

U型波纹壳轴对称大挠度非线性变形问题 (II)——计及壁厚分布的变化

胡 俊

(上海工业大学, 上海市应用数学和力学研究所)

(潘立宙推荐, 1991年7月22日收到)

摘 要

在文[1]基础上, 假设U型波纹壳子午线上任一点处壁厚的对数与该点到对称轴距离的对数成线性关系, 给出了相应的轴对称大挠度问题的摄动解, 讨论了由工艺因素引起的壁厚分布的变化对波纹壳刚度的影响。

关键词 U型纹波壳 壁厚分布变化 衰减率

一、工程背景

本文是文[1]工作的继续和推广。

工程上广泛使用的波纹壳(波纹管)是由等厚圆柱壳型管坯经过一系列工艺过程加工而成的, 不可避免地造成了壁厚的不均匀。一般在波谷处(图1中D点)最厚, 约等于管坯壁厚($h_D = h_0$), 从波谷到波峰(A)成衰减趋势, 从而形成壁厚分布 $h(r)$ ($r_D \leq r \leq r_A$)。而且, 工艺过程的不同, 使分布也不同, 即函数 $h(r)$ 受工艺因素的影响而变化。其中有一些规律可循。Аксельрад^[2]假设成型时径向的塑性变形与壁厚的改变一样, 是不受阻碍地进行的, 导出

$$h(r) = h_0 (r/r_D)^\alpha \quad (1.1)$$

文[3]中给出了我国生产的一批波纹管的壁厚分布实测结果, 发现测量点在双对数坐标 $\ln r - \ln h$ 中都在一条直线上, 即与文[2]结论一致。因此, 本文作者认为(1.1)式大致给出了实际的波纹管的壁厚分布规律, 其中工艺因素的影响由参数 α 反映, 一般有 $\alpha \leq 0$ 。

工程上常用衰减率(本文中记为 τ)刻画波纹管壁厚的变化

$$\tau = ((h_D - h_A)/h_D) \times 100\% \quad (1.2)$$

事实上, τ 包含了工艺过程及波纹管本身的几何尺寸两方面的因素。由(1.1)、(1.2)两式易得

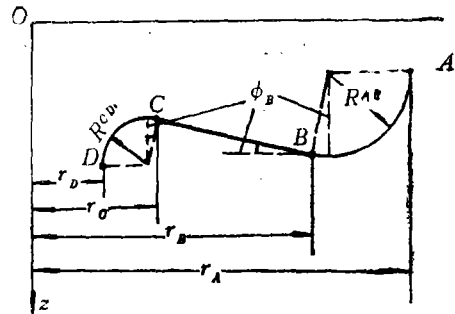


图1 波纹壳的组成

$$\tau = 1 - k^2 \quad (1.3)$$

其中 k 为波纹管外径与内径之比。(1.3)式明确地区别出工艺过程(τ)及几何尺寸(k)对衰减率的影响。对于我国生产的波纹管,一般 $20\% \leq \tau \leq 40\%$ 。

以前关于波纹管的工作^[4]大多假设等壁厚或者壁厚遵循某种固定的分布(如 h 与 r 成反比)。而工程上需要研究壁厚分布的不同对波纹管性能(如刚度)的影响程度,从而判别是否要考虑这种影响。

