

# 静止平面应力裂纹尖端的各向异性 塑性应力场的补充研究(I)\*

林 拜 松

(中南工业大学, 1991年7月15日收到)

## 摘 要

文献[1]的结果对 $\alpha \geq 2$ 情形不适用。为此,我们用文献[1]的方法导出了 $\alpha=2$ 和 $\alpha > 2$ 两者的静止平面应力裂纹尖端的各向异性塑性应力场的一般表达式。作为实例,我们给出了 $\alpha=2$ 的静止平面应力 I 型和 II 型裂纹尖端的各向异性塑性应力场的解析表达式。

**关键词** 平面应力 裂纹尖端 各向异性塑性应力场 一般表达式

## 一、引 言

文献[1]的结果对 $\alpha \geq 2$ 情形不适用。为此,我们用文献[1]的方法来研究 $\alpha \geq 2$ 的静止平面应力裂纹尖端的各向异性塑性应力场。

在裂纹尖端的理想塑性应力分量都只是 $\theta$ 的函数的条件下,利用平衡方程及 $\alpha=2$ 和 $\alpha > 2$ 两者的Hill各向异性屈服条件,本文导出了 $\alpha=2$ 和 $\alpha > 2$ 两者的静止平面应力裂纹尖端的各向异性塑性应力场的一般表达式。显然,对于 $X=Y$ 的所有特殊情形,我们有 $\alpha < 2$ 。所以,本文所得的一般表达式仅适用于文献[1]的六种各向异性塑性特殊情形中的两种,即 $X=Z$ 和 $Y=Z$ 。将 $\alpha=2$ 和 $\alpha > 2$ 的一般表达式用于上述两种各向异性塑性特殊情形,我们就得到 $\alpha=2$ 和 $\alpha > 2$ 的两种各向异性塑性特殊情形的静止平面应力裂纹尖端的应力场的一般表达式。作为实例,我们只给出了 $\alpha=2$ 的特殊情形 $X=Z=\sqrt{3}T$ 的静止平面应力 I 型和 II 型裂纹尖端的各向异性塑性应力场的解析表达式。

将卡氏直角坐标系 $(x, y, z)$ 和柱面极坐标系 $(r, \theta, z)$ 的原点都放在静止平面应力裂纹的尖点 $O$ 上,如图1所示;而 $x, y, z$ 轴是各向异性主轴。

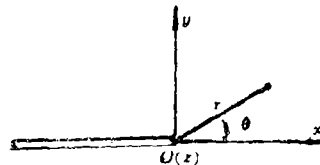


图 1

\* 薛大为推荐。

二、 $\alpha = 2$ 的一般解析表达式

设静止平面应力裂纹尖端的理想塑性应力分量 $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ 都只是 $\theta$ 的函数。引用下列新应力变量:

$$\sigma_+ = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{X + Y} \right), \quad \sigma_- = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{X - Y} \right), \quad \sigma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{T} \quad (2.1)$$

则 $\alpha = 2$ 的Hill屈服条件为:

$$4\sigma_-^2 + \sigma_{xy}^2 = 1 \quad (2.2)$$

而且

$$\alpha = \frac{X}{Y} + \frac{Y}{X} - \frac{XY}{Z^2} = 2 \quad (2.3)$$

其中  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  分别是在各向异性的主方向  $x$ ,  $y$ ,  $z$  上的拉伸屈服应力, 而  $T$  是相对于各向异性主轴  $x$ ,  $y$  轴的剪切屈服应力。

为了计算方便, 我们将平衡方程变换成:

$$\left. \begin{aligned} XY \sin 2\theta \frac{d\sigma_-}{d\theta} + T(X \sin^2 \theta - Y \cos^2 \theta) \frac{d\sigma_{xy}}{d\theta} &= 0 \\ XY \sin 2\theta \frac{d\sigma_+}{d\theta} - T(X \sin^2 \theta + Y \cos^2 \theta) \frac{d\sigma_{xy}}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4a, b)$$

