

双向压缩简支矩形板后屈曲 平衡路径的迭代算法*

乔宗椿

(上海工业大学, 上海市应用数学和力学研究所)

(江福汝推荐, 1992年3月17日收到)

摘 要

本文从 von Kármán 板大挠度方程出发, 在双重三角级数解的基础上, 提出一种简单、快速和有效求解双向压缩简支矩形板后屈曲平衡路径的迭代算法。

关键词 矩形板 后屈曲平衡路径 迭代法

一、引 言

研究薄板结构初始屈曲性态和后屈曲平衡路径, 对于充分认识和利用其潜在的超载性能具有十分重要的意义。近20年来, 人们对单向压缩简支矩形板后屈曲平衡路径的研究已有很多工作, 例如, 文献[1~5]。在这些研究工作中, 采用的方法是取几项满足边界条件的挠度试函数, 利用 Galerkin 方法, 能量法或加权残值法, 导出试函数的系数所满足的非线性方程组, 再利用 Thompson^[6]的广义坐标参数摄动法, 近似地求解出后屈曲平衡路径的2级, 4级或6级渐近解; 或是采用 Newton-Raphson 迭代法直接求解三角级数解的系数所满足的非线性方程组。相比较之下, 双向压缩简支矩形板后屈曲性态分析的研究工作则并不多见。文[7]取一项试函数, 用能量法对双向压缩矩形板的后屈曲问题进行了探讨。文[8]采用摄动法, 以最大挠度为摄动参数, 导出了后屈曲平衡路径的一个4级近似解。但此解却不具有双向压缩简支矩形板后屈曲平衡路径的一个对称性质(参见第四节)。本文从 von Karman 板大挠度方程出发, 在双重三角级数解的基础上, 提出一种简单、快速求解双向压缩简支矩形板后屈曲平衡路径的迭代算法。计算结果表明本文方法是非常有效的; 且证实了双向压缩简支矩形板后屈曲平衡路径的对称性质(参见第四节)。

二、基本方程

假设四边简支矩形板受双向压缩作用。选取如图1所示直角坐标系, 其中: a, b 分别表示矩形板的长度和宽度; p_x, p_y 表示沿 x, y 方向作用的均布压力。在下面, 我们记 α 为载荷

* 国家自然科学基金资助的课题。

比, β 为长宽比, 即 $\alpha = p_y/p_x$, $\beta = a/b$. 薄板的大挠度性态由著名的 von Karman 方程所描述:

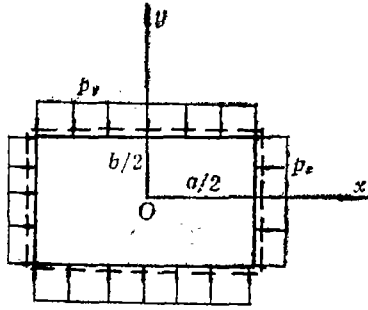


图 1

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^4 w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \nabla^4 \varphi &= Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中: $\nabla^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$; $D \equiv Eh^3/12(1-\nu^2)$

为板的弯曲刚度, E , ν 为弹性模量和 Poisson 比, h 为板的厚度. w 和 φ 表示挠度函数和应力函数. 简支矩形板受双向压缩作用的边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy = -p_x b, \quad \text{在 } x = \pm a/2 \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \int_{-a/2}^{a/2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx = -p_y a, \quad \text{在 } y = \pm b/2 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

引进下列无量纲:

$$w = \frac{w}{h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{y} = \frac{y}{b}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{Eh^3\beta^2}, \quad \bar{p}_x = \frac{b^2 p_x}{Eh^3\beta^2}, \quad \bar{p}_y = \frac{a^2 p_y}{Eh^3\beta^2}$$

则我们可得到(2.1)~(2.2)的无量纲化形式为(下面我们已省略每个度量上的“~”符号):

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\beta}^4 w &= \lambda \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \\ \nabla_{\beta}^4 \varphi &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dy = -\bar{p}_x, \quad \text{在 } x = \pm \frac{1}{2} \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx = -\bar{p}_y, \quad \text{在 } y = \pm \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中: $\nabla_{\beta}^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\beta^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4}$, $\lambda \equiv 12(1-\nu^2)\beta^4$

定解问题(2.3)~(2.4)即可用来研究双向压缩简支矩形板的后屈曲性态.