本文仍以文[1]的计算模型为基础,但假设变壁厚截头扁圆锥壳(BC)的壁厚分布为

$$h = h_0(r/r_0)^{\alpha} \quad (r_0 \leq r \leq r_B) \quad (1.4)$$

从而给出一种计及壁厚分布变化的波纹管轴对称大挠度非线性问题的摄动解。 $\tau = -1$ 时,即为文[1]的解。

二、问题的摄动解

着重叙述锥壳部分(BC)轴对称大挠度方程的摄动求解。

引进无量纲量

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a} - \rho_1, \quad \alpha = \frac{a\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h_0(\rho_1-1)^{-2\alpha}} \phi_B, \quad \beta = \frac{a\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h_0(\rho_1-1)^{-2\alpha}} \beta \\ \bar{\psi}_H &= \frac{a}{D_0(\rho_1-1)^{-2\alpha}} \psi_H \\ p &= -\frac{\alpha^2\sqrt{12(1-\nu^2)}}{D_0 h_0(\rho_1-1)^{-4\alpha}} \frac{1}{\omega_P + \omega_Q(\rho^2 + 2\rho_1\rho + 2\rho_1 - 1)} \psi_V \end{aligned} \right\} \quad (2.1a \sim e)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{r_B - r_0}{2}, \quad b = \frac{r_B + r_0}{2}, \quad \rho_1 = \frac{b}{a} \\ D_0 &= \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \beta = \Phi - \phi_B, \quad \psi_H = rN_\xi \\ \psi_V &= rN_{\xi\xi} + (\phi_B + \beta)rN_\xi = \psi_V(r_0) - Q(r^2 - r_0^2)/2 \\ \omega_P &= \begin{cases} 1 & \text{(轴向集中力 } P \text{ 拉伸)} \\ (2r_0/(r_B - r_0))^2 & \text{(封闭充内压 } Q \text{ 膨胀)} \end{cases} \\ \omega_Q &= \begin{cases} 0 & \text{(轴向集中力 } P \text{ 拉伸)} \\ 1 & \text{(封闭充内压 } Q \text{ 膨胀)} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.2a \sim i)$$

E 为杨氏模量, ν 为 Poisson 比。遵循文[1]第二节的步骤导得以(1.4)式为壁厚分布函数的扁圆锥壳轴对称大挠度问题的控制方程组: 关于 $\bar{\beta}$, $\bar{\psi}_H$ 的非线性二阶常微分方程组

$$\left. \begin{aligned} L_1(\bar{\beta}) &= (\rho + \rho_1)^{-1-2\alpha} (\alpha + \bar{\beta}) \bar{\psi}_H + (\rho + \rho_1)^{-1-2\alpha} [\omega_P \\ &\quad + \omega_Q(\rho^2 + 2\rho_1\rho + 2\rho_1 - 1)] p \quad (-1 \leq \rho \leq 1) \\ L_2(\bar{\psi}_H) &= -(\rho + \rho_1)^{-1+2\alpha} (\alpha + \bar{\beta}/2) \bar{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (2.3a, b)$$

其中

$$L_1(\quad) = \frac{d^2}{d\rho^2}(\quad) + \frac{1+3\alpha}{\rho+\rho_1} \frac{d}{d\rho}(\quad) + \frac{3\alpha\nu-1}{(\rho+\rho_1)^2}(\quad) \quad (2.4a)$$

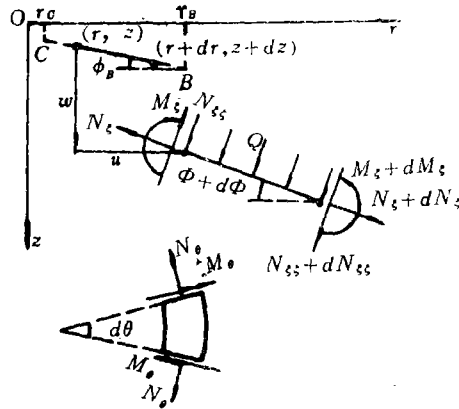


图2 锥壳的位移、转角和内力(矩)

$$L_2(\quad) = \frac{d^2}{d\rho^2}(\quad) + \frac{1-\nu}{\rho + \rho_1} \frac{d}{d\rho}(\quad) + \frac{\nu\rho - 1}{(\rho + \rho_1)^2}(\quad) \quad (2.4b)$$

位移:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{h_c^2(\rho_1 - 1)^{-2\nu}}{12(1-\nu^2)a} \left[(\rho + \rho_1)^{1-\nu} \frac{d\bar{\psi}_H}{d\rho} - \nu(\rho + \rho_1)^{-\nu} \bar{\psi}_H \right] \\ w &= \frac{h_c(\rho_1 - 1)^{-\nu}}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \int_{-1}^{\rho} \bar{\beta} - \nu \left[\frac{h_c(\rho_1 - 1)^{-\nu}}{a\sqrt{12(1-\nu^2)}} \right]^2 (\rho + \rho_1)^{-\nu} (\alpha + \bar{\beta}) \frac{d\bar{\psi}_H}{d\rho} \\ &\quad + \left[\frac{h_c(\rho_1 - 1)^{-\nu}}{a\sqrt{12(1-\nu^2)}} \right]^2 (\rho + \rho_1)^{-1-\nu} (\alpha + \bar{\beta}) \bar{\psi}_H d\rho \end{aligned} \right\} \quad (2.5a, b)$$