如果我们取

$$\sigma_- = -\frac{1}{2} \cos \varphi, \quad \sigma_{xy} = \sin \varphi \quad (2.5)$$

则屈服条件(2.2)恒被满足。  $\varphi$  只是  $\theta$  的函数。

将式(2.5)代入式(2.4a), 得到:

$$\left[ \frac{XY}{2} \sin 2\theta \sin \varphi + T(X \sin^2 \theta - Y \cos^2 \theta) \cos \varphi \right] \frac{d\varphi}{d\theta} = 0 \quad (2.6)$$

由式(2.6)得到下列两个应力区:

1. 均匀应力区 ( $d\varphi/d\theta = 0$ )

在均匀应力区内, 我们有

$$\varphi = \text{const} \quad (2.7)$$

2. 非均匀应力区 ( $d\varphi/d\theta \neq 0$ )

非均匀应力区的存在条件是式(2.6)中  $d\varphi/d\theta$  的系数为零, 即

$$\text{tg} \varphi = \frac{2T(Y \cos^2 \theta - X \sin^2 \theta)}{XY \sin 2\theta} \quad (2.8)$$

于是, 由(2.8), (2.5) 和 (2.4b), 我们得到非均匀应力区内新应力变量的一般解析表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \mp \frac{2T(X\sin^2\theta - Y\cos^2\theta)}{\sqrt{(XY\sin 2\theta)^2 + [2T(X\sin^2\theta - Y\cos^2\theta)]^2}} \\ \sigma_- &= \mp \frac{1}{2} \frac{XY\sin 2\theta}{\sqrt{(XY\sin 2\theta)^2 + [2T(X\sin^2\theta - Y\cos^2\theta)]^2}} \\ \sigma_+ &= \sigma_{+0} \mp \int_0^\theta \frac{4T^2 XY(X\sin^2\theta + Y\cos^2\theta)^2 d\theta}{\sqrt[3/2]{(XY\sin^2 2\theta)^2 + [2T(X\sin^2\theta - Y\cos^2\theta)]^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

现在, 我们来研究两种各向异性塑性特殊情形的静止平面应力裂纹尖端的应力场的一般解析表达式.

1.  $X=Z=\sqrt{3}T$  的情形

在这种情形中,  $\alpha=X/Y=2$ , 我们有:

(1) 均匀应力区

$$\varphi = \text{const} \quad (2.7)$$

(2) 非均匀应力区

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \mp \frac{1-3\cos 2\theta}{\sqrt[3/2]{4-6\cos 2\theta+6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_- &= \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}\sin 2\theta}{\sqrt{4-6\cos 2\theta+6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_+ &= \sigma_{+0} \mp \int_0^\theta \frac{\sqrt{3}(3-\cos 2\theta)^2 d\theta}{\sqrt{4-6\cos 2\theta+6\cos^2(2\theta)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

2.  $Y=Z=\sqrt{3}T$  的情形

在这种情形中,  $\alpha=Y/X=2$ , 我们有:

(1) 均匀应力区

$$\varphi = \text{const} \quad (2.7)$$

(2) 非均匀应力区

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \pm \frac{1+3\cos 2\theta}{\sqrt{4+6\cos 2\theta+6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_- &= \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}\sin 2\theta}{\sqrt{4+6\cos 2\theta+6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_+ &= \sigma_{+0} \mp \int_0^\theta \frac{\sqrt{3}(3+\cos 2\theta)^2 d\theta}{\sqrt[3/2]{4+6\cos 2\theta+6\cos^2(2\theta)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

三、 $\alpha > 2$  的一般表达式

对于  $\alpha > 2$  的情形, 平衡方程为<sup>[1]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} X\sin\theta \frac{d\sigma_+}{d\theta} + X\sin\theta \frac{d\sigma_-}{d\theta} - T\cos\theta \frac{d\sigma_{xy}}{d\theta} &= 0 \\ Y\cos\theta \frac{d\sigma_+}{d\theta} - Y\cos\theta \frac{d\sigma_-}{d\theta} - T\sin\theta \frac{d\sigma_{xy}}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

