应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

二阶时滞微分方程边值问题*

李龙图 王志成 钱祥征

（长沙 湖南大学应用数学系，1992年5月22日收到）

摘 要

本文利用不动点原理及文[1]给出的存在性原理研究了二阶时滞微分方程边值问题，得到了新的存在性结果。

关键词 边值问题 时滞微分方程

一、引言与记号

泛函微分方程边值问题是一个较重要的研究课题，与泛函微分方程的有关其他课题相比较，发展要缓慢得多。主要原因是较难处理方程与边值之间的关系。

为下文方便起见，先介绍一些记号和文[1]中的存在性准则。本文考虑的方程具有下面的形式：

$$y^{(k)}(t)=F(t,y(\sigma_{11}(t)),\cdots,y(\sigma_{1m_1}(t)),\cdots,y^{(k-1)}(\sigma_{k1}(t)),\cdots,y^{(k-1)}(\sigma_{km_k}(t)))$$
$$\equiv F(t,y_{\sigma,k}(t)) \tag{1.1}$$

这里 $0\leqslant t\leqslant T$，F为连续函数或为Carathéodory 函数，$\sigma_{ij}(t)$ 是给定的实值连续函数，$\sigma_{ij}(t)\leqslant t$ 且 $\sigma_{ij}(t)$ 在$[0,T)$上有唯一的零点r_{ij}，使得在$[0,r_{ij})$上$\sigma_{ij}<0$，在$(r_{ij},T]$上，$\sigma_{ij}>0$。现设

$$d_{ij}=-\min\{\sigma_{ij}(t);\ i=1,2,\cdots,\ k;\ j=1,2,\cdots,\ m_i\}$$
$$d=\max\{d_{ij};\ i=1,2,\cdots,\ k;\ j=1,2,\cdots,\ m_i\}$$

因此$d\geqslant 0$。因(1.1)为时滞方程。定义

$$y(t)=\phi(t),\qquad -d\leqslant t\leqslant 0 \tag{1.2}$$

这里$\phi(t)$是$[-d,0]$上的函数。我们假定$\phi\in C^v[-d,0]$，其中

$$v=\max\{i-1;\ \min\sigma_{ij}<0\},\ i\in\{1,2,\cdots,k\},\ j\in\{1,2,\cdots,\ m_i\}$$

$C^m[a,b]=C^m([a,b],\ R^n)$表示将区间$[a,b]$映射入$R^n$中$m$次连续可微函数所组成的Banach空间，其模定义为

$$|u|_m=\max\{|u|_0,\ |u'|_0,\ \cdots,\ |u^{(m)}|_0\}$$

而$|u|_0=\max\{|u(t)|;\ a\leqslant t\leqslant b\}$。$L^p[a,b]$表示在区间$[a,\ b]$上$p$次 Lebesgue 可积函数所组成的 Banach 空间，其模定义为

---

* 林宗池推荐。
国家自然科学基金资助课题。

$$\|u\|_p=\left\{\int_a^b |u(t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$L^\infty[a, b]$ 表示本性有界函数组成的 Banach 空间，其模为通常所定义的上确界模，$W^{k,p}[a,b]$表示区间$[a,b]$上的函数u组成的 Sobolev 空间，即$u^{(k-1)}$绝对连续且$u^{(k)}\in L^p[a,b]$的函数u组成的空间．定义

$$\tilde{C}^{v,m}[-d,T]=\tilde{C}^{v,m}([-d,T],\ R^n)$$

即由具下列特性的函数u构成的 Banach 空间，$u\in C[-d,T]$，$u\restriction[-d,0]\in C^v[-d,0]$，$u\restriction[0,T]\in C^m[0,T]$，且其模定义为$\max\{|u|_0,\ |u\restriction[-d,0]|_v,\ |u\restriction[0,T]|_m\}$，这里$\restriction$表示$u$在指定区间上的限制．另外

$$C_\phi^{v,m}[-d,T]=\{u:u\in\tilde{C}^{v,m}[-d,T]\text{且在}[-d,0]\text{上}u=\phi\}$$