三、双重三角级数解和迭代法

利用双重三角级数法, 假设(2.3)~(2.4)的解为:

$$\left. \begin{aligned} w &= w(x, y) = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} w_{mn} \cos m\pi x \cos n\pi y \\ \varphi &= \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(\bar{p}_x y^2 + \bar{p}_y x^2) - \frac{1}{8} \sum_{r=0,2}^{\infty} \sum_{s=0,2}^{\infty} \varphi_{rs} \cos r\pi x \cos s\pi y \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中 w_{mn} , \bar{p}_x , \bar{p}_y 和 φ_{rs} 均为待定常数. 将(3.1)代入(2.3b), 通过直接计算可将 φ_{rs} 表为 w_{mn} 的函数为:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{0,0} &= 0 \\ \varphi_{r,0} &= \frac{1}{r^2} \sum_{q=1,3}^{\infty} q^2 \left[2 \sum_{p=1,3}^{\infty} w_{p,q} w_{r+p,q} + \sum_{p=1,3}^{r-1} w_{p,q} w_{r-p,q} \right] \quad (r=2,4,\dots) \\ \varphi_{0,s} &= \frac{1}{\beta^4 s^2} \sum_{p=1,3}^{\infty} p^2 \left[2 \sum_{q=1,3}^{\infty} w_{p,q} w_{p,s+q} + \sum_{q=1,3}^{s-1} w_{p,q} w_{p,s-q} \right] \quad (s=2,4,\dots) \\ \varphi_{r,s} &= \frac{1}{(r^2 + \beta^2 s^2)^2} \left\{ \sum_{p=1,3}^{r-1} \left[\sum_{q=1,3}^{s-1} (rq - sp)^2 w_{p,q} w_{r-p,s-q} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{q=1,3}^{\infty} (rq + sp)^2 w_{p,q} w_{r-p,s+q} \right] + 2 \sum_{p=1,3}^{\infty} \left[\sum_{q=1,3}^{s-1} (rq + sp)^2 w_{p,q} w_{r+p,s-q} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{q=1,3}^{\infty} (rq - sp)^2 w_{p,q} w_{r+p,s+q} \right] \right\} \quad (r=2,4,\dots; s=2,4,\dots) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

将(3.1)代入(2.3a), 则我们求得确定 w_{mn} 的非线性方程组为:

$$32D_{mn}w_{mn} + R_{mn} = 0 \quad (m=1,3,\dots; n=1,3,\dots) \quad (3.3)$$

其中:

$$D_{mn} = \frac{(m^2 + \beta^2 n^2)^2}{\lambda} + \frac{(m^2 \bar{p}_x + n^2 \bar{p}_y)}{\pi^2} \quad \begin{pmatrix} m=1,3,\dots \\ n=1,3,\dots \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} R_{mn} &= \sum_{p=1,3}^m \left[\sum_{q=1,3}^n (np - mq)^2 w_{p,q} \varphi_{m-p,n-q} + \sum_{q=1,3}^{\infty} (np + mq)^2 w_{p,q} \varphi_{m-p,n+q} \right] \\ &\quad + \sum_{p=1,3}^{\infty} \left[\sum_{q=1,3}^n (np + mq)^2 w_{p,q} \varphi_{m+p,n-q} + \sum_{q=1,3}^{\infty} (np - mq)^2 w_{p,q} \varphi_{m+p,n+q} \right] \\ &\quad + \sum_{r=0,2}^{\infty} \left[\sum_{q=1,3}^{\infty} (mn + mq + nr)^2 w_{m+r,q} \varphi_{r,n+q} + \sum_{q=1,3}^n (mn + nr - mq)^2 w_{m+r,q} \varphi_{r,n-q} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=0,2}^{\infty} \left[\sum_{p=1,3}^{\infty} (mn+ms+np)^2 w_{p,n+s} \varphi_{m+p,s} + \sum_{p=1,3}^m (mn+ms-np)^2 w_{p,n+s} \varphi_{m-p,s} \right] \\
& + \sum_{r=0,2}^{\infty} \sum_{s=0,2}^{\infty} (ms-nr)^2 w_{m+r,n+s} \varphi_{rs} \quad (m=1,3,\dots; n=1,3,\dots) \quad (3.5)
\end{aligned}$$

