

浮体与自由面交线附近流场的奇异性*

朱林生 戴遗山

(华中理工大学) (哈尔滨船舶工程学院)

摘 要

本文研究了浮体与自由面交线附近势流流场的奇异性。结果表明, 线性时域解在交线附近的奇异特征是 $d^2 \ln d$ 。线性频域解在交线附近的奇异特征也是 $d^2 \ln d$, 但若采用无穷大频率自由面条件 $\phi=0$, 交线附近流场的奇异特征是 $d \ln d$ 。这里的 d 表示交线上的点与场点的距离。

关键词 奇异性 速度势 时域问题 频域问题

一、引 言

大家知道, 数值求解波与物体相互作用的水动力问题, 主要难点之一就是物面与自由面交线附近的流场作数值处理。现有的处理方法很多, 各不相同, 可见交线附近流场的特性还有待进一步探索。

Jacobsen^[1]在求解柱体突然起动的的水动力问题时曾指出, 物面与自由面交线处的垂向速度是无穷大。Cointe^{[2][3]}对于二维柱体, 相当详情地分析了物面与自由面交点处变速的奇异性。Lin^[4]、Wang^[5]以及Kashiwagi^[6]都在各自的问题中讨论了交线附近流场的奇异性。物面与自由面交线附近流场的奇异性早已引起了人们的重视, 是个老问题。本文将较为系统地对三维物面表面与自由面交线附近流场的线性解作理论分析, 给出时域问题和频域问题中相应于不同的自由面条件交线附近流场的奇异特征。

二、时域问题交线附近流场的奇异性

为了讨论问题方便, 我们考虑一座底圆柱在无粘、不可压流体中作瞬时横荡运动。假设运动是无旋的, 物体运动的速度为 v 。选用的坐标系如图1。圆柱横向运动的时域解

$\Phi(r, \theta, z, t)$ 可写为 $\Phi = \phi(r, z, t) \cos \theta$, 其中 $\phi(r, z, t)$ 满足下列各式

$$\nabla^2(\phi \cos \theta) = 0 \quad (r > a, -h < z < 0) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (r > a, z = 0) \quad (2.2)$$

* 戴世强推荐, 1992年5月26日收到

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = v \quad (r=a, -h < z < 0) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z=-h) \quad (2.4)$$

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (t < 0, z=0) \quad (2.5)$$

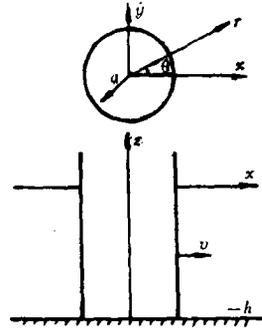


图 1 坐标系

分别对(2.2)和(2.3)式求导

$$\phi_{iir} + g\phi_{zr} = 0 \quad (z=0, r>a) \quad (2.2)'$$

$$\phi_{iir} + g\phi_{zr} = \ddot{v} \quad (z < 0, r=a) \quad (2.3)'$$

由(2.2)'和(2.3)'立即可见, 如果 \ddot{v} 不等于零, 那末 $\phi_{iir} + g\phi_{zr}$ 在交线处是不连续的. 为了分析交线附近流场的奇异性, 我们先求解上述边值问题, 将速度势 $\phi(r, z, t)$ 分成两部分

$$\phi = \phi_T + \phi_M \quad (2.6)$$

其中 ϕ_T 表示瞬时效应, 它满足下列各式

$$\nabla^2(\phi_T \cos \theta) = 0 \quad (r > a, -h < z < 0) \quad (2.7)$$

$$\phi_T = 0 \quad (r > a, z=0) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \phi_T}{\partial r} = v \quad (r=a, -h < z < 0) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \phi_T}{\partial z} = 0 \quad (z=-h) \quad (2.10)$$

ϕ_M 表示记忆效应, 它满足下列各式

$$\nabla^2(\phi_M \cos \theta) = 0 \quad (r > a, -h < z < 0) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_M}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_M}{\partial z} = -g \frac{\partial \phi_T}{\partial z} \quad (r > a, z=0) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \phi_M}{\partial r} = 0 \quad (r=a, -h < z < 0) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \phi_M}{\partial z} = 0 \quad (z=-h) \quad (2.14)$$

$$\phi_M = \frac{\partial \phi_M}{\partial t} = 0 \quad (t < 0, z=0) \quad (2.15)$$