用$\mathscr{B}$表示加在区间$[0,T]$上的边值条件．对每个$i=1,2,\cdots,\ k$，定义$U_i:C^{k-1}([0,\ T],\ R^n)\to R^n$，且对任意$k-1$次实值可微函数$\theta$和任意$v\in R^n$有$U_i(\theta(t)v)=U_i(\theta(t))v$ 若 $U_i(u)=r_i$，称函数$u\in C^m[0,T]$，$m\geqslant k-1$满足边值条件$\mathscr{B}$，记为$u\in\mathscr{B}$．若$U_i(u)=0$，记为$u\in\mathscr{B}_0$．定义算子$\Lambda:C_{\mathscr{B}_0}^k[0,T]\to C[0,T]$，$\tilde{L}:C_{\mathscr{B}}^{k-1}[0,T]\to C_0[0,T]$ 如下：

$$\Lambda y=y^{(k)},\quad (\tilde{L}y)(t)=y^{(k-1)}(t)-y^{(k-1)}(0)$$

这里 $C_0[0,T]=\{u\in C[0,T]:\ u(0)=0\}$

文[1]中考虑的方程类型为

$$\left.\begin{aligned}&y^{(k)}(t)=f(t,y_{\sigma,k}(t))\\&y(t)=\phi(t)\qquad -d\leqslant t\leqslant 0\\&y\in\mathscr{B}\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

这里$f:[0,T]\times R^{mn}\to R^n$ 是 L^p-Carathéodory 函数，$m=\sum\limits_{i=1}^k m_i$.

$$\left.\begin{aligned}&y^{(k)}(t)=\lambda f(t,y_{\sigma,k}(t))\\&y(t)=\phi(t),\qquad -d\leqslant t\leqslant 0\\&y\in\mathscr{B}\end{aligned}\right\}\tag{1.3$_\lambda$}$$

这里$\lambda\in[0,1]$，所谓方程(1.3)的解，是指这样的函数y，$y\in\tilde{C}_{\phi,\mathscr{B}}^{v,k-1}[-d,T]$，在$[0,T]$上，$y^{(k-1)}(t)$绝对连续，对几乎所有的$t\in[0,T]$方程(1.3)成立．

定理[1] 假设σ_{ij}与L^p-Carathéodory 函数$f:[0,T]\times R^{mn}\to R^n$满足前面提到的条件．设在边值条件$U_i(u)=r_i(i=1,2,\cdots,\ k)$中，$U_1(u)=u(0)$，$r_1=\phi(0)$，其中$\phi\in C^v([-d,0],\ R^n)$为给定的函数．微分算子$\Lambda:C_{\mathscr{B}_0}^k[0,T]\to C[0,T]$可逆，$\tilde{h}$表$\tilde{L}\tilde{h}=0$的唯一解．定义$h\in\tilde{C}_{\phi,\mathscr{B}}^{v,k-1}[-d,T]$如下：在$[-d,0]$上$h=\bar{\phi}$，在$[0,T]$上$h=\tilde{h}$．则有：

(A) 设U为$\tilde{C}_{\phi,\mathscr{B}}^{v,k-1}[-d,T]$中的有界开集，$h\in U$，则下列之一成立：

(i) (1.3)有解$y\in\bar{U}$；

(ii) 存在$\lambda\in(0,1)$，使得$(1.3)_\lambda$的解$y\in\partial U$．

(B) 对每一个$\lambda\in(0,1)$，存在常数M，使得$(1.3)_\lambda$的任意解$y\in\tilde{C}^{v,k-1}[-d,T]$，其模$\|y\|<M$，则(1.3)有一个解$y$使得$|y\restriction[0,T]|_{k-1}\leqslant\max\{M,|\tilde{h}|_{k-1}\}$．

本文利用不动点原理及文[1]中定理讨论了纯量二阶时滞微分方程边值问题．其形式与文[1]中的类似．但用不动点原理来证明的边值问题中，其边值条件不同，用文[1]的方法来证明，其方法失效．

