

# 内边界裂纹复合圆柱的 Saint-Venant 扭转\*

陶肪敏 汤任基

(上海交通大学, 1992年5月22日收到)

## 摘 要

本文使用 Мухелишвили 单层势函数和柱体扭转单裂纹解, 将复合材料裂纹柱体扭转的内边界裂纹问题归结为解一组广义柯西核的混合型的积分方程, 然后使用奇异积分方程的 Gauss-Jacobi 求积公式, 建立了数值法, 并计算了若干数值例子, 得到了复合材料裂纹柱体扭转的抗扭刚度及应力强度因子。与已有的文献相比符合得很好。

**关键词** 复合圆柱 内边界裂纹 柯西型积分方程

## 一、引 言

对于无裂纹复合柱体扭转及带裂纹柱体的扭转问题, 许多学者都作了研究<sup>[1~3]</sup>, 但是对于带裂纹复合材料柱体的扭转问题, 由于作者接触到的文献有限, 除文[4]在求解方法上作过讨论外, 还未见这方面的其他报导。很明显, 由于复合材料裂纹柱体的扭转在工程中有一定应用, 所以进一步研究这类问题的求解方法及柱体的抗扭刚度, 不仅有理论意义而且还有重要的应用价值。

文[4]使用 Мухелишвили 的单层势函数<sup>[1]</sup>和柱体扭转的单裂纹解<sup>[5]</sup>, 将以上两种解叠加作为复合材料裂纹柱体扭转问题的解, 上述形式的解在材料外边界  $L_0$  和裂纹  $L_a$  上满足边界条件及在结合体与基体交界处满足联结条件。最后问题归结为一组混合型的积分方程, 它由一个典型的 Cauchy 型奇异积分方程和二一个常规的边界积分方程组成, 并建立了数值求解法。在此基础上对内裂纹问题使用 Gauss-Shebyshev 求积公式作了数值计算, 并对裂纹与材料界面接触的情形作了奇性分析, 但未作接触点的应力强度因子计算。很明显裂纹与材料界面接触的内边界裂纹的应力强度因子计算是十分重要的, 它对于研究复合材料界面联结强度有指导意义。当裂纹未与结合体的交界面接触时, 即内裂纹情形, 此时裂纹尖端的奇性指数为  $1/2$ ; 当裂纹与交界面接触时, 裂纹接触端的应力奇性性态将发生明显的改变, 其指数不再是  $1/2$ , 因而文[4]的 Gauss-Shebyshev 求积公式不能使用。为此本文进一步将上述问题归为一组广义的柯西型奇异积分方程并使用代数精度很高的 Gauss-Jacobi 求积公式建立了数值方法, 编制了计算机程序, 最后作了数值计算, 得到了裂纹与材料界面接触点的应力强度因子。可以看出当裂纹与交界面接触时, 它的应力强度因子将发生明显跳跃。此外,

\* 国家教委博士点基金资助课题。

本文还验证了文[4]的部分结果,这就从不同的方法,相互得到了校核,证明方法是成功的。

## 二、复合圆柱体扭转的基本关系式

复合裂纹圆柱的横截面如图1所示。其中 $L_0$ 为柱的外边界,它是以 $O$ 为圆心的圆周。 $L_1$ 为复合柱的材料分界线,它是以为 $O'$ 为圆心的圆周, $OO'$ 距离为 $\lambda$ 。 $L_{ab}$ 为由沿 $y$ 轴贯通的直线裂纹( $a, b$ )上下岸组成的闭曲线。 $\Omega_0$ 为由闭曲线 $L_0$ ,  $L_1$ 及 $L_{ab}$ 围成的复连通域,它是复合柱的基体,其剪切弹性模量为 $\mu_0$ ,  $\Omega_1$ 由闭曲线 $L_1$ 围成的单连通域,它是复合柱的结合体,其剪切弹性模量为 $\mu_1$ 。此外假定柱的外边界 $L_0$ 及裂纹表面 $L_{ab}$ 均无外力作用,基体与结合体的联结牢固,无相对滑动。

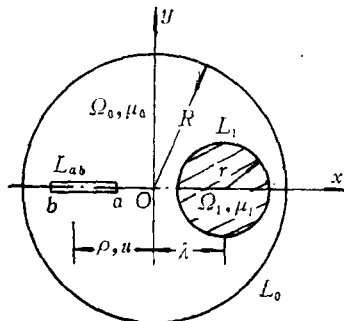


图 1

根据柱的Saint-Venant扭转理论<sup>[1]</sup>,复合柱体 $\Omega_j(j=0,1)$ 中的位移分量为

$$u = -azy, \quad v = axz, \quad w = \alpha\varphi(x, y) \quad (2.1)$$

相应的剪应力为

$$\tau_{xz} = \alpha\mu_j \left( \frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right), \quad \tau_{xy} = \alpha\mu_j \left( \frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) \quad (2.2)$$