内力(矩):

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} N_z \\ N_\theta \end{array} \right\} &= \frac{D_0(\rho_1 - 1)^{-3\nu}}{a^2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\bar{\psi}_H}{\rho + \rho_1} \\ \frac{d\bar{\psi}_H}{d\rho} \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} M_z \\ M_\theta \end{array} \right\} &= -\frac{D_0 h_c \rho (\rho_1 - 1)^{-4\nu}}{a^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}} (\rho + \rho_1)^{3\nu} \left(\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \nu \end{array} \right\} \frac{d\bar{\beta}}{d\rho} + \left\{ \begin{array}{l} \nu \\ 1 \end{array} \right\} \frac{\bar{\beta}}{\rho + \rho_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.6a \sim d)$$

在方程组(2.3)中令 $\nu = -1$, 即为文[1]中的控制方程组, 文[1]中的解法, 可无困难地用于方程组(2.3)的摄动求解。

取波纹壳波谷(D)处相对于波峰(A)处的无量纲轴向相对位移作为摄动参数

$$\varepsilon = (w_D - w_A) / r_D \quad (2.7)$$

设

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\beta}(\rho, \varepsilon) \\ \bar{\psi}_H(\rho, \varepsilon) \\ p(\varepsilon) \end{array} \right\} = \sum_{i=1} \left\{ \begin{array}{l} \beta_i(\rho) \\ \psi_i(\rho) \\ p_i \end{array} \right\} \varepsilon^i \quad (2.8)$$

代入(2.3)得:

$$L_1(\beta_i) - (\rho + \rho_1)^{-1-3\nu} \alpha \psi_i = (\rho + \rho_1)^{-1-3\nu} \sum_{k=1}^{i-1} \beta_k \psi_{i-k} + (\rho + \rho_1)^{-1-3\nu}$$

$$\cdot [\omega_p + \omega_q(\rho^2 + 2\rho_1\rho + 2\rho_1 - 1)]p_l \quad (2.9a)$$

$$L_2(\psi_l) + (\rho + \rho_1)^{-1+n} \alpha \beta_l = -\frac{1}{2} (\rho + \rho_1)^{-1+n} \sum_{k=1}^{l-1} \beta_k \beta_{l-k} \quad \left(\begin{array}{l} -1 \leq \rho \leq 1 \\ l=1, 2, 3, \dots \end{array} \right) \quad (2.9b)$$

本文中我们约定

$$\sum_{\substack{j=0 \\ i>j}}^j = 0, \quad \prod_{\substack{j=0 \\ i>j}}^j = 1 \quad (2.10a, b)$$

从而, 将问题归结为求解下列变系数二阶常微分方程组

$$\left. \begin{array}{l} L_1(f) - \alpha(\rho + \rho_1)^{-1-3n} g = F(\rho) \\ L_2(g) + \alpha(\rho + \rho_1)^{-1+n} f = G(\rho) \end{array} \right\} \quad (-1 \leq \rho \leq 1) \quad (2.11)$$

由于系数和右端项均可展开成收敛半径为 ρ_1 的幂级数, 记

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\rho) \\ G(\rho) \end{array} \right\} = \bar{p} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} F_k \\ G_k \end{array} \right\} \rho^k \quad (2.12)$$

因此解也可表示成收敛半径为 ρ_1 的幂级数

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\rho) \\ g(\rho) \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A \left\{ \begin{array}{l} a_m(100000) \\ c_m(100000) \end{array} \right\} + B \left\{ \begin{array}{l} a_m(010000) \\ c_m(010000) \end{array} \right\} + C \left\{ \begin{array}{l} a_m(001000) \\ c_m(001000) \end{array} \right\} \right. \\ \left. + D \left\{ \begin{array}{l} a_m(000100) \\ c_m(000100) \end{array} \right\} + \bar{p} \left\{ \begin{array}{l} a_m(0000F_k G_k) \\ c_m(0000F_k G_k) \end{array} \right\} \right] \rho^m \quad (2.13)$$

