

$$L^{(1)}(f,w)=0 \tag{4.10a}$$

$$L^{(2)}(f,w)=\Omega_1(\tau)\cos[my-(k_m+1)x] \tag{4.10b}$$

$$w=w_{,x}=\int_0^{2\pi}f_{,xy}dy=\int_0^{2\pi}f_{,yy}dy=0\qquad(x=0\ 或\ \pi) \tag{4.10c}$$

注意到(4.10a,b)的左边正是(3.1)、(3.2)两式的左边λ为λ_c时的情形，因此上述边值问题有解的条件为：

$$\Omega_1(\tau)=0 \tag{4.11}$$

五、摄动方程的求解及临界扭矩

以下为了书写简便，记：

$$\bar{\varphi}_n=\cos x\cos[ny-k_n x] \tag{5.1a}$$

$$\varphi_n=\cos[ny-(k_n+1)x] \tag{5.1b}$$

$$\psi_n=\cos[ny-(k_n-1)x] \tag{5.1c}$$

如将$\varpi(x,y)$表示为如下的级数形式：

$$\varpi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n\bar{\varphi}_n(x,y) \tag{5.2}$$

事实上根据前述分析，$\bar{\varphi}_n(x,y)$是特征函数，它是完备的（见文献[6]）．

将(5.2)式代入一次摄动方程(4.5)，并应用条件(4.11)有：

$$\bar{A}_m\lambda_c\varepsilon^{(1)}m(k_m+1)=0 \tag{5.3}$$

由于$\bar{A}_m$一般不为零，故必有：

$$\varepsilon^{(1)}=0 \tag{5.4}$$

从而(4.5)式的解为：

$$w^{(1)}=A_m^{(1)}[\varphi_m+\psi_m] \tag{5.5a}$$

$$f^{(1)}=\frac{-A_m^{(1)}H(k_m+1)^2}{[(k_m+1)^2+\xi m^2]^2}\varphi_m+\frac{-A_m^{(1)}H(k_m-1)^2}{[(k_m-1)^2+\xi m^2]^2}\psi_m \tag{5.5b}$$

再将(5.4)、(5.5)代入二次摄动方程(4.6)，有：

$$L^{(1)}(f^{(2)},w^{(2)})=-H^2S(w^{(1)},0.5w^{(1)}) \tag{5.6a}$$

$$L^{(2)}(f^{(2)},w^{(2)})=-\lambda_o\varepsilon^{(2)}\bar{w}_{,xy}+HA^2S(w^{(1)},f^{(1)}) \tag{5.6b}$$

由(5.5)式知：

$$-H^2S(w^{(1)},0.5w^{(1)})=-4m^2H^2[A_m^{(1)}]^2\varphi_m\psi_m \tag{5.7}$$

$$HA^2S(w^{(1)},f^{(1)})=-4m^2[A_m^{(1)}]^2HA^2[a_1(1-k_m)+b_1(1+k_m)]\varphi_m\psi_m \tag{5.8}$$

上式中：

$$a_1=\frac{H(k_m+1)^2}{[(k_m+1)^2+\xi m^2]^2},\quad b_1=\frac{H(k_m-1)^2}{[(k_m+1)^2+\xi m^2]^2} \tag{5.9}$$

现在在积分意义上将$\varphi_m\psi_m$表示为：

$$\varphi_m\psi_m=A_{2m}[\varphi_{2m}+\psi_{2m}] \tag{5.10}$$

即A_{2m}由下式决定：

$$A_{2m}=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_m\psi_m\bar{\varphi}_{2m}dxdy\Big/\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}[\varphi_{2m}+\psi_{2m}]\bar{\varphi}_{2m}dxdy \tag{5.11}$$

对于(5.6a)式应用(5.7)、(5.8)、(5.10)以及条件(4.11)有：

$$\varepsilon^{(2)}=0 \tag{5.12}$$

这样可以将$f^{(2)}$，$w^{(2)}$写成如下的形式：

$$w^{(2)}=[A_m^{(1)}]^2[A_{2m}^{(2)}\varphi_{2m}+B_{2m}^{(2)}\psi_{2m}] \tag{5.13a}$$

$$f^{(2)}=[A_m^{(1)}]^2[C_{2m}^{(2)}\varphi_{2m}+D_{2m}^{(2)}\psi_{2m}] \tag{5.13b}$$

由(5.6)式即可解出$A_{2m}^{(2)}$，$B_{2m}^{(2)}$，$C_{2m}^{(2)}$，$D_{2m}^{(2)}$，这便给出了二次摄动方程的解答。

将(5.4)、(5.12)代入三次摄动方程(4.7)，并应用条件(4.11)，可得：

$$\begin{aligned}&-A_{m,\tau\tau}^{(1)}-\lambda_o\bar{A}_m m(k_m+1)+\lambda_o A_m^{(1)}m(k_m+1)\\&+HA^2[A_m^{(1)}]^3R_m=0\end{aligned} \tag{5.14}$$

这里R_m由下式来确定：

$$R_m=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}[S(w^{(1)},f^{(2)})+S(w^{(2)},f^{(1)})]\bar{\varphi}_m dxdy}{[A_m^{(1)}]^3\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\bar{\varphi}_m\bar{\varphi}_m dxdy} \tag{5.15}$$