易见(2.4a)、(2.4b)的前三个条件是满足的。由(2.4a)、(2.4b)的第四个条件推得：

$$\bar{p}_s = -p_s, \quad \bar{p}_r = -p_r \quad (3.6)$$

这样，如果由(3.3)求得 w_{mn} ，则我们就求得了定解问题(2.3)~(2.4)精确的双重三角级数解。但(3.3)是一无限维方程组，因此在实际求解中，我们只能取(3.3)的前有限项进行求解，再不断增加方程组的个数，通过计算来判断解是否已收敛到(3.3)的真解。不失一般性，假设选取(3.3)中的 m, n 的上限分别取为 $2M-1$ 和 $2N-1$ 。记

$$\left. \begin{aligned}
w(i, j) &\equiv w_{2i-1, 2j-1}, \quad \varphi(i, j) \equiv \varphi_{2(i-1), 2(j-1)} \\
R(i, j) &\equiv R_{2i-1, 2j-1}, \quad D(i, j) \equiv D_{2i-1, 2j-1}
\end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

则我们可以推得(3.2)~(3.5)的前有限项用 $w(i, j), \varphi(i, j), R(i, j)$ 和 $D(i, j)$ 表示的形式为：

$$\varphi(1, 1) = 0$$

$$\begin{aligned}
\varphi(i, 1) &= B(i, 1) \sum_{l=1}^N (2l-1)^2 \left[\sum_{k=1}^{i-1} w(k, l) w(i-k, l) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{k=1}^{M-i+1} w(k, l) w(i+k-1, l) \right] \quad (i=2, 3, \dots, M)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(i, 1) &= B(i, 1) \sum_{l=1}^N (2l-1)^2 \sum_{k=i-M}^M w(k, l) w(i-k, l) \\
&\quad (i=M+1, M+2, \dots, 2M)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(1, j) &= B(1, j) \sum_{k=1}^M (2k-1)^2 \left[\sum_{l=1}^{j-1} w(k, l) w(k, j-l) \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{l=1}^{N-j+1} w(k, l) w(k, j+l-1) \right] \quad (j=2, 3, \dots, N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(1, j) &= B(1, j) \sum_{k=1}^M (2k-1)^2 \sum_{l=j-N}^N w(k, l) w(k, j-l) \\
&\quad (j=N+1, N+2, \dots, 2N)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(i, j) &= B(i, j) \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} \left[\sum_{l=1}^{j-1} [(i-1)(2l-1) - (j-1)(2k-1)]^2 w(k, l) w(i-k, j-l) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \sum_{l=1}^{N-j+1} [(i-1)(2l-1) + (j-1)(2k-1)]^2 w(k, l) w(i-k, j+l-1) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{k=1}^{M-i+1} \left[\sum_{l=1}^{j-1} [(i-1)(2l-1) + (j-1)(2k-1)]^2 w(k,l) w(i+k-1, j-l) \right. \\
& \left. +2 \sum_{l=1}^{N-j+1} [(i-1)(2l-1) - (j-1)(2k-1)]^2 w(k,l) w(i+k-1, j+l-1) \right] \Big\} \\
& \quad (i=2, 3, \dots, M; j=2, 3, \dots, N) \\
\varphi(i, j) = & B(i, j) \left\{ \sum_{l=j-N}^N \left[\sum_{k=1}^{i-1} [(i-1)(2l-1) - (j-1)(2k-1)]^2 w(k,l) w(i-k, j-l) \right. \right. \\
& \left. \left. +2 \sum_{k=1}^{M-i+1} [(i-1)(2l-1) + (j-1)(2k-1)]^2 w(k,l) w(i+k-1, j-l) \right] \right\} \\
& \quad (i=2, 3, \dots, M; j=N+1, N+2, \dots, 2N) \\
\varphi(i, j) = & B(i, j) \left\{ \sum_{k=i-M}^M \left[\sum_{l=1}^{j-1} [(i-1)(2l-1) - (j-1)(2k-1)]^2 w(k,l) w(i-k, j-l) \right. \right. \\
& \left. \left. +2 \sum_{l=1}^{N-j+1} [(i-1)(2l-1) + (j-1)(2k-1)]^2 w(k,l) w(i-k, j+l-1) \right] \right\} \\
& \quad (i=M+1, M+2, \dots, 2M; j=2, 3, \dots, N) \\
\varphi(i, j) = & B(i, j) \sum_{k=i-M}^M \sum_{l=j-N}^N [(i-1)(2l-1) - (j-1)(2k-1)]^2 w(k,l) w(i-k, j-l) \\
& \quad (i=M+1, M+2, \dots, 2M; j=N+1, N+2, \dots, 2N)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$32D(i, j)w(i, j) + R(i, j) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, M; j=1, 2, \dots, N) \tag{3.9}$$