其中 A, B, C 和 D 是待定常数, 系数 a_m 和 c_m 由下列递推关系确定:

$$\left. \begin{array}{l} (m+1)(m+2) \left\{ \begin{array}{l} a_{m+2}(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) \\ c_{m+2}(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) \end{array} \right\} \\ = \sum_{j=0}^m (-1)^{j+1} \left[(m-j+1) \rho_1^{-1-j} \left\{ \begin{array}{l} (1+3x) a_{m-j+1}(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) \\ (1-x) c_{m-j+1}(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) \end{array} \right\} \right. \\ \left. + (j+1) \rho_1^{-2-j} \left\{ \begin{array}{l} (3xy-1) a_{m-j}(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) \\ (xy-1) c_{m-j}(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) \end{array} \right\} \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{j!} \left\{ \begin{array}{l} \prod_{i=0}^{j-1} (1+3x+i) \cdot \rho_1^{-1-3n-j} c_{m-j}(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) \\ \prod_{i=0}^{j-1} (1-x+i) \cdot \rho_1^{-1+n-j} a_{m-j}(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) \end{array} \right\} \right] + \left\{ \begin{array}{l} F_m \\ G_m \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (2.14a \sim e)$$

$$\begin{array}{l} a_0(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) = a_0, \quad a_1(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) = a_1 \\ c_0(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) = c_0, \quad c_1(a_0 a_1 c_0 c_1 F_k G_k) = c_1 \quad (m \geq 0) \end{array}$$

a_0, a_1, c_0 和 c_1 为迭代初值. 由于 $\rho_1 > 1$, 所以上述解在 $|\rho| \leq 1$ 内是有效的.

将各级振动方程组的右端项展开成 ρ 的幂级数, 利用上述结果易得其通解 $\beta_l(\rho A_l C_l D_l p_l), \psi_l(\rho A_l B_l C_l D_l p_l), (l=1, 2, 3, \dots)$. 从而由位移、内力矩表示式可得

$$\begin{Bmatrix} u^{B^0}(\rho) \\ w^{B^0}(\rho) \\ M_{\xi}^{B^0}(\rho) \end{Bmatrix} = \sum_{l=1} \begin{Bmatrix} u_l^{B^0}(\rho A_l B_l C_l D_l p_l) \\ w_l^{B^0}(\rho A_l B_l C_l D_l p_l) \\ M_{\xi l}^{B^0}(\rho A_l B_l C_l D_l p_l) \end{Bmatrix} \varepsilon^l \quad (2.15)$$

其中 A_l, B_l, C_l, D_l 和 p_l 由连接条件及摄动条件确定。

$\widehat{AB}, \widehat{CD}$ 段圆环壳仍沿用文[1]中的摄动解, 只是 \widehat{AB} 段圆环壳的壁厚为 $h_A = h_B = h_D(r_A/r_B)^{\nu}$, 而 $h_D = h_C = h_0$. 可求得位移、内力矩, 记为

$$\begin{Bmatrix} u^{AB}(\theta) \\ w^{AB}(\theta) \\ M_{\xi}^{AB}(\theta) \end{Bmatrix} = \sum_{l=1} \begin{Bmatrix} u_l^{AB}(\theta I_l J_l p_l) \\ w_l^{AB}(\theta I_l J_l p_l) \\ M_{\xi l}^{AB}(\theta I_l J_l p_l) \end{Bmatrix} \varepsilon^l \quad (2.16)$$

$$\begin{Bmatrix} u^{CD}(\theta) \\ w^{CD}(\theta) \\ M_{\xi}^{CD}(\theta) \end{Bmatrix} = \sum_{l=1} \begin{Bmatrix} u_l^{CD}(\theta K_l L_l p_l) \\ w_l^{CD}(\theta K_l L_l p_l) \\ M_{\xi l}^{CD}(\theta K_l L_l p_l) \end{Bmatrix} \varepsilon^l \quad (2.17)$$

其中 I_l, J_l, K_l 和 L_l 由连续条件及摄动条件确定。

由 B, C 处位移(u, w)连续, 转角(β)连续, 内力(ψ_H)连续(ψ_V 已自动连续)和内力矩(M_{ξ})连续, 可导出关于每级摄动解中9个待定常数 $A_l, B_l, C_l, D_l, I_l, J_l, K_l, L_l$ 和 p_l 的9阶线性代数方程组, 解之即可确定上述待定常数。