柱体的抗扭刚度由以下公式计算:

$$D = \frac{M}{\alpha} = \sum_{j=0}^1 \int_{\Omega_j} \mu_j \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial\varphi}{\partial y} - y \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) d\Omega \quad (2.3)$$

以上公式中,  $\alpha$ 为柱的扭率,  $M$ 为作用在柱端的扭转, 函数 $\varphi(x, y)$ 为柱的扭曲函数, 它是区域 $\Omega_j$ 上的平面调和函数, 满足以下方程:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in \Omega_j \quad (2.4)$$

它在 $L_0$ 与 $L_{ab}$ 满足以下边界条件:

$$\frac{d\varphi}{dn} = y\cos(n, x) - x\cos(n, y), \quad x, y \in L_0 \text{ 或 } L_{ab} \quad (2.5)$$

在 $L_1$ 两侧法向导数间断, 满足以下联结条件:

$$\mu_0 \left( \frac{d\varphi}{dn} \right)_0 - \mu_1 \left( \frac{d\varphi}{dn} \right)_1 = (\mu_0 - \mu_1) [\cos(n, x)y - x\cos(n, y)] \quad (2.6)$$

式中圆括号上的下标 $j=0, 1$ 是指其中的函数值是对区域 $\Omega_j$ 计算的,  $n$ 为 $L_1$ 的外向法线(指向 $\Omega_0$ )。

若在图1中, 使用 $(x, y, z)$ 直角坐标系及 $(\rho, \theta, z)$ 柱坐标系, 并使用Мусхелишвили的单层势函数解<sup>[1]</sup>和柱体扭转的单裂纹解<sup>[5]</sup>, 则图1复合裂纹圆柱的扭曲函数可表为两部分之和<sup>[4]</sup>:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(\rho, \theta) + \varphi_2(x, y) \quad (2.7)$$

其中

$$\varphi_1(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b [\ln(u + \rho e^{-i\theta}) - \ln(u + \rho e^{i\theta})] f(u) du \quad (2.8)$$

$$\varphi_2(x, y) = \int_{L_0} g_0(s) \ln \frac{1}{r_{ps}} ds + \int_{L_1} g_1(s) \ln \frac{1}{r_{ps}} ds \quad (2.9)$$

式中  $p$  为  $\Omega_0$  或  $\Omega_1$  中的内点,  $s$  为  $L_0$  或  $L_1$  上的积分点,  $r_{ps}$  为  $\vec{ps}$  的向径,

$$r_{ps} = \sqrt{(x_p - x_s)^2 + (y_p - y_s)^2}$$

函数  $f(u)$  为定义于裂纹  $L_{ab}$  的未知螺旋位错密度,  $g_0(s)$  和  $g_1(s)$  为分别定义于  $L_0$  和  $L_1$  上的未知单层势密度函数, 它们由  $L_0$ ,  $L_1$  和  $L_{ab}$  上的边界条件(2.5)及联结条件(2.6)确定, 具体见下节分析.

### 三、带裂纹复合圆柱的积分方程

将(2.7)中的函数  $\varphi(x, y)$  代入边界条件(2.5)及联结条件(2.6), 则经过简化运算后得到图1扭转问题用于决定未知函数  $g_0(s)$ ,  $g_1(s)$  及  $f(u)$  的积分方程组为<sup>[4]</sup>:

$$\begin{aligned} \pi g_0(\beta_0) + \int_0^{2\pi} K_{11}(\beta_0, \eta_0) g_0(\eta_0) d\eta_0 + \int_0^{2\pi} K_{12}(\beta_0, \eta_1) g_1(\eta_1) d\eta_1 \\ + \frac{1}{\pi} \int_a^b K_{13}(\beta_0, u) f(u) du = 0, \quad 0 < \beta_0 \in L_0 \leq 2\pi \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \pi g_1(\beta_1) + \int_0^{2\pi} K_{21}(\beta_1, \eta_0) g_0(\eta_0) d\eta_0 + \int_0^{2\pi} K_{22}(\beta_1, \eta_1) g_1(\eta_1) d\eta_1 \\ + \frac{1}{\pi} \int_a^b K_{23}(\beta_1, u) f(u) du = \kappa \lambda \sin \beta_1, \quad 0 < \beta_1 \in L_1 \leq 2\pi \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} K_{31}(\rho, \eta_0) g_0(\eta_0) d\eta_0 + \int_0^{2\pi} K_{32}(\rho, \eta_1) g_1(\eta_1) d\eta_1 \\ + \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{f(u)}{u - \rho} du = -\rho \quad \rho \in L_{ab} \end{aligned} \quad (3.3)$$