二、主要结果

为简便起见，设$T=1$。先考虑边值问题：

$$\left.\begin{array}{ll} y''(t)=f(t,y(t),y(\sigma(t))), & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ y(t)=\phi(t), & -d\leqslant t\leqslant 0 \\ ay'(0)+by(1)=s, & a+b\neq 0,\ b\neq 0 \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

这里$f:[0,1]\times R^2\to R$连续，ϕ在$[-d,0]$上连续，其中$-d=\min\{\sigma(t):\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$. $\sigma(t)$为给定的实值连续函数，$y'(0)$表示右导数$y'(0^+)$，a，b，s为实常数.

定理1 假设在边值问题(2.1)中，下列条件成立：

(a) $|f(t,x,u)-f(t,y,v)|\leqslant K_1|x-y|+K_2|u-v|$，$K_1$，$K_2$为正实数。

(b) $K_1+K_2<1/2$

$$|(a+b)^{-1}b|(K_1+K_2)[1-2(K_1+K_2)]^{-1}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|t-(a+b)b^{-1}t^2|<2$$

则边值问题(2.1)存在解$y\in\tilde{C}^{0;2}_{\phi,\mathscr{B}}[-d,1]$

证明 考虑含参数$\alpha\in R$的方程：

$$y''(t)=f(t,y(t),y(\sigma(t)))+\alpha \tag{2.2}$$

在方程(2.2)的两边从0到t积分两次：得

$$\left.\begin{array}{l} y(t)=\phi(0)+y'(0)t+\displaystyle\int_0^t\int_0^s f(r,y(r),\ y(\sigma(r)))drds+\frac{\alpha}{2}t^2 \\ y(1)=\phi(0)+y'(0)+\displaystyle\int_0^1\int_0^s f(r,y(r),\ y(\sigma(r)))drds+\frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

由边值条件$ay'(0)+by(1)=s$和上式可得出α的表达式

$$\alpha=2b^{-1}\Big(s-(a+b)y'(0)-b\phi(0)-b\int_0^1\int_0^s f(r,y(r),y(\sigma(r)))drds\Big)$$

将α的表达式代入(2.3)式得

$$y(t)=\phi(0)+y'(0)t+\int_0^t\int_0^s f(r,y(r),y(\sigma(r)))drds+sb^{-1}t^2$$
$$-(a+b)b^{-1}y'(0)t^2-\phi(0)t^2-t^2\int_0^1\int_0^s f(r,y(r),y(\sigma(r)))drds \tag{2.4}$$

将(2.4)式看成含有参数$y'(0)$的方程。设$y'(0)=p$，记

$$r(t,p)=(1-t^2)\phi(0)+sb^{-1}t^2+[1-(a+b)b^{-1}t]pt$$

则(2.4)便可写成

$$y(t)=r(t,\ p)+\int_0^t\int_0^s f(r,\ y(r),\ y(\sigma(r)))drds-t^2\int_0^1\int_0^s f(r,y(r),y(\sigma(r)))drds \tag{2.5}$$

用$(Fy)(t)$表示(2.5)式右端，$|x|_0=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$，则对任意的$x,y\in\tilde{C}^{0;2}_{\phi,\mathscr{B}}[-d,1]$，有

$$|(Fy)(t)-(Fx)(t)|\leqslant\left|\int_0^t\int_0^s(f(r,y(r),y(\sigma(r)))-f(r,x(r),x(\sigma(r))))drds\right|$$
$$+t^2\left|\int_0^1\int_0^s(f(r,y(r),y(\sigma(r)))-f(r,x(r),x(\sigma(r))))drds\right|$$

$$\leqslant(2K_1|y-x|_0+2K_2|y-x|_0)$$
$$=2(K_1+K_2)|y-x|_0$$

从而 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|(Fy)(t)-(Fx)(t)|=|(Fy)-(Fx)|_0\leqslant 2(K_1+K_2)|y-x|_0$