而Hill屈服条件则为:

$$-(\alpha-2)\sigma_x^2 + (\alpha+2)\sigma_y^2 + \sigma_{xy}^2 = 1 \quad (3.2)$$

其中

$$\alpha = \left( \frac{X}{Y} + \frac{Y}{X} - \frac{XY}{Z^2} \right) > 2 \quad (3.3)$$

如果我们取

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{\alpha-2}} \cdot \text{sh}\varphi \cdot \sin\omega, & \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{\alpha+2}} \cdot \text{ch}\varphi \cdot \sin\omega \\ \sigma_{xy} &= \cos\omega \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

则式(3.2)恒被满足。 $\omega$ 和 $\varphi$ 都只是 $\theta$ 的函数。

将式(3.4)代入式(3.1), 我们就得到下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} X \sin\theta \sin\omega \left( \frac{\text{ch}\varphi}{\sqrt{\alpha-2}} + \frac{\text{sh}\varphi}{\sqrt{\alpha+2}} \right) \frac{d\varphi}{d\theta} \\ + \left[ X \sin\theta \cos\omega \left( \frac{\text{sh}\varphi}{\sqrt{\alpha-2}} + \frac{\text{ch}\varphi}{\sqrt{\alpha+2}} \right) + T \cos\theta \sin\omega \right] \frac{d\omega}{d\theta} = 0 \\ Y \cos\theta \sin\omega \left( \frac{\text{ch}\varphi}{\sqrt{\alpha-2}} - \frac{\text{sh}\varphi}{\sqrt{\alpha+2}} \right) \frac{d\varphi}{d\theta} \\ + \left[ Y \cos\theta \cos\omega \left( \frac{\text{sh}\varphi}{\sqrt{\alpha-2}} - \frac{\text{ch}\varphi}{\sqrt{\alpha+2}} \right) + T \sin\theta \sin\omega \right] \frac{d\omega}{d\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

由式(3.5)得到下列两个应力区:

### 1. 均匀应力区 ( $d\varphi/d\theta=0$ , $d\omega/d\theta=0$ )

在均匀应力区内, 我们有

$$\omega = a_1, \quad \varphi = a_2 \quad (3.6)$$

其中 $a_1$ 和 $a_2$ 是两个积分常数。

### 2. 非均匀应力区 ( $d\omega/d\theta \neq 0$ , $d\varphi/d\theta \neq 0$ )

非均匀应力区的存在条件是式(3.5)的系数行列式为零, 即

$$\text{tg}\omega = \frac{u}{v} \quad (3.7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} u &= XY \sin 2\theta \\ v &= T \left[ \sqrt{\alpha+2} (X \sin^2\theta - Y \cos^2\theta) \text{ch}\varphi + \sqrt{\alpha-2} (X \sin^2\theta + Y \cos^2\theta) \text{sh}\varphi \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

从式(3.7)得到:

$$\sin\omega = \pm \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \cos\omega = \pm \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \quad (3.9)$$

从式(3.5)得到:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{p}{q} \cdot \frac{d\omega}{d\theta} = 0 \quad (3.10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} p &= T[X \sin^2 \theta (2 + 2 \operatorname{sh}^2 \varphi - \sqrt{a^2 - 4}) - Y \cos^2 \theta (a \operatorname{sh} 2\varphi - \sqrt{a^2 - 4} \operatorname{ch} 2\varphi)] \\ q &= X^2 \sin 2\theta (\sqrt{a+2} \operatorname{ch} \varphi - \sqrt{a-2} \operatorname{sh} \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