不难知道, 瞬时效应 ϕ_T 可写为

$$\phi_T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K_1(\alpha_n r) \cos[\alpha_n(z+h)] \quad \alpha_n = \frac{n - \frac{1}{2}}{h} \pi \quad (2.16)$$

其中 K_1 是第二类修正的 Bessel 函数. 系数 a_n 由(2.9)式确定

$$a_n = \frac{2}{h} \frac{1}{\alpha_n K_1'(\alpha_n a)} \int_{-h}^0 v \cos[\alpha_n(z+h)] dz \quad (2.17)$$

于是

$$\phi_T = \frac{2}{h} v \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{\alpha_n^2} \frac{K_1(\alpha_n r)}{K_1'(\alpha_n a)} \cos[\alpha_n(z+h)] \quad (2.18)$$

有了 ϕ_T , 应用自由面条件(2.12)可得记忆效应 ϕ_M , 详细推导见附录 I.

$$\phi_M = \frac{2\sqrt{g}}{\pi} \int_0^t d\tau \int_{-h}^0 v d\xi \int_0^\infty \sin[\sqrt{gkthkh}(t-\tau)] \cdot \frac{J_1'(ka)Y_1(kr) - J_1(kr)Y_1'(ka)}{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)} \frac{1}{\sqrt{kthkh}} \frac{chk(\xi+h)}{chkh} \frac{chk(z+h)}{chkh} dk \quad (2.19)$$

其中 J_1, Y_1 是第一、二类Bessel函数, 下面我们分别讨论 ϕ_T 和 ϕ_M 在交线($r=a, z=0$)附近的奇异性. 先看瞬时效应 ϕ_T , 由(2.18)式易知

$$\phi_T|_{r=a} = \frac{2}{h} v \sum_{n=1}^\infty \frac{(-)^{n-1}}{\alpha_n^2} \frac{K_1(\alpha_n a)}{K_1'(\alpha_n a)} \cos[\alpha_n(z+h)] \quad (2.20)$$

其中
$$K_1'(\alpha_n a) = -K_0(\alpha_n a) - \frac{1}{\alpha_n a} K_1(\alpha_n a) \quad (2.21)$$

不难知道, 瞬时效应 ϕ_T 在交线上的主要部分为

$$\frac{8h}{\pi^2} v \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} \sin(2n-1) \frac{\pi z}{2h} \quad (2.22)$$

可见 $\phi_T|_{r=a}$ 的奇异部分(见附录 I)为

$$S[\phi_T|_{r=a}] = v \frac{2}{\pi} |z| \ln|z|, \quad (z \rightarrow 0^-) \quad (2.23)$$

记忆效应 ϕ_M 在交线附近为

$$\phi_M|_{r=a} = \frac{2\sqrt{g}}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\infty v \sin[\sqrt{gkthkh}(t-\tau)] \cdot \frac{-2}{\pi ka} \frac{\sqrt{thkh}}{k^{3/2}} \frac{chk(z+h)}{chkh} dk \quad (2.24)$$

上式中应用了公式

$$J_1'(ka)Y_1(ka) - J_1(ka)Y_1'(ka) = -\frac{2}{\pi ka} \quad (2.25)$$

对于(2.24)式, 问题不在积分下限 $k=0$, 而是在积分上限 $k=\infty$, 大家知道

$$J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka) \approx \frac{2}{\pi ka} + \frac{49}{32} \frac{1}{(ka)^3} \cdot \frac{1}{\pi} \quad (2.26)$$

于是(2.24)式右端的主要部分为

$$-\frac{2\sqrt{g}}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\infty v \sin[\sqrt{gkthkh}(t-\tau)] \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \right] \frac{1}{k} \sqrt{\frac{thkh}{k}} \frac{chk(z+h)}{chkh} dk \quad (2.27)$$

上式的特性取决于浮体的运动速度 v , 我们针对 v 的不同情况来分析 ϕ_M 的奇异特性, 为此我们假设

$$v = \begin{cases} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{cases} \quad (t > 0) \quad (2.28)$$

并记 $\sigma = \sqrt{gkthkh}$,

$$\mathcal{S}_n(t) = \int_0^t \tau^n \sin \sigma(t-\tau) d\tau \quad (n=0, 1, 2, 3)$$