若$K_1+K_2<1/2$，则由压缩映像原理知，方程(2.5)存在唯一解$y(t,p)$。由(2.5)式可得

$$|y(\cdot,p)-y(\cdot,\bar{p})|_0\leqslant[1-2(K_1+K_2)]^{-1}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|r(t,p)-r(t,\bar{p})|$$

由$r(t,p)$的定义便可知

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|r(t,p)-r(t,\bar{p})|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|t-(a+b)b^{-1}t^2||p-\bar{p}|$$

因此

$$|y(\cdot,p)-y(\cdot,\bar{p})|_0\leqslant[1-2(K_1+K_2)]^{-1}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|t-(a+b)b^{-1}t^2||p-\bar{p}| \tag{2.6}$$

若$\alpha(p)=0$，则$y(\cdot,p)$便是边值问题(2.1)的解．而

$$\alpha(p)=2b^{-1}(s-(a+b)p-b\phi(0)-b\int_0^1\int_0^s f(r,y(r,p),y(\sigma(r),p))drds)$$

考虑方程

$$p=(a+b)^{-1}(s-b\phi(0)-b\int_0^1\int_0^s f(r,y(r,p),y(\sigma(r),p))drds) \tag{2.7}$$

用$G(p)$表(2.7)式右端

$$|G(p)-G(\bar{p})|\leqslant|(a+b)^{-1}b|\cdot\frac{1}{2}(K_1+K_2)|y(\cdot,p)-y(\cdot,\bar{p})|_0$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|(a+b)^{-1}b|[1-2(K_1+K_2)]^{-1}(K_1+K_2)\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|t-(a+b)b^{-1}t^2|\cdot|p-\bar{p}|$$

则由条件(b)及压缩映像原理可知(2.7)式存在唯一解p^*．且$\alpha(p^*)=0$，从而完成了定理1的证明．

下面考虑边值问题

$$\left.\begin{array}{ll} y''(t)=f(t,y'(t),y'(\sigma(t))) & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ y(t)=\phi(t) & -d\leqslant t\leqslant 0 \\ ay(1)+by'(1)=s & \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

为了利用文[1]的存在性原理，考虑含参数λ的边值问题，$\lambda\in[0,1]$：

$$\left.\begin{array}{ll} y''(t)=\lambda f(t,y'(t),y'(\sigma(t))) & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ y(t)=\phi(t) & -d\leqslant t\leqslant 0 \\ ay(1)+by'(1)=s & \end{array}\right\} \tag{2.8$_\lambda$}$$

这里f，σ，ϕ满足引言提到的条件．记$\sigma(t)$在$[0,1)$的唯一零点为r．为了证明下面的定理，先引用文[2]中的一个引理：

引理1[2] 设$u(t)\geqslant 0$，$K(t)\geqslant 0$，$a(t,s)\geqslant 0$连续且$K(t)$单调非减，这里$t,s\in(t_0,b)$，b是常数或∞，$g(u)$在$[0,\infty)$内单调非减，连续，在$[0,\infty)$取正值．如果

$$u(t)\leqslant K(t)+\int_{t_0}^t a(t,s)g(u(s))ds,\qquad t\in(t_0,b)$$

则

$$G(u(t))\leqslant G(K(t))+\int_{t_0}^t a(t,s)ds,\qquad t\in(t_0,b)$$

这里$G(t)$是$[0,\infty)$上的单调增加函数，其定义为

$$G(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{g(s)},\qquad u_0>0,\ u\geqslant 0$$

若 $G(K(t))+\int_{t_0}^{t}a(t,s)ds\in\mathrm{Dom}G^{-1}$(Dom表定义域，$G^{-1}$表$G$的反函数)，则

$$u(t)\leqslant G^{-1}[G(K(t))+\int_{t_0}^{t}a(t,s)ds]$$

定理 2 若在边值问题(2.8)中，f，σ，ϕ满足第一节中提到的条件，r为$\sigma(t)$在$[0,1]$中的唯一零点，且满足下列条件：

（1） 存在非减连续函数ψ，$h:[0,\infty)\to(0,\infty)$，使得对任意的$t\in[0,1]$，$|f(t,u,v)|\leqslant\psi(|u|)+h(|v|)$.