由式(3.7)和(3.10)中消去 $d\omega/d\theta$ , 我们得到确定 $\varphi$ 的一阶常微分方程为:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{r}{s} \quad (3.12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} r &= 2[X Y \sin^2 \theta (2 + 2 \operatorname{sh}^2 \varphi - \sqrt{a^2 - 4}) - Y^2 \cos^2 \theta (a \operatorname{sh} 2\varphi - \sqrt{a^2 - 4} \operatorname{ch} 2\varphi)] \\ &\quad \cdot [\sqrt{a+2} (X \sin^2 \theta + Y \cos^2 \theta) \operatorname{ch} \varphi + \sqrt{a-2} (X \sin^2 \theta - Y \cos^2 \theta) \operatorname{sh} \varphi] \\ s &= X \sin 2\theta (\sqrt{a+2} \operatorname{ch} \varphi - \sqrt{a-2} \operatorname{sh} \varphi) \left\{ \frac{X^2 Y^2}{T^2} \sin^2(2\theta) \right. \\ &\quad \left. + [\sqrt{a+2} (X \sin^2 \theta - Y \cos^2 \theta) \operatorname{ch} \varphi + \sqrt{a-2} (X \sin^2 \theta + Y \cos^2 \theta) \operatorname{sh} \varphi]^2 \right\} \\ &\quad - [X Y \sin^2 \theta (2 + 2 \operatorname{sh}^2 \varphi - \sqrt{a^2 - 4}) - Y^2 \cos^2 \theta (a \operatorname{sh} 2\varphi \\ &\quad - \sqrt{a^2 - 4} \operatorname{ch} 2\varphi)] \cdot [\sqrt{a+2} (X \sin^2 \theta - Y \cos^2 \theta) \operatorname{sh} \varphi \\ &\quad + \sqrt{a-2} (X \sin^2 \theta + Y \cos^2 \theta) \operatorname{ch} \varphi] \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

求解一阶常微分方程(3.11), 可以得到 $\operatorname{sh} \varphi$ 和 $\operatorname{ch} \varphi$ . 将 $\operatorname{sh} \varphi$ 和 $\operatorname{ch} \varphi$ 代入式(3.9), 就可以得到 $\sin \omega$ 和 $\cos \omega$ . 这样, 我们就能由式(3.4)得到非均匀应力区内的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .

如果裂纹尖端各向异性塑性应力场存在着径向的应力间断线, 则文献[1]中的式(2.17)~(2.19)保持有效.

下面给出两种各向异性塑性特殊情形的静止平面应力裂纹尖端的应力场的一般表达式.

1.  $X = Z = \sqrt{3} T$  的情形

在这种情形中, 我们有:

(1) 均匀应力区

$$\omega = \alpha_1, \quad \varphi = \alpha_2 \quad (3.6)$$

(2) 非均匀应力区

式(3.7)变为:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{3} \sin 2\theta}{\sqrt{a+2} (a \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \operatorname{ch} \varphi + \sqrt{a-2} (a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \operatorname{sh} \varphi} \quad (3.14)$$

式(3.12)形式上保持不变, 而式(3.13)则变为:

$$\left. \begin{aligned} r &= 2[a \sin^2 \theta (2 + 2 \operatorname{sh}^2 \varphi - \sqrt{a^2 - 4}) - \cos^2 \theta (a \operatorname{sh} 2\varphi - \sqrt{a^2 - 4} \operatorname{ch} 2\varphi)] \\ &\quad \cdot [\sqrt{a+2} (a \sin^2 \theta + Y \cos^2 \theta) \operatorname{ch} \varphi + \sqrt{a-2} (a \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \operatorname{sh} \varphi] \\ s &= a \sin 2\theta (\sqrt{a+2} \operatorname{ch} \varphi - \sqrt{a-2} \operatorname{sh} \varphi) \{ 3 \sin^2(2\theta) \\ &\quad + [\sqrt{a+2} (a \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \operatorname{ch} \varphi + \sqrt{a-2} (a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \operatorname{sh} \varphi]^2 \} \\ &\quad - [a \sin^2 \theta (2 + 2 \operatorname{sh}^2 \varphi - \sqrt{a^2 - 4}) - \cos^2 \theta (a \operatorname{sh} 2\varphi - \sqrt{a^2 - 4} \operatorname{ch} 2\varphi)] \\ &\quad \cdot [\sqrt{a+2} (a \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \operatorname{sh} \varphi + \sqrt{a-2} (a \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \operatorname{ch} \varphi] \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

其中  $\alpha = \frac{X}{Y} > 2$ .