再令$b=-HA^2R_m/\lambda_c m(k_m+1)$，$a=A_m^{(1)}$，于是(5.14)式化为：

$$a_{,\tau\tau}/\lambda_o m(k_m+1)+\varepsilon^{(3)}\bar{A}_m-a+ba^3=0 \tag{5.16}$$

当所加阶跃扭矩较小时，由(5.16)式确定的$a=a(\tau)$是关于τ的周期函数，也即$a(\tau)\sim a_{,\tau}(\tau)$曲线是闭合的，$a(\tau)$存在最大值$a_{max}$，根据文献[7]的思想，使得相平面曲线$a(\tau)\sim a_{,\tau}(\tau)$闭合，即$a_{max}$存在的最大$\lambda$即为临界阶跃扭矩。

将(5.16)两边乘以$a_{,\tau}$，并对a从0到a积分，再令$a_{,\tau}=0$，从而得到a_{max}存在时，λ和a_{max}的关系：

$$\frac{1}{2}a_{\max}^2-\frac{b}{4}a_{\max}^4=\varepsilon^{(3)}\bar{A}_m a_{\max} \tag{5.17}$$

又由(4.1)、(4.3)有：

$$\varepsilon^{(3)}=\varepsilon(\lambda/\lambda_c)(1-\lambda/\lambda_c)^{-3/2} \tag{5.18}$$

故有

$$\frac{1}{2}a_{\max}^2-\frac{b}{4}a_{\max}^4=\varepsilon\bar{A}_m\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{-3/2}a_{\max} \tag{5.19}$$

再令： $d\lambda/da_{\max}=0$ (5.20)

这样由(5.19)、(5.20)联立消去$a_{\max}$可得临界阶跃扭矩λ_d为：

$$\left(1-\frac{\lambda_d}{\lambda_c}\right)^{3/2}=3\left(\frac{3b}{2}\right)^{1/2}|\varepsilon\bar{A}_m|\frac{\lambda_d}{\lambda_c} \tag{5.21}$$

另一方面如果不考虑(5.16)式中的惯性项，可得静态扭矩λ和a的对应关系为：

$$a-ba^3=(\varepsilon\bar{A}_m)(\lambda/\lambda_c)(1-\lambda/\lambda_c)^{-3/2} \tag{5.22}$$

将上式对λ取最大值，可得静态临界扭矩λ_s为：

$$\left(1-\frac{\lambda_s}{\lambda_c}\right)^{3/2}=3\left(\frac{3b}{4}\right)^{1/2}|\varepsilon\bar{A}_m|\frac{\lambda_s}{\lambda_c} \tag{5.23}$$

六、讨 论

(5.21)和(5.23)式表明，影响临界阶跃和静态扭矩的只是其具有静态屈曲模态的那一部分初始缺陷($\varepsilon\bar{A}_m$)，虽然实际的初缺陷具有任意的形状。又由于我们所考虑的是小缺陷，如果近似地取$(\lambda_d/\lambda_c)^{2/3}\approx1$，$(\lambda_s/\lambda_c)^{2/3}\approx1$，则(5.21)和(5.23)式还可以进一步写为：

$$\lambda_d=\lambda_c-\lambda_c[3^{5/2}\quad 2^{-1/2}]^{2/3}(\varepsilon\bar{A}_m)^{2/3} \tag{6.1}$$

$$\lambda_s=\lambda_c-\lambda_c[3^{5/2}\quad 2^{-1}]^{2/3}(\varepsilon\bar{A}_m)^{2/3} \tag{6.2}$$

这说明λ_d和λ_s均和($\varepsilon\bar{A}_m$)的2/3次方成反比，而且$\lambda_d<\lambda_s$。

参 考 文 献

[1] Simitses, G. J., Buckling and postbuckling of imperfect cylindrical shells: A review, *Applied Mechanics Review*, 39(10) (1986), 1517—1524.

[2] Budiansky, B., Post-buckling behavior of cylinders in torsion, *Theory of Thin Shells*, Ed. by F. I. Niordson, Springer, Berlin (1969), 212—233.

[3] 王德禹、杨桂通，带有初缺陷的弹性圆柱壳冲击扭转屈曲，结构工程学报，2(3-4) (1991), 1205—1209.

[4] Lockhart, D. F., Post-buckling dynamic behavior of periodically supported imperfect shells, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 17(3) (1982), 165—174.

[5] Lockhart, D. F. and J. C. Amazigo, Dynamic buckling of externally pressurized imperfect cylindrical shells, *J. Appl. Mech.*, 42 (1975), 316—320.

[6] Courant, R. and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, 1, Wiley, New York (1953).

[7] Budiansky, B., Dynamic buckling of elastic structures: Criteria and estimates, *Dynamic Stability of Structures*, Ed. by G. Herrmann, Pergamann Press (1967).

The Impact Torsional Buckling of Elastic Cylindrical Shells with Arbitrary Form Imperfection

Wang De-yu   Zhang Shan-yuan   Yang Gui-tong

(*Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan*)

Abstract

A perturbation analysis for the impact torsional buckling of imperfective elastic cylindrical shells subjected to a step torque is given. The imperfection is supposed to be small and has arbitrary form. It is shown that only the imperfection which has the shape of static torsional buckling mode could influence the critical step torque. Finally a formula is presented for the critical step torque.

Key words impact torsional buckling, elastic cylindrical shell, perturbation analysis, initial imperfection sensitivity