（2） 设$G(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{\psi(|s|)+h(|s|)}$，若对任意的$\lambda\in[0,1]$，$t\in[0,1]$存在与$\lambda$，$t$无关的常数$M>0$，使得

$$G^{-1}[G(|\phi'(0)|+\lambda rh(|\phi'|_0)+\lambda t]\leqslant M$$

这里G^{-1}表G的反函数．$|\phi'|_0=\max\limits_{-d<t<0}|\phi'(t)|$，

则边值问题(2.8)存在解$y\in\bar{C}^{1,2}_{\phi,\mathscr{B}}[-d,1]$.

证明 在方程$(2.8)_\lambda$两边从0到t积分，得

$$y'(t)=\phi'(0)+\lambda\int_0^t f(s,y'(s),y'(\sigma(s)))ds$$

因此由条件(1)可得：

$$|y'(t)|\leqslant|\phi'(0)|+\lambda\int_0^t|f(s,y'(s),y'(\sigma(s)))|ds$$

$$\leqslant|\phi'(0)|+\lambda\int_0^t\psi(|y'(s)|)ds+\lambda\int_0^t h(|y'(\sigma(s))|)ds$$

$$\leqslant|\phi'(0)|+\lambda\int_0^r h(|\phi'|_0)ds+\lambda\int_0^t[\psi(|y'(s)|)+h(|y'(s)|)]ds$$

$$=|\phi'(0)|+\lambda rh(|\phi'|_0)+\lambda\int_0^t[\psi(|y'(s)|)+h(|y'(s)|)]ds$$

由引理 1 可得

$$|y'(t)|\leqslant G^{-1}(G(|\phi'(0)|)+\lambda rh(|\phi'|_0)+\lambda t)$$

而又由条件(2)可知存在与λ，t无关的常数$M>0$，使得

$$|y'(t)|\leqslant M$$

从而在$[-d,1]$上，$|y'(t)|\leqslant\max\{|\phi'|_0,M\}=M_0$，

而由$|y'(t)|\leqslant M_0$可知，在$[-d,1]$上．

$$|y(t)|\leqslant\max\left\{|\phi|_0,\ |\phi(0)|+\int_0^1|y'(t)|dt\right\}$$

$$\leqslant\max\{|\phi|_0,\ |\phi(0)|+M_0\}=M_1$$

这样就找到了方程$(2.8)_\lambda$的先验界．因此根据第一节中给出的定理[1]便可知，边值问题(2.8)存在解$y\in\bar{C}^{1,2}_{\phi,\mathscr{B}}[-d,1]$. 证毕

下面再考虑边值问题：

$$\left.\begin{array}{ll} y''(t)=f(t,y(t),y(\sigma_1(t)),y'(t),y'(\sigma_2(t))) & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ y(t)=\phi(t) & -d\leqslant t\leqslant 0 \\ ay(1)+by'(1)=s & a>0,\ b\geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (2.9)$$

这里 $f:[0,1]\times R^4\to R$ 连续，$\phi:[-d,0]\to R$ 连续可微，滞量 σ_1，σ_2 满足第一节中提到的条件，r_2 表示 σ_2 的唯一零点. 为证明边值问题(2.9)存在解，只须对下列边值问题的解作出先验估计便可：

$$\left.\begin{array}{ll} y''(t)=\lambda f(t,y(t),y(\sigma_1(t)),y'(t),y'(\sigma_2(t))) & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ y(t)=\phi(t) & -d\leqslant t\leqslant 0 \\ ay(1)+by'(1)=s & a>0,\ b\geqslant 0 \end{array}\right\} \qquad (2.9)_\lambda$$