式中  $\kappa = (\mu_0 - \mu_1) / (\mu_0 + \mu_1)$ , 各积分核为:

$$K_{11}(\beta_0, \eta_0) = -1/2$$

$$K_{12}(\beta_0, \eta_1) = \frac{r[\lambda \cos \beta_0 + r \cos(\eta_1 - \beta_0) - R]}{r^2 + \lambda^2 + R^2 + 2\lambda(r \cos \eta_1 - R \cos \beta_0) - 2Rr \cos(\eta_1 - \beta_0)}$$

$$K_{13}(\beta_0, u) = -\frac{u \sin \beta_0}{u^2 + R^2 + 2Ru \cos \beta_0}$$

$$K_{21}(\beta_1, \eta_0) = \frac{\kappa R[\lambda \cos \beta_1 - R \cos(\eta_0 - \beta_1) + r]}{\lambda^2 + r^2 + R^2 + 2\lambda(r \cos \beta_1 - R \cos \eta_0) - 2Rr \cos(\eta_0 - \beta_1)}$$

$$K_{22}(\beta_1, \eta_1) = \kappa/2$$

$$K_{23}(\beta_1, u) = \frac{\kappa(\lambda \sin \beta_1 + u \sin \beta_1)}{u^2 + r^2 + \lambda^2 + 2r(\lambda + u) \cos \beta_1 + 2u\lambda}$$

$$K_{31}(\rho, \eta_0) = -\frac{R^2 \sin \eta_0}{R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cos \eta_0}$$

$$K_{32}(\rho, \eta_1) = \frac{-r^2 \sin \eta_1}{\lambda^2 + r^2 + \rho^2 + 2\rho(\lambda + r \cos \eta_1) + 2r\lambda \cos \eta_1}$$

以上积分方程组 (3.1) ~ (3.3) 还应满足以下定解条件 (复连通域的位移单值性条件) :

$$\int_a^b f(u) du = 0 \quad (3.4)$$

方程组 (3.1) ~ (3.4) 即为所求的图 1 带裂纹复合圆柱的积分方程, 它是一组混合型的方程, 其中 (3.1) ~ (3.2) 是关于  $g_0(\eta_0)$  和  $g_1(\eta_1)$  的 Fredholm 积分方程, 而 (3.3) 是关于未知函数  $f(u)$  的 Cauchy 型奇异积分方程. 解这个方程组, 就可求出未知函数  $g_0(s)$ ,  $g_1(s)$  和  $f(u)$ , 再回代 (2.7), 即得柱的扭曲函数  $\varphi(x, y)$ , 再通过 (2.3) 和 (2.2) 便可求出柱的抗扭刚度及应力. 于是问题就得到解决.

#### 四、复合柱体的抗扭刚度及裂纹端点的应力强度因子

由公式 (2.3), 考虑到 (2.7) 中  $\varphi(x, y)$  的  $\varphi_1(\rho, \theta)$  在  $L_{ab}$  上有间断, 把裂纹边界  $L_{ab}$  看成外边界的一部分, 并利用格林公式, 则柱的抗扭刚度可表为:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=0}^1 \int_{\Omega_j} (x^2 + y^2) d\Omega + \mu_0 \int_{\Omega_0} \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\Omega + \mu_1 \int_{\Omega_1} \left( x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\Omega \\ &= \sum_{j=0}^1 \int_{\Omega_j} \mu_j \rho^2 d\Omega - \mu_0 \left( \oint_{L_0} \rho \varphi d\rho - \oint_{L_1} \rho \varphi d\rho - \oint_{L_{ab}} \rho \varphi d\rho \right) \\ &\quad - \mu_1 \oint_{L_1} \rho \varphi d\rho \end{aligned} \quad (4.1)$$

式中围线积分均按图 1 所示.