$$D(i, j) = - \frac{[(2i-1)^2 + \beta^2(2j-1)^2]^2}{\lambda} - \frac{(2i-1)^2 p_x + (2j-1)^2 p_y}{\pi^2} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
R(i, j) = & \sum_{k=1}^i \left\{ \sum_{l=1}^j [(2j-1)(2k-1) - (2i-1)(2l-1)]^2 w(k,l) \varphi(i-k+1, j-l+1) \right. \\
& + \sum_{l=1}^N [(2j-1)(2k-1) + (2i-1)(2l-1)]^2 w(k,l) \varphi(i-k+1, j+l) \\
& + \sum_{l=1}^{N-j+1} [(2i-1)(2j+2l-3) - (2j-1)(2k-1)]^2 w(k, j+l-1) \varphi(i-k+1, l) \Big\} \\
& + \sum_{k=1}^M \left\{ \sum_{l=1}^j [(2j-1)(2k-1) + (2i-1)(2l-1)]^2 w(k,l) \varphi(i+k, j-l+1) \right. \\
& \left. + \sum_{l=1}^N [(2j-1)(2k-1) - (2i-1)(2l-1)]^2 w(k,l) \varphi(i+k, j+l) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=1}^{N-j+1} [(2i-1)(2j+2l-3) + (2j-1)(2k-1)]^2 w(k, j+l-1) \varphi(i+k, l) \Big\} \\
& + \sum_{k=1}^{M-i+1} \left\{ \sum_{l=1}^j [(2j-1)(2i+2k-3) \right. \\
& \quad \left. - (2i-1)(2l-1)]^2 w(i+k-1, l) \varphi(k, j-l+1) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=1}^N [(2i+2k-3)(2j-1) + (2i-1)(2l-1)]^2 w(i+k-1, l) \varphi(k, j+l) \right. \\
& \quad \left. + 4 \sum_{l=1}^{N-j+1} [(2i-1)(l-1) - (2j-1)(k-1)]^2 \right. \\
& \quad \left. \cdot w(i+k-1, j+l-1) \varphi(k, l) \right\} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

在这里我们已采用了下列记号:

$$\left. \begin{aligned}
B(1, j) &\equiv 1/4\beta^4(j-1)^2 & (j=2, 3, \dots, 2N) \\
B(i, 1) &\equiv 1/4(i-1)^2 & (i=2, 3, \dots, 2M) \\
B(i, j) &\equiv 1/4[(i-1)^2 + \beta^2(j-1)^2] & (i=2, 3, \dots, 2M; j=2, 3, \dots, 2N)
\end{aligned} \right\} \tag{3.12}$$