其中 $\quad 0<\lambda<1$

定理 3 若在边值问题(2.9)中，f，σ_1，σ_2，ϕ 满足第一节中提到的条件，r_2 为 $\sigma_2(t)$ 的唯一零点，且满足如下条件：

（1） 存在常数 $K>0$，使得对任意的 $t\in[0,1)$，$y\in\tilde{C}^{1,1}[-d,1]$，有

$$y(t)f(t,y(t),y(\sigma_1(t)),0,y'(\sigma_2(t)))>0 \qquad \text{当}\ |y(t)|>K\ \text{时}$$

（2） 存在非减连续函数 $\psi,h:[0,\infty)\to(0,\infty)$，使得对任意的 $(t,u,v)\in[0,1]\times[-M_0,M_0]^2$ 有

$$|f(t,u,v,p,w)|\leqslant\psi(|p|)+h(|w|)$$

其中 $\quad M_0=\max\{K,|s|/a,\ |\phi|_0\}$

（3） 设 $G(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{ds}{\psi(|s|)+h(|s|)}$，若对任意的 $\lambda\in[0,1]$，$t\in[0,1]$，存在与 λ，t 无关的常数 $M>0$，使得

$$G^{-1}[G(|\phi'(0)|+\lambda r_2 h(|\phi'|_0))+\lambda t]\leqslant M$$

这里 G^{-1} 表 G 的反函数，$|\phi'|_0=\max\limits_{-d\leqslant t\leqslant 0}|\phi'(t)|$，

则边值问题 (2.9) 存在解 $y\in\tilde{C}^{1,2}_{\phi,\mathscr{B}}[-d,1]$.

证明 对$(2.9)_\lambda$的任意解 $y(t)$，用文[1]引理1.2的证明方法可得出在 $[-d,1]$ 上，

$$|y(t)|\leqslant\max\{M_0,|\phi|_0\}$$

而在 $[0,1]$ 上

$$|y(t)|\leqslant M_0$$

其中 $\quad M_0=\max\{K,|s|/a,\ |\phi(0)|\}$，$|\phi|_0=\max\limits_{-d\leqslant t\leqslant 0}|\phi(t)|$

用本文定理2的方法可证得 $|y'(t)|$ 在 $[-d,1]$ 上满足

$$|y'(t)|\leqslant\max\{|\phi'|_0,M\}$$

从而由第一节给出的定理，便可知边值问题 (2.9) 存在解 $y\in\tilde{C}^{1,2}_{\phi,\mathscr{B}}[-d,1]$. 证毕.

注 类似可证形式上与本文所考虑的类型相同的奇异边值问题，即对下列边值问题可得出解的存在性结果：

$$\left\{\begin{array}{ll} y''(t)=\eta(t)f(t,y_{\sigma,\mathfrak{z}}(t)) & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ y(t)=\phi(t) & -d\leqslant t\leqslant 0 \\ y\in\mathscr{B} & \end{array}\right.$$

这里 $\eta(t)$ 为 $[0,1]$ 的可积函数，在 $[0,1]$ 上 $\eta>0$，且 $1/\eta$: $[0,1]\to[0,\infty)$，$\mathscr{B}$ 为下列两种边值之一：

（i） $ay'(0)+by(1)=s$

（ii） $ay(1)+by'(1)=s$

参 考 文 献

[1] Lee, J. W. and D. O'Regan, Existence results for differential delay equations -I, *Nonlinear Analysis*, 17 (1991), 683—702.

[2] 徐安石，二阶具和不具时滞的微分方程解的有界性和稳定性，数学年刊·A辑，9(5) (1988), 615—622.

Boundary Value Problems for Second Order Delay Differential Equations

Li Long-tu　Wang Zhi-cheng　Qian Xiang-zheng

(Department of Applied Mathematics, Hunan University, Changsha)

Abstract

In this paper, using a fixed point principle and existence principle given in [1], we study the boundary value problems for second order differential equations. Some new existence results are obtained.

Key words boundary value problem, delay differential equation