由于在边界  $L_0$  上,  $\rho = R = \text{const}$ , 因此

$$\oint_{L_0} \rho \varphi d\rho = 0$$

在裂纹  $L_{ab}$  上, 由于  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , 而  $\varphi_2$  在  $L_{ab}$  上连续, 所以有

$$\oint_{L_{ab}} \rho \varphi d\rho = \int_a^b (u^2 - b^2) f(u) du$$

于是 (4.1) 可化为

$$D = \sum_{j=0}^1 \int_{\Omega_j} \mu_j \rho^2 d\Omega + \mu_0 \int_a^b (u^2 - b^2) f(u) du - (\mu_1 - \mu_0) \oint_{L_1} \rho \varphi d\rho \quad (4.2)$$

再将 (2.7) 中  $\varphi(x, y)$  的具体表达式代入, 最后得到柱的抗扭刚度  $D$  由下式计算:

$$\begin{aligned} D &= \frac{\pi \mu_0 R^4}{2} + \frac{\pi (\mu_1 - \mu_0) r^2 (2\lambda^2 + r^2)}{2} + \mu_0 \int_a^b (u^2 - b^2) f(u) du \\ &\quad + \frac{(\mu_0 - \mu_1) r \lambda}{\pi} \int_a^b K_f(u) f(u) du + \frac{(\mu_0 - \mu_1) R r \lambda}{2} \int_0^{2\pi} K_{g_0}(\eta_0) g_0(\eta_0) d\eta_0 \\ &\quad + (\mu_0 - \mu_1) r^2 \lambda \int_0^{2\pi} K_{g_1}(\eta_1) g_1(\eta_1) d\eta_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

式中

$$K_f(u) = \int_0^{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{r \sin \beta_1}{u + r \cos \beta_1 + \lambda} \sin \beta_1 d\beta_1$$

$$K_{g_0}(\eta_0) = \int_0^{2\pi} \ln \{ R^2 + r^2 + \lambda^2 + 2\lambda(r \cos \beta_1 - R \cos \eta_0) - 2Rr \cos(\eta_0 - \beta_1) \} \sin \beta_1 d\beta_1$$

$$K_{g_1}(\eta_1) = \int_0^{2\pi} \ln \left( 2r \sin \left| \frac{\beta_1 - \eta_1}{2} \right| \right) \sin \beta_1 d\beta_1$$

对于裂纹不与材料界面接触的内裂纹端点的应力强度因子为<sup>[5]</sup>:

$$K(a) = \alpha \mu_0 \lim_{\rho \rightarrow a} \sqrt{2(\rho - a)} f(\rho) \quad (4.4)$$

$$K(b) = -\alpha \mu_0 \lim_{\rho \rightarrow b} \sqrt{2(b - \rho)} f(\rho) \quad (4.5)$$

式中 $\alpha$ 为扭率。

若裂纹与材料界面接触, 则接触端的应力强度需要另行分析, 这在下节进行。

## 五、裂纹与材料界面接触端的广义应力强度因子

若在图1中取如下参数:  $\lambda = r$ ,  $a = 0$ 时, 则裂纹端点 $a$ 便与材料界面 $L_1$ 接触, 此时 $u, \rho \in L_{a,b}$ 都可以同时趋于零, 因此方程(3.2)、(3.3)中的积分核可出现新的奇性, 因而裂纹接触端函数 $f(u)$ 的奇性指数发生变化, 此变化可使用此函数满足的奇异积分方程的主部分析决定。

积分方程组(3.1)~(3.3)的主部由(3.3)和(3.2)得:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{f(u)}{u - \rho} du + \int_0^{2\pi} K_{32}^*(\rho, \eta_1) g_1^*(\eta_1) d\eta_1 = Q(\rho), \quad u, \rho \in L_{a,b} \quad (5.1)$$

$$g_1^*(\eta_1) = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^b K_{23}^*(\beta, u) f(u) du \quad (5.2)$$

$Q(\rho)$ 为关于 $\rho$ 的连续函数, 式中

$$K_{32}^*(\rho, \eta_1) = -\frac{r^2 \sin \eta_1}{\rho^2 + 2r^2(1 + \cos \eta_1) + 2\rho r(1 + \cos \eta_1)} \quad (5.3)$$

$$K_{23}^*(\beta, u) = \frac{\kappa(r+u) \sin \beta_1}{u^2 + 2r^2(1 + \cos \beta_1) + 2ur(\cos \beta_1 + 1)} \quad (5.4)$$

把(5.2)代入(5.1), 得到关于 $f(u)$ 的主部方程为:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^b \left[ \frac{1}{u - \rho} + \frac{\kappa}{u + \rho} \right] f(u) du = Q^*(\rho) \quad (5.5)$$