在板壳后屈曲性态分析中, 人们感兴趣的一个问题是压力载荷和最大挠度之间的关系, 也就是所谓的后屈曲平衡路径. 然而, 即便对方程组(3.9), 我们也不可能求得封闭解析解. 对于矩形板和薄膜的大挠度弯曲问题, Seide 曾提出一种迭代法^[9~10]. 借助于 Seide 的想法, 本文采用下面的迭代算法直接求解后屈曲平衡路径. 在介绍迭代算法之前, 首先, 由对称性分析可知, 最大挠度点是在板中心, 由(3.1)的有限项形式可得:

$$w_0 \equiv w(0, 0) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N w(i, j) \tag{3.13}$$

另一方面, 对于无量纲压力 p_x , p_y 存在关系式:

$$p_y = \alpha\beta^2 p_x \tag{3.14}$$

利用(3.13)~(3.14), 记 $w_0(I)$ ($I=1, 2, \dots, II$) 为中心挠度的不同的值, $p_x(I)$, $w^{(I)}(i, j)$ 为中心挠度值是 $w_0(I)$ 时所对应的值 (通常 $w_0(II) \leq 3.0$). 这样, 本文的迭代算法可表示为:

$$\left\{ \begin{aligned}
& w^{(0,1)}(i, j) = 0, \quad w^{(0,1)}(1, 1) = w_0(1) \\
& p_x^{(0)}(1) = \frac{\pi^2(1+\beta^2)^2}{\lambda(1+\alpha\beta^2)} \left[1 + \frac{\lambda}{32(1+\beta^2)^2} \frac{R^{(0,1)}(1, 1)}{w^{(0,1)}(1, 1)} \right] \\
& w^{(k,1)}(i, j) = - \frac{R^{(k-1,1)}(i, j)}{32D^{(k-1,1)}(i, j)} \quad (i+j > 2) \\
& w^{(k,1)}(1, 1) = w_0(1) - \sum_{\substack{i=1 \\ i+j > 2}}^M \sum_{j=1}^N w^{(k,1)}(i, j) \\
& p_x^{(k)}(1) = - \frac{\pi^2(1+\beta^2)^2}{\lambda(1+\alpha\beta^2)} \left[1 + \frac{\lambda}{32(1+\beta^2)^2} \frac{R^{(k,1)}(1, 1)}{w^{(k,1)}(1, 1)} \right]
\end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 w^{(0,I)}(i, j) &= w^{(I-1)}(i, j) + [w^{(I-1)}(i, j) - w^{(I-2)}(i, j)] \\
 w^{(0,I)}(1, 1) &= w_c(I) - \sum_{\substack{i=1 \\ i+j>2}}^M \sum_{j=1}^N w^{(0,I)}(i, j) \\
 p_z^{(0)}(I) &= \frac{\pi^2(1+\beta^2)^2}{\lambda(1+\alpha\beta^2)} \left[1 + \frac{\lambda}{32(1+\beta^2)^2} \frac{R^{(0,I)}(1, 1)}{w^{(0,I)}(1, 1)} \right] \\
 w^{(k,I)}(i, j) &= -\frac{R^{(k-1,I)}(i, j)}{32D^{(k-1,I)}(i, j)} \quad (i+j>2) \\
 w^{(k,I)}(1, 1) &= w_c(I) - \sum_{\substack{i=1 \\ i+j>2}}^M \sum_{j=1}^N w^{(k,I)}(i, j) \\
 p_z^{(k)}(I) &= -\frac{\pi^2(1+\beta^2)^2}{\lambda(1+\alpha\beta^2)} \left[1 + \frac{\lambda}{32(1+\beta^2)^2} \frac{R^{(k,I)}(1, 1)}{w^{(k,I)}(1, 1)} \right]
 \end{aligned} \right.$$