三、算例及讨论

为了显示壁厚分布变化对波纹壳刚度的影响程度, 我们用上节给出的解法, 计算了一个例子: $r_A = 19\text{mm}, r_D = 12.75\text{mm}, R^{AB} = R^{CD} = 0.75\text{mm}, \phi_B = 0^\circ, h_0 = 0.12\text{mm}, \tau = 20\% \sim 40\%$, 8个波, $E = 13500 \times 9.8\text{N/mm}^2, \nu = 0.33$. 载荷形式为封闭充内压膨胀. 得到的特征曲线(内压 Q 与轴向相对位移)如图3. 壁厚分布的变化所引起的特征曲线的变化是很明显的. 随着衰减率 τ 的增加, 刚度减小, 非线性也稍有减弱. 以 $h_0 = 0.12\text{mm}, \tau = 30\%$ 为基准, 壁厚衰减率增减5%, 10%, 所对应的线性刚度 K_l 列于表1; 而管坯壁厚增减5%, 10%

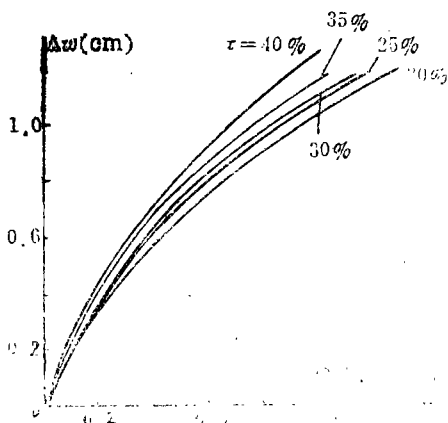


图3 壁厚分布变化对特征曲线的影响

表1 壁厚衰减率变化对线性刚度的影响

τ	20%	25%	30%	35%	40%
$K_l \times 9.8(\text{N/cm}^2)$	0.48	0.44	0.40	0.36	0.32

的相应线性刚度值列于表2, 通过对比可以发现: 壁厚衰减率的变化对刚度的影响程度已接近于管坯壁厚的影响. 因此, 在计算波纹管的刚度时, 计及壁厚分布的变化这一因素是必要的, 并建议工程设计不仅要考虑壁厚衰减, 也要适当考虑壁厚衰减率变化的影响。

感谢上海仪表弹性元件厂研究室倪嘉绥主任工程师工程背景方面的指点。

表 2

管坯壁厚变化对线性刚度的影响

h_0 (mm)	0.12(1+10%) =0.132	0.12(1+5%) =0.126	0.12	0.12(1-5%) =0.114	0.12(1-10%) =0.108
$K, \times 9.8$ (N/cm ³)	0.52	0.45	0.40	0.34	0.30

参 考 文 献

- [1] 胡俚, U型波纹壳轴对称大挠度非线性变形问题(I)——计及圆环壳的非线性变形、压缩角, 应用数学和力学, 14(3) (1993), 237—250.
- [2] Аксельрад Э. Л., Периодическое решение осесимметричной задачи теории оболочек, *Inzh Zhur, Mekh Tverd.*, (2) (1966), 77—83.
- [3] 徐志翹等, 变厚度U型波纹壳大挠度非线性问题的摄动解, 清华大学学报, 25(1) (1985), 39—51.
- [4] 樊大钧, 《波纹管设计学》, 北京理工大学出版社 (1988).

On Problems of U-Shaped Bellows with Nonlinear Deformation of Large Axisymmetrical Deflection (II)—— Counting Variation of Thickness Distribution

Hu Liang

(Shanghai University of Technology, Shanghai Institute of
Appl. Math. Mech., Shanghai)

Abstract

On the basis of paper[1], assuming the logarithm of thickness at arbitrary point on a U-shaped bellows meridian is linear with the logarithm of distance between that point and axis of symmetry, perturbation solutions of the corresponding problems of large axisymmetrical deflection are given. The effects of thickness distribution variation, which result from technology factors, on stiffness of bellows are discussed.

Key words: U-shaped bellows, variation of thickness distribution, decay rate