式中 $Q^*(\rho)$ 为有界函数, 再使用奇异积分方程的解析理论<sup>[6]</sup>, 可知函数 $f(u)$ 可表为:

$$f(u) = \frac{f^*(u)}{u^{\alpha^*}(b-u)^{\beta^*}}$$

其中奇性指数 $\alpha^*$ 和 $\beta^*$ 由以下特征方程决定<sup>[4]</sup>:

$$\operatorname{ctg} \alpha^* \pi = 0, \quad \cos \beta^* \pi + \kappa = 0 \quad (5.6)$$

由此得:

$$\alpha^* = 1/2$$

$$\beta^* = \frac{1}{\pi} \arccos(1 - \kappa) = \frac{1}{\pi} (\pi - \arccos \kappa) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \kappa$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi} \arccos \left( \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \right)$$

因此接触端  $a$  的广义应力强度因子可按以下定义计算:

$$K(a) = \alpha \mu_0 \lim_{\rho \rightarrow a} [2(u-a)]^{\alpha} f(u) \quad (5.7)$$

$$K(b) = -\alpha \mu_0 \lim_{\rho \rightarrow b} [2(b-u)]^{-\alpha} f(u) \quad (5.8)$$

## 六、积分方程组的标准化及数值法

引入以下无量纲变数  $(\tau, \xi)$  及新函数:

$$u = (c\tau + d)R, \quad \rho = (c\xi + d), \quad c = \frac{b-a}{2R}, \quad d = \frac{b+a}{2R}$$

及

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}(\tau) &= f(u)/R, \quad \bar{g}_0(\beta_0) = g_0(\beta_0)/R, \quad \bar{g}_0(\eta_0) = g_0(\eta_0)/R \\ \bar{g}_1(\beta_1) &= g_1(\beta_1)/R, \quad \bar{g}_1(\eta_1) = g_1(\eta_1)/R \\ \bar{K}_{13}(\beta_0, \tau) &= \frac{b-a}{2} K_{13}(\beta_0, u), \quad \bar{K}_{23}(\beta, \tau) = \frac{b-a}{2} K_{23}(\beta, u) \\ \bar{K}_{11}(\beta_0, \eta_0) &= K_{11}(\beta_0, \eta_0), \quad \bar{K}_{12}(\beta_0, \eta_1) = K_{12}(\beta_0, \eta_1) \\ \bar{K}_{21}(\beta_1, \eta_0) &= K_{21}(\beta_1, \eta_0), \quad \bar{K}_{22}(\beta_1, \eta_1) = K_{22}(\beta_1, \eta_1) \\ \bar{K}_{31}(\xi, \eta_0) &= K_{31}(\rho, \eta_0), \quad \bar{K}_{32}(\xi, \eta_1) = K_{32}(\rho, \eta_1) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

于是原积分方程组(3.1)~(3.4)成为标准形式:

$$\begin{aligned} \pi \bar{g}_0(\beta_0) + \int_0^{2\pi} \bar{K}_{11}(\beta_0, \eta_0) \bar{g}_0(\eta_0) d\eta_0 + \int_0^{2\pi} \bar{K}_{12}(\beta_0, \eta_1) \bar{g}_1(\eta_1) d\eta_1 \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{K}_{13}(\beta_0, \tau) \bar{f}(\tau) d\tau = 0, \quad 0 \leq \beta_0 \in L_0 \leq 2\pi \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \pi \bar{g}_1(\beta_1) + \int_0^{2\pi} \bar{K}_{21}(\beta_1, \eta_0) \bar{g}_0(\eta_0) d\eta_0 + \int_0^{2\pi} \bar{K}_{22}(\beta_1, \eta_1) \bar{g}_1(\eta_1) d\eta_1 \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \bar{K}_{23}(\beta_1, \tau) \bar{f}(\tau) d\tau = \frac{\alpha \lambda \sin \beta_1}{R}, \quad 0 < \beta_1 \in L_1 \leq 2\pi \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \bar{K}_{31}(\xi, \eta_0) \bar{g}_0(\eta_0) d\eta_0 + \int_0^{2\pi} \bar{K}_{32}(\xi, \eta_1) \bar{g}_1(\eta_1) d\eta_1 \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{f}(\tau)}{\tau - \xi} d\tau = -c\xi - d, \quad -1 < \xi < 1 \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\int_{-1}^1 \bar{f}(\tau) d\tau = 0 \quad (6.5)$$

以上复合裂纹柱扭转问题的积分方程(6.2)~(6.5)在一般情况下要获得解析解是困难的, 所以只能利用近似的数值解法, 以下简要说明本文的数值法.