当 $n=0, 1, 2, 3$ 时, 由上式可得

$$\mathcal{S}_0(t) = \frac{1}{\sigma} (1 - \cos \sigma t) \quad (2.29)$$

$$\mathcal{S}_1(t) = \frac{1}{\sigma} \left(t - \frac{1}{\sigma} \sin \sigma t \right) \quad (2.30)$$

$$\mathcal{S}_2(t) = -\frac{2}{\sigma^3} \left(1 - \cos \sigma t - \frac{\sigma^2}{2} t^2 \right) \quad (2.31)$$

$$\mathcal{S}_3(t) = \frac{6}{\sigma^4} \left(\sin \sigma t - \sigma t + \frac{1}{6} \sigma^3 t^3 \right) \quad (2.32)$$

可见 $n=0, 1, 2, 3$. $\mathcal{S}_n(t)$ 中都有 t^n/σ 项, 这一项对应的贡献为

$$-\frac{2\sqrt{g}}{\pi} \int_1^\infty \frac{1}{k^{3/2}} \exp[kz] \frac{t^n}{\sqrt{gk}} dk = -\frac{2}{\pi} v \int_1^\infty \frac{\exp[kz]}{k^2} dk$$

不难知道, 对应于 $\mathcal{S}_n(t)$ 中的 t^n/σ 项, ϕ_M 的奇异特性为

$$-\frac{2}{\pi} v |z| \ln |z| \quad (2.33)$$

与(2.23)比较可知, 这一项正好和瞬时效应的奇异项抵消. 下面来看 $\mathcal{S}_n(t)$ 中的其它项, 易知记忆效应 $\phi_M|_{r=a}$ 中凡有 $\sin \sigma t$ 和 $\cos \sigma t$ 的项都是没有问题的, 也就是说 $\mathcal{S}_0(t)$ 和 $\mathcal{S}_1(t)$ 对应的时域解无奇异性. 另外, $\mathcal{S}_2(t)$ 中有 $-2/\sigma^3$ 项, $\mathcal{S}_3(t)$ 中有 $-6t/\sigma^3$ 项, $1/\sigma^3$ 对应的贡献为

$$-\frac{2\sqrt{g}}{\pi} \int_1^\infty \frac{\exp[kz]}{k^3} dk \sim \frac{\sqrt{g}}{\pi} z^2 \ln |z| \quad (z \rightarrow 0^-) \quad (2.34)$$

可见, $\mathcal{S}_2(t)$ 和 $\mathcal{S}_3(t)$ 对应的时域解 ϕ 的奇异性为

$$S[\phi|_{r=a}] = O(z^2 \ln z) \quad (z \rightarrow 0^-) \quad (2.35)$$

这个奇异特征与前面对(2.2)'和(2.3)'两式的分析结果是一致的.

以上分析是从圆柱面 ($r=a$) 上看 $z \rightarrow 0^-$ 时, 时域解 ϕ 的奇异特征, 下面我们从自由面 ($z=0$) 上来看 $r \rightarrow a^+$ 时时域解的奇异特征. 由(2.18)和(2.19)两式我们不难知道

$$\phi_T|_{z=0} = 0$$

$$\begin{aligned} \phi_M|_{z=0} &= \frac{2g}{\pi} \int_0^t d\tau \int_0^\infty v \sin[\sqrt{gkthkh}(t-\tau)] \\ &\quad \frac{J_1'(ka)Y_1(kr) - J_1(kr)Y_1'(ka)}{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)} \frac{\sqrt{thkh}}{k^{3/2}} dk \end{aligned} \quad (2.36)$$

对于上述积分, 问题不在下限 $k=0$ 处, 而是在 $k=\infty$ 处, 大家知道

$$\begin{aligned} J_1'(ka) &= \frac{1}{2} (J_0(ka) - J_2(ka)) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi ka}} \left[2\cos\left(ka - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{7}{4} \frac{1}{ka} \sin\left(ka - \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$Y_1'(ka) = \frac{1}{2} (Y_0(ka) - Y_2(ka))$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi ka}} \left[2\sin\left(ka - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{7}{4} \frac{1}{ka} \cos\left(ka - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad (2.38)$$

$$J_1(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sin\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8kr} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.39)$$

$$Y_1(ka) = -\sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8kr} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right) \quad (2.40)$$

因此，由(2.36)式不难推知，记忆部分 $\phi_M|_{z=0}$ 的主要部分为

$$\int_1^\infty \frac{\cos k(r-a)}{k^n} dk \quad (r > a) \quad (2.41)$$

而知，当 $n \geq 2$ 时，上式的奇异特征为

$$(r-a)^2 \ln(r-a) \quad (r \rightarrow a^+) \quad (2.42)$$

可见，对应于 $\mathcal{S}_0(t)$ 和 $\mathcal{S}_1(t)$ ， $\phi_M|_{z=0}$ 在 $r \rightarrow a^+$ 时无奇异性，而对应于 $\mathcal{S}_2(t)$ 和 $\mathcal{S}_3(t)$ ， $\phi_M|_{z=0}$ 的奇异特征为(2.42)式，这个结论与前述的分析结果也是一致的。