2.  $Y = Z = \sqrt{3} T$  的情形

在这种情形中, 我们有:

(1) 均匀应力区

$$\omega = \alpha_1, \quad \varphi = \alpha_2 \quad (3.6)$$

(2) 非均匀应力区

式(3.7)变为:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{3} \sin 2\theta}{\sqrt{\alpha+2}(\sin^2\theta - \alpha \cos^2\theta) \operatorname{ch} \varphi + \sqrt{\alpha-2}(\sin^2\theta + \alpha \cos^2\theta) \operatorname{sh} \varphi} \quad (3.16)$$

式(3.12)形式上保持不变, 而式(3.13)则变为:

$$\left. \begin{aligned} r &= 2\alpha [\sin^2\theta(2+2\operatorname{sh}2\varphi - \sqrt{\alpha^2-4}) - \alpha \cos^2\theta(\operatorname{ash}2\varphi - \sqrt{\alpha^2-4} \operatorname{ch}2\varphi)] \\ &\quad \cdot [\sqrt{\alpha+2}(\sin^2\theta + \alpha \cos^2\theta) \operatorname{ch} \varphi + \sqrt{\alpha-2}(\sin^2\theta - \alpha \cos^2\theta) \operatorname{sh} \varphi] \\ s &= \sin 2\theta (\sqrt{\alpha+2} \operatorname{ch} \varphi - \sqrt{\alpha-2} \operatorname{sh} \varphi) \{3\sin^2(2\theta) \\ &\quad + [\sqrt{\alpha+2}(\sin^2\theta - \alpha \cos^2\theta) \operatorname{ch} \varphi + \sqrt{\alpha-2}(\sin^2\theta + \alpha \cos^2\theta) \operatorname{sh} \varphi]^2\} \\ &\quad - \alpha [\sin^2\theta(2+2\operatorname{sh}2\varphi - \sqrt{\alpha^2-4}) - \alpha \cos^2\theta(\operatorname{ash}2\varphi - \sqrt{\alpha^2-4} \operatorname{ch}2\varphi)] \\ &\quad \cdot [\sqrt{\alpha+2}(\sin^2\theta - \alpha \cos^2\theta) \operatorname{sh} \varphi + \sqrt{\alpha-2}(\sin^2\theta + \alpha \cos^2\theta) \operatorname{ch} \varphi] \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

其中  $\alpha = \frac{Y}{X} > 2$ .

#### 四、各向异性塑性应力场

将  $\alpha=2$  的特殊情形  $X=Z=\sqrt{3}T$  的各向异性塑性应力场的一般解析表达式用于静止平面应力 I 型和 II 型裂纹, 我们就得到这些裂纹尖端的各向异性塑性应力场的解析表达式。结果表示如下:

##### 1. I 型裂纹

(1)  $0 \leq \theta \leq 35^\circ 12'$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_- = \frac{1}{2}, \quad \sigma_+ = \sigma_{+0} \quad (4.1a)$$

(2)  $35^\circ 12' \leq \theta \leq 144^\circ 44'$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{1-3\cos 2\theta}{\sqrt{4-6\cos 2\theta+6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_- &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{4-6\cos 2\theta+6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_+ &= \sigma_{+0} - \int_{\theta_1}^{\theta} \frac{\sqrt{3}(3-\cos 2\theta)^2 d\theta}{3^{3/2} \sqrt{4-6\cos 2\theta+6\cos^2(2\theta)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.1b)$$