方程组(6.2)~(6.5)中的函数  $\bar{f}(\tau)$  具有以下形式:

$$\bar{f}(\tau) = F(\tau)(1+\tau)^{\beta}(1-\tau)^{\alpha} \quad (6.6)$$

其中当裂纹不与  $L_1$  接触时(内裂纹), 则  $\alpha = \beta = -1/2$ , 当裂纹与  $L_1$  接触时(内边界裂纹), 则

$$\alpha = -1/2, \beta = -\beta^*$$

因此在(6.2)~(6.5)方程中关于函数 $f(\tau)$ 的积分,可使用以下 Gauss-Jacobi 求积公式近似<sup>(6)</sup>:

$$\int_{-1}^1 G(x, \tau)(1-\tau)^\alpha(1+\tau)^\beta d\tau = \sum_{k=1}^N w_k G(x, \tau_k) \quad (6.7)$$

其中 $\tau_k$ 是Jacobi多项式 $P_N^{(\alpha, \beta)}(\tau)$ 的零点:

$$P_N^{(\alpha, \beta)}(\tau) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (6.8)$$

而 $w_k$ 为求积公式的权:

$$w_k = \frac{(2N+\alpha+\beta+2)\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)2^{\alpha+\beta}}{(N+1)!(N+\alpha+\beta+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+1)P_{N-1}^{(\alpha, \beta)}(\tau_k) \frac{d}{d\tau} P_N^{(\alpha, \beta)}(\tau_k)} \quad (6.9)$$

关于圆周 $L_0$ 及 $L_1$ 的下型积分

$$\int_0^{2\pi} H(x, \eta)q(\eta)d\eta \quad (6.10)$$

可使用复化Simpson求积公式进行近似.若将 $[0, 2\pi]$ 线段分为 $N_1$ 段,其第 $j$ 段( $j=0, 1, \dots, N_1-1$ )的起点、中点和末点分别记为 $j, j+1/2$ 及 $j+1$ .则以上形式的积分可近似地表示为:

$$\int_0^{2\pi} H(x, \eta)q(\eta)d\eta = \sum_{j=0}^{N_1-1} \left\{ \frac{h}{b} [H(x, \eta_j) + 4H(x, \eta_{j+1/2}) + H(x, \eta_{j+1})] q(\eta_{j+1/2}) \right\} \quad (6.11)$$

利用以上求积公式(6.7)和(6.11),则(6.2)~(6.5)可近似地化为以下代数方程组:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{N_1-1} \{ [\pi\delta_{ij} - h/2] \bar{g}_0(\beta_{0i, j+1/2}) \} + \sum_{j=0}^{N_1-1} \left\{ \frac{h}{6} [K_{12}(\beta_{0i, j+1/2}, \eta_{1j}) \right. \\ & \quad \left. + 4K_{12}(\beta_{0i, j+1/2}, \eta_{1j+1/2}) + K_{12}(\beta_{0i, j+1/2}, \eta_{1j+1})] \bar{g}_1(\eta_{1j+1/2}) \right\} \\ & + \frac{1}{\pi} w_j \cdot K_{13}(\beta_{0i, j+1/2}, \tau_j) F(\tau_j) = 0 \quad (i=0, 1, \dots, N_1-1) \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{N_1-1} \left\{ \frac{h}{6} [K_{21}(\beta_{1i, j+1/2}, \eta_{0j}) + 4K_{21}(\beta_{1i, j+1/2}, \eta_{0j+1/2}) + K_{21}(\beta_{1i, j+1/2}, \eta_{0j+1})] \right. \\ & \quad \cdot \bar{g}_0(\eta_{0j+1/2}) \left. \right\} + \sum_{j=0}^{N_1-1} \left\{ \left[ \pi\delta_{ij} + \frac{x}{2}h \right] \bar{g}_1(\eta_{1j+1/2}) \right\} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N w_j \\ & \quad \cdot K_{23}(\beta_{1i, j+1/2}, \tau_j) F(\tau_j) = \frac{r\lambda \sin \beta_{1i, j+1/2}}{R}, \quad (i=0, 1, \dots, N_1-1) \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\sum_{j=0}^{N_1-1} \left\{ \frac{h}{6} [K_{31}(\xi_i, \eta_{0j}) + 4K_{31}(\xi_i, \eta_{0j+1/2}) + K_{31}(\xi_i, \eta_{0j+1})] \right.$$

$$\begin{aligned} & \cdot \bar{g}_0(\eta_{0j+1/2}) \} + \sum_{j=0}^{N_1-1} \left\{ \frac{h}{6} [K_{32}(\xi_i, \eta_{1j}) + 4K_{32}(\xi_i, \eta_{1j+1/2}) + K_{32}(\xi_i, \eta_{1j+1})] \right\} \\ & \cdot \bar{g}_1(\eta_{1j+1/2}) \} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^N w_j \cdot \frac{1}{\tau_j - \xi_i} F(\tau_j) = -c\xi_i - d \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\sum_{j=1}^N w_j \cdot F(\tau_j) = 0 \quad (6.15)$$