应指出的是前面定义的 $p_z(I)$, $w^{(I)}(i, j)$ 即是 $p_z^{(k)}(I)$, $w^{(k,I)}$ 迭代收敛值。

四、计算结果分析与比较

由上一节的迭代算法可以看到，与 Newton-Raphson 迭代法相比较，本文的算法不涉及求 Jacobi 矩阵和求解线性方程组，仅是加、减、乘和除的运算，因而此迭代法比 Newton-Raphson 迭代法简单和快速。我们在 VAX-11/750 计算机上进行了具体的计算。计算结果表明本文的迭代算法是非常有效的(迭代收敛准则控制数取为 10^{-6} , Poisson 比取为 0.3)。表 1 列举了迭代解(对 $\alpha=1, \beta=2$ 的情形)随着方程组的个数增加的变化、收敛情况，其中表中的符号“—”表示迭代解已稳定等同于方程组个数少时所得到的迭代解。由表中的结果可以看出：仅取几项三角函数作为挠度函数，所得出的结果是有很大的误差，特别当中心挠度比较大时。应该指出的是：对于长、宽、载荷比分别为 a, b, a 和 $b, a, 1/a$ 这两种情形，由对称性分析，或者从将坐标轴旋转 90 度的观点来看，这二种情形事实上是等价的，其平衡路径应仅相差一个常数倍因子。具体来说，采用本文的无量纲量，易验证：如果记 p_z^* 和 p_z^{**} 分别为参数为 (α, β) 和 $(1/\alpha, 1/\beta)$ 两种情形下对应于中心挠度为 w_c 时的压力值，则存在关系式： $p_z^{**} = \alpha\beta^3 p_z^*$ 。而文[8]的结果(式(25))则不具有此对称性质。表 2 的结果证

表1 压力值 p_z/p_c 的迭代解随方程组增加的变化和 $M=9$ 时的迭代次数 ($p_c=0.28244, \alpha=1, \beta=2, \text{迭代步长为} 0.1$)

$M=N$ w_c	$M=1$	$M=2$	$M=3$	$M=5$	$M=6$	$M=8$	$M=9$	迭代次数
0.1	1.00464	—	—	—	—	—	—	2
0.5	1.11602	1.11377	1.11369	—	—	—	—	4
1.0	1.46410	1.43999	1.43475	1.43489	—	—	—	6
1.5	2.04422	1.99079	1.94520	1.94698	1.94699	—	—	5
2.0	2.85640	2.79687	2.63863	2.64521	2.64524	—	—	6
2.5	3.90062	3.84297	3.49346	3.50520	3.50506	3.50509	—	7
3.0	5.17690	5.08442	4.48421	4.48933	4.48781	4.48789	—	10

表2 压力值 p_x/p_c 在参数为 α, β 和 $1/\alpha, 1/\beta$ 两种情形下的迭代解 ($M=N=5$)

w_c	$\alpha=2.0$	$\alpha=0.5$	$\alpha=1.0$	$\alpha=1.0$	$\alpha=2.0$	$\alpha=0.5$
	$\beta=0.5$	$\beta=2.0$	$\beta=0.5$	$\beta=2.0$	$\beta=1.0$	$\beta=1.0$
0.1	1.00464	—	1.00464	—	1.00341	—
0.5	1.11286	—	1.11369	—	1.08550	—
1.0	1.42929	—	1.43489	—	1.34420	—
1.5	1.94817	—	1.94698	—	1.78265	—
2.0	2.65189	—	2.64521	—	2.41002	—
2.5	3.49426	—	3.50520	—	3.23208	—
3.0	4.43359	—	4.48933	—	4.23609	—
p_c	15.0635	0.470734	18.0762	0.28244	1.20508	2.41016

实了我们上述分析得出的这种对称性质。图2~4给出了后屈曲载荷—中心挠度曲线在不同载荷比 α 和长宽比 β 的计算结果。可以看出，双向压缩矩形板的后屈曲平衡路径随 β 的变化比随 α 的变化要敏感得多。作为本文的一个特例，取 $\alpha=0$ ，则矩形板受双向压缩退化为矩形板受单向压缩且非加载纵边可移的情形。图5给出了单向压缩非加载纵边可移方板的屈曲平衡路径与文[3]结果的比较，可见二者的结果非常的一致。