三、频域问题交线附近流场的奇异性

对于频域问题，我们同样以座底圆柱在无粘、不可压流体中作横荡运动为例讨论物面与自由面交线附近流场的奇异性。假设运动是无旋的，选用的坐标系同时域问题。这个运动引起的流动可用速度势 $\Phi(r, \theta, z) = \phi(r, z) \cos \theta$ 来表示，其中 $\phi(r, z)$ 满足下列各式

$$\nabla^2(\phi \cos \theta) = 0 \quad (r > a, -h < z < 0) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 1 \quad (r = a, -h < z < 0) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z = -h) \quad (3.3)$$

自由面条件我们考虑两种情况，一种是自由面有波情况，一种是自由面无波情况（频率为无穷大），即

$$\phi_z - \nu \phi = 0 \quad \left(\nu = \frac{\omega^2}{g}, z = 0 \right) \quad (3.4)$$

$$\phi = 0 \quad (z = 0) \quad (3.5)$$

分别对上述两式求导可得

$$\phi_{zr} - \nu \phi_r = 0 \quad (3.4)'$$

$$\phi_r = 0 \quad (3.5)'$$

又对(3.2)式求导有

$$\phi_{rz} = 0 \quad (3.2)'$$

可见，对应于自由面条件(3.4)， ϕ_{rz} 在交线处是不连续的，面对应于自由面条件(3.5)，一阶导数 ϕ_r 在交线处就是不连续的。为了弄清交线附近流场的奇异特征，我们先求解上述边值问题。对应于自由面条件(3.4)，不难知道其速度势 $\phi(r, z)$ 可写为下列本征函数的展开式

$$\phi = A_0 H_1(k_0 r) \frac{\operatorname{ch} k_0(z+h)}{\operatorname{ch} k_0 h}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n K_1(k_n r) \cos k_n(z+h) \quad (3.6)$$

其中 H_1 是 Hankel 函数, A_0, A_n 是待定系数. 本征值条件就是通常的色散关系

$$k \operatorname{th} k h = \nu \quad (3.7)$$

其中 k 表示 k_0 或 $i k_n (n \geq 1)$. A_0 和 A_n 由边界条件(3.2)式经适当的数学推导得

$$A_0 = \frac{\operatorname{sh} 2k_0 h}{k_0^2 \left(h + \frac{1}{2k_0} \operatorname{sh} 2k_0 h \right)} \cdot \frac{1}{H_1'(k_0 a)} \quad (3.8)$$

$$A_n = \frac{2 \sin k_n h}{k_n^2 \left(h + \frac{1}{2k_n} \sin 2k_n h \right)} \cdot \frac{1}{K_1'(k_n a)} \quad (3.9)$$

于是速度势 $\phi(r, z)$ 为

$$\begin{aligned} \phi(r, z) = & \frac{2 \operatorname{sh} 2k_0 h}{k_0^2 \left(h + \frac{1}{2k_0} \operatorname{sh} 2k_0 h \right)} \frac{H_1(k_0 r)}{H_1'(k_0 a)} \frac{\operatorname{ch} k_0(z+h)}{\operatorname{ch} k_0 h} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin k_n h}{k_n^2 \left(h + \frac{1}{2k_n} \sin 2k_n h \right)} \frac{K_1(k_n r) \cos k_n(z+h)}{K_1'(k_n a)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

由本征值条件(3.7)式易知, 当 n 变大时, $k_n h$ 趋近于 $n\pi$, 因此不难推得

$$\sin k_n h \sim \frac{(-)^{n-1} \nu}{n\pi} h \quad (3.11)$$

(3.10)式中第一项是波动项, 第二项是衰减项, 下面我们先从圆柱面($r=a$)上来看 $z \rightarrow 0^-$ 时交线附近速势 $\phi(r, z)$ 的奇异特征. 从(3.10)不难知道, $\phi|_{r=a}$ 在交线附近的主要部分为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) \quad (3.12)$$

由附录 I 可知, $\phi|_{r=a}$ 的奇异特征为

$$S[\phi|_{r=a}] = O(z^2 \ln|z|) \quad (z \rightarrow 0^-) \quad (3.13)$$

再从自由面($z=0$)上来看 $r \rightarrow a^+$ 时 ϕ 的奇异特性, 易知

$$\phi|_{z=0} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \exp\left[-\frac{n\pi}{h}(r-a)\right] \quad (3.14)$$