以上公式中 $\tau_j$ 和 $\xi_i$ 为以下Jacobi多项式的零点:

$$\begin{aligned} P_N^{(\alpha, \beta)}(\tau_j) &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, N) \\ P_{N-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i) &= 0 \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \end{aligned}$$

以上方程组(6.12)~(6.15)中,有 $N_1$ 个未知数 $\bar{g}_0(\eta_{0j+1/2})$ ,  $N_1$ 个未知数 $\bar{g}_1(\eta_{1j+1/2})$ 及 $N$ 个未知数 $F(\tau_j)$ ,一共有 $2N_1+N$ 个未知数。它与方程的数目相同,故代数方程组封闭可解。在解得各未知数后,即可近似拟合未知函数 $\bar{g}_0(\eta_0)$ ,  $\bar{g}_1(\eta_1)$ 和 $F(\tau)$ ;回代(5.1)后即得原来的各未知函数 $g_0(\eta_0)$ ,  $g_1(\eta_1)$ 及 $f(u)$ ,再代入(2.7),则图1问题的扭曲函数 $\varphi(x, y)$ 求出。于是由(2.2)及(2.3)即可求出柱的剪应力及抗扭刚度,裂纹端点的应力强度因子可由(4.4)~(4.5)或(5.7)计算,至此问题获得解决。

## 七、数值例子

为了说明本文方法的应用,本节根据前面所介绍的数值解法,编制了程序,并在计算机(DPS8)上求解了一些数值例子,下面列出这些数值结果。

例1  $\mu_0 = \mu_1$ 时均质内裂纹圆柱的扭转

因为复合裂纹柱扭转的解答还未见其它文献,故为了验证本文结果的可靠性,取 $\mu_0/\mu_1 \uparrow 1$ ,此时复合裂纹柱退化为单裂纹均质柱,而单根内裂纹均质柱体的结果已由文[4]获得,表1表示复合裂纹柱退化为均质柱时柱的无量纲抗扭刚度 $D^* = D/D_0$  ( $D_0 = \pi\mu_0 R^3/2$ )及无量纲应力强度因子 $K^*(a) = K(a)/K_0$ ,  $K^*(b) = K(b)/K_0$  ( $K_0 = \mu_0 MR\sqrt{(b-a)}/2/D_0$ )与文[4]结果的比较。

表1 内裂纹时无量纲抗扭刚度 $D^*$ 及应力强度因子 $K^*(a)$ ,  $K^*(b)$ 与文[4]结果的比较。  
( $a+b)/2R=0.3$ ;  $\mu_0=\mu_1$ )

$\frac{b-a}{2R}$	$D^*$		$K^*(a)$		$K^*(b)$	
	本文	文[4]	本文	文[4]	本文	文[4]
0.1	0.9981	0.9982	0.2518	0.2522	0.3519	0.3525
0.2	0.9922	0.9922	0.2070	0.2087	0.4081	0.4114
0.3	0.9808	0.9808	0.1660	0.1603	0.4703	0.4793
0.4	0.9612	0.9612	0.1295	0.1350	0.5427	0.5651

例2  $\mu_0 \neq \mu_1$ 时复合材料内裂纹圆柱的扭转。

对于图1所示的含内裂纹的复合柱体,本例计算时取材料常数比为 $\kappa = \mu_0/\mu_1$ ,复合裂纹



柱的无量纲几何参数为

$$\frac{d}{R} = \frac{\lambda}{R} = \frac{2c}{R} = \frac{2r}{R} = 0.5 \quad \left( c = \frac{b-a}{2}, d = \frac{b+a}{2} \right)$$

柱的无量纲抗扭刚度  $D^* = D/D_0$  ( $D_0 = 0.5\mu_0\pi R^4$ ) 及裂纹端点  $(a, b)$  的无量纲应力强度因子  $K^*(a) = K(a)/K_0$ ,  $K^*(b) = K(b)/K_0$  ( $K_0 = \mu MR\sqrt{(b-a)/2}/D_0$ ) 的数值结果列于表2。