(3)  $144^\circ 44' \leq \theta \leq \pi$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_- = \sigma_+ = \frac{1}{2} \quad (4.1c)$$

确定  $\sigma_{+0}$  的公式为:

$$\sigma_{+0} = \frac{1}{2} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{3}(3-\cos 2\theta)^2 d\theta}{3^{3/2} \sqrt{4-6\cos 2\theta+6\cos^2(2\theta)}} \quad (4.1d)$$

其中  $\theta_1 = 35^\circ 12'$ ,  $\theta_2 = 144^\circ 44'$

2. I型裂纹

1) 第一种应力场

(1)  $0 \leq \theta \leq 35^\circ 12'$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{3\cos 2\theta - 1}{\sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_- &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_+ &= -\int_0^\theta \frac{\sqrt{3}(\cos 2\theta - 3)^2 d\theta}{3^{3/2} \sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.2a)$$

(2)  $35^\circ 12' \leq \theta \leq \pi$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_- = \sigma_+ = -\frac{1}{2} \quad (4.2b)$$

2) 第二种应力场

(1)  $0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{3\cos 2\theta - 1}{\sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_- &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_+ &= -\int_0^\theta \frac{\sqrt{3}(\cos 2\theta - 3)^2 d\theta}{3^{3/2} \sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.3a)$$

(2)  $\theta_1 \leq \theta \leq \pi - \theta_1$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{3\cos 2\theta_1 - 1}{\sqrt{4 - 6\cos 2\theta_1 + 6\cos^2(2\theta_1)}} \\ \sigma_- &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin 2\theta_1}{\sqrt{4 - 6\cos 2\theta_1 + 6\cos^2(2\theta_1)}} \\ \sigma_+ &= -\int_0^{\theta_1} \frac{\sqrt{3}(\cos 2\theta - 3)^2 d\theta}{3^{3/2} \sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.3b)$$

(3)  $\pi - \theta_1 \leq \theta \leq 144^\circ 44'$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \frac{3\cos 2\theta - 1}{\sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_- &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} \\ \sigma_+ &= \int_\theta^{\theta_3} \frac{\sqrt{3}(\cos 2\theta - 3)^2 d\theta}{3^{3/2} \sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.3c)$$

其中  $\theta_3 = 144^\circ 44'$ .

(4)  $144^\circ 44' \leq \theta \leq \pi$

$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_- = \sigma_+ = -\frac{1}{2} \quad (4.3d)$$

确定 $\theta_1$ 的方程为:

$$\int_0^{\theta_1} \frac{\sqrt{3}(\cos 2\theta - 3)^2 d\theta}{3^{3/2} \sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} + \int_{\pi - \theta_1}^{\theta_3} \frac{\sqrt{3}(\cos 2\theta - 3) d\theta}{3^{3/2} \sqrt{4 - 6\cos 2\theta + 6\cos^2(2\theta)}} = \frac{1}{2} \quad (4.3c)$$

### 参 考 文 献

- [1] Lin Bai-song, Anisotropic plastic stress fields at a stationary plane-stress crack-tip, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics in China*.

## Supplementary Study on Anisotropic Plastic Stress Fields at a Stationary Plane-Stress Crack-Tip( I )

Lin Bai-song

(Central-South University of Technology, Changsha)

### Abstract

The results in ref. [1] are not suitable for the cases of  $\alpha \geq 2$ . For this reason, we use the method in ref. [1] to derive the general expressions of the anisotropic plastic stress fields at a stationary plane-stress crack-tip for both the cases of  $\alpha = 2$  and  $\alpha > 2$ . As an example, we give the analytical expressions of the anisotropic plastic stress fields at the stationary tips of mode I and mode II plane-stress cracks for the case of  $\alpha = 2$ .

**Key words** plane-stress, crack-tip, anisotropic plastic stress field, general expression