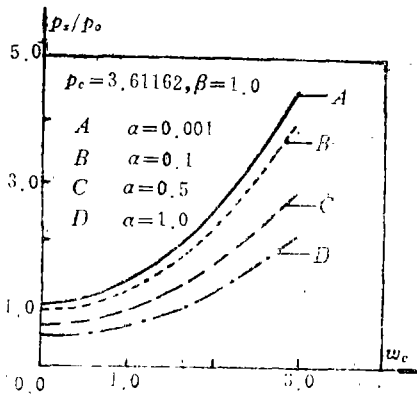


图2 不同参数下的压力—中心挠度曲线

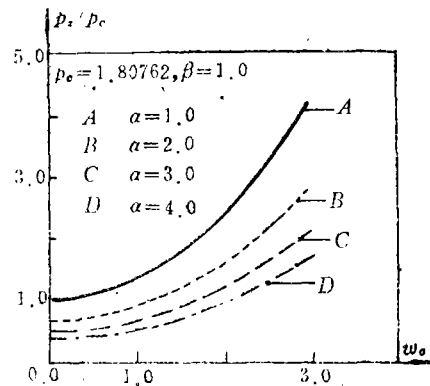


图3 不同参数下的压力—中心挠度曲线

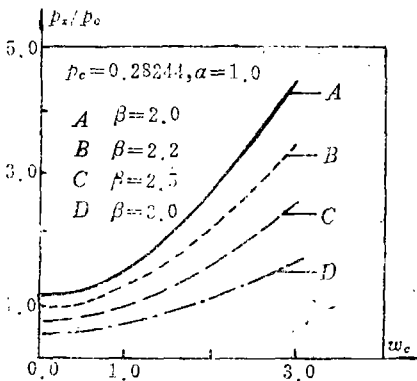


图4 不同参数下的压力—中心挠度曲线

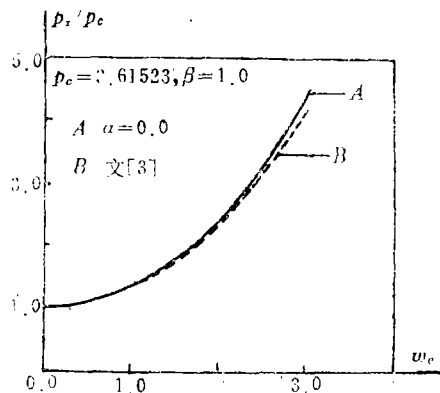


图5 本文结果与文[3]结果的比较

参 考 文 献

- [1] Walker, A. C., The postbuckling behavior of simply-supported square plates, *Aeronaut. Q.*, 20 (1969), 203—222.
- [2] A. C. 沃耳密尔, 《柔韧板与柔韧壳》, 卢文达等译, 科学出版社 (1959).
- [3] 张建武、范祖尧, 简支矩形板后屈曲平衡路径的一个摄动解, 上海交通大学学报, 13(5) (1984), 101—112.
- [4] 陈伟、范祖尧, 加权残数法分析受压简支矩形板后屈曲平衡路径, 《第三届全国加权残值法会议论文集》, 西南交通大学出版社 (1989), 65—71.
- [5] Chia Chuen-yuan, *Nonlinear Analysis of Plates*, McGraw-Hill (1980).
- [6] Thompson, J. M. T. and G. W. Hunt, *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley & Sons, London (1973).
- [7] Narayanan, R. and N. E. Shanmugam, Compressive strength of biaxially loaded plates, *Plated Structures, Stability and Strength*, Ed. by R. Narayanan, Applied Science Publishers (1983), 195—220.
- [8] 沈惠申、张建武, 双向压缩简支矩形板的后屈曲性态, 应用力学学报, 6(2) (1989).
- [9] Seide, P., Large deflections of rectangular membranes under uniform pressure, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 12 (1977), 397—406.
- [10] Seide, P., Large deflections of prestressed simply supported rectangular plates under uniform pressure, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 13 (1978), 145—156.

An Iteration Algorithm for Solving Postbuckling Equilibrium Path of Simply-Supported Rectangular Plates under Biaxial Compression

Qiao Zong-chun

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper, based on von Kármán large deflection equations and its double trigonometric series solution, we present a simple, fast and effective iteration algorithm for solving simply-supported rectangular plate subjected to biaxial compression.

Key words rectangular plates, postbuckling equilibrium path, iteration algorithm