表 2 内裂纹时无量纲抗扭刚度  $D^*$  及无量纲应力强度因子  $K^*(a)$ ,  $K^*(b)$  随  $\alpha = \mu_0/\mu_1$  的变化

$\alpha$	0.1	0.5	0.7	-1.0	2.0	5.0
$D^*$	1.0430	0.9876	0.9771	0.9658	0.9445	0.9223
$K^*(a)$	0.4491	0.4218	0.4123	0.4013	0.3792	0.3555
$K^*(b)$	0.6972	0.6779	0.6713	0.6635	0.6492	0.6311

例3  $r/R, c/R, \lambda/R, \alpha$  为常数,  $d = (b+a)/2$  变化时, 柱的抗扭刚度  $D^*$ 、应力强度因子  $K^*(a, b)$  随裂纹位置逐渐向材料界面  $L_1$  渐近的数值结果列于表3。

表 3 裂纹与材料界面  $L_1$  逐渐靠近, 并与  $L_1$  接触时柱的抗扭刚度及应力强度因子随  $d/R$  的变化 ( $r/R = c/R = 0.3, \lambda/R = 0.5, \mu_0/\mu_1 = 2.0$ )

$d/R$	0.6	0.4	0.2	0.1 (裂纹 $a$ 端与 $L_1$ 接触)
$D^*$	0.8915	0.9357	0.9574	0.9611
$K^*(a)$	0.4925	0.2332	0.01504	0.08203
$K^*(b)$	0.8821	0.5590	0.3243	0.2043

由表3可见, 当裂纹端点与  $L_1$  接触时, 该点的应力强度因子有明显突变, 这是由于接触时该点的应力奇性发生了质的变化。

例4 裂纹端点  $a$  在原点, 取裂纹半长  $c/R$  和裂纹位置  $d/R$  及  $\alpha$  不变, 结合体半径和位置 (参数  $r/R, \lambda/R$ ) 发生改变时的无量纲抗扭刚度  $D^*$  和无量纲应力强度因子  $K^*(a, b)$  的数值结果 ( $c/R = d/R = 0.3, \mu_0/\mu_1 = 2.0$ ) 列于表4。

表 4 裂纹与界面  $L_1$  接触时柱的无量纲抗扭刚度  $D^*$  及无量纲应力强度因子  $K^*(a)$ ,  $K^*(b)$  随参数  $\lambda/R = r/R$  的变化 ( $c/R = d/R = 0.3, \alpha = \mu_0/\mu_1 = 2.0$ )

$\lambda/R$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
$D^*$	0.9805	0.9789	0.9687	0.9371	0.9068
$K^*(a)$	0.1000	0.08420	0.0648	0.0404	0.0257
$K^*(b)$	0.4734	0.4665	0.4498	0.4222	0.4035

参 考 文 献

[1] Мухелишвили Н.И., 《数学弹性力学中的几个基本问题》, 赵惠元译, 科学出版社 (1958).  
 [2] Coyle, E.J. and M. Crochet, Analysis of cylindrical joints of composites materials of torsional loadings, *Journal of Reinforced Plastic and Composites*, 1(3) (1982), 195—205.  
 [3] Kuo, Y.M. and H.D. Conway, The torsion of composite tubes and cylinders, *International Journal of Solids and Structures*, 9 (1973), 1553—1565.  
 [4] 马稚青、汤任基, 带裂纹组合柱的扭转, 上海力学, (1) (1992), 15—21.  
 [5] 汤任基, 带裂纹圆柱体的Saint-Venant扭转, 力学学报, (4) (1982), 320—340.  
 [6] Erdogan, F., G.D. Gupta and T.S. Cook, Numerical Solution of Singular Integral Equations, in *Fracture Mechanics*, G.C. Sih, Vol.1 (1973).

## Saint-Venant's Torsion Problem for a Composite Circular Cylinder with an Internal Edge Crack

Tao Fang-ming    Tang Ren-ji

(*Shanghai Jiaotong University, Shanghai*)

### Abstract

In this paper the writer uses Мухелишвили single-layer potential function solution and single crack solution for the torsion problem of a circular cylinder to discuss the torsion problem of a composite cylinder with an internal crack, and the problem is reduced to a set of mixed-type integral equation with generalized Cauchy-kernel. Then, by using the integration formula of Gauss-Jacobi, the numerical method is established and several numerical examples are calculated. The torsional rigidity and the stress intensity factors are obtained. The results of these examples fit the results obtained by the previous papers better.

**Key words** composite circular cylinder, internal crack, Cauchy-type integral equation