不难推得 $\phi|_{z=0}$ 在交线附近的奇异特征为

$$S[\phi|_{z=0}] = O((r-a)^2 \ln(r-a)) \quad (r \rightarrow a^+) \quad (3.15)$$

以上是对于自由面有波情况, 下面讨论自由面无波(频率为无穷大)情况, 由(3.7)式令 $\omega \rightarrow \infty$ 可得

$$k_n h = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.16)$$

于是由(3.10)式不难推得频率为无穷大时的速度势 ϕ_∞

$$\phi_\infty = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^{n-1}}{(2n-1)^2} \frac{K_1\left(\frac{2n-1}{2h}\pi r\right)}{K_1'\left(\frac{2n-1}{2h}\pi a\right)} \cos\left[\frac{2n-1}{2h}\pi(z+h)\right] \quad (3.17)$$

先讨论从圆柱面($r=a$)上看 $z \rightarrow 0^-$ 时 ϕ_∞ 的奇异特征, 注意 (2.21) 式, 经适当的运算可知 $\phi_\infty|_{r=a}$ 在交线附近的主要部分为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\delta \quad \left(\delta = \left| -\frac{\pi z}{2h} \right| \right) \quad (3.18)$$

由附录 I 可知, $\phi_\infty|_{r=a}$ 的奇异特征为

$$S[\phi_\infty|_{r=a}] = O(\delta \ln \delta) \quad (\delta \rightarrow 0^+) \quad (3.19)$$

下面我们从自由面($z=0$)上来看 $r \rightarrow a^+$ 时 ϕ_∞ 的奇异性. 由于 $\phi_\infty|_{z=0} = 0$, 我们先对 ϕ_∞ 关于 z 求一次导数

$$\frac{\partial \phi_\infty}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \frac{K_1\left(\frac{2n-1}{2h}\pi r\right)}{K_1'\left(\frac{2n-1}{2h}\pi a\right)} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (3.20)$$

不难知道, $(\partial \phi_\infty / \partial z)|_{z=0}$ 在交线附近的主要部分为

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \exp\left[-(2n-1)\frac{\pi}{2h}(r-a)\right] \cdot \sqrt{\frac{a}{r}} \quad (3.21)$$

可见 $(\partial \phi_\infty / \partial z)|_{z=0}$ 在交线附近的奇异特征为

$$S\left[\frac{\partial \phi_\infty}{\partial z} \Big|_{z=0}\right] = O(\ln(r-a)) \quad (r \rightarrow a^+) \quad (3.22)$$

四、结 论

1. 对于三维圆柱横荡运动的线性时域解, 速度势的瞬时部分在物面与自由面交线附近的奇异特征是 $d \ln d$, 记忆部分在交线附近的奇异特征当 $\ddot{u} \neq 0$ 时除有奇异项 $d \ln d$ 外还有奇异项 $d^2 \ln d$. 值得注意的是, 瞬时效应和记忆效应两部分的奇异项 $d \ln d$ 正好相互抵消.

2. 对于三维圆柱横荡运动的线性频域解, 对应于自由面条件 $\phi_z - \nu \phi = 0$, 速度势在交线附近的奇异性特征是 $d^2 \ln d$. 而对应于自由面条件 $\phi = 0$, 速度势在交线附近的奇异性特征是 $d \ln d$.

3. 本文以上的讨论都是对物面与自由面垂直相交而言的. 对于物面与自由面斜交情况, 我们考虑一简单情况来分析, 如图2. 设物面的法向速度为1, 自由面条件为 $\phi = 0$, 不难知道在自由面以下($y < 0$)的物面上有

$$1 = \phi_x \sin \alpha - \phi_y \cos \alpha$$

可见, 即使在自由面上 $\phi_x = 0$, ϕ_y 也不会趋于无穷大, 而是等于 $-1/\cos \alpha$. 也就是说只有当 $\alpha = 90^\circ$ 时, ϕ_y 才会是无穷大. 当然, 关于物面与自由面斜交情况交线附近的奇异性还有待进一步细致论证.

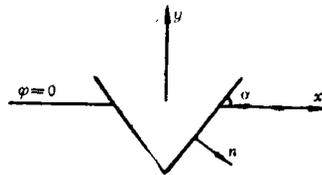


图 2

附录 I 时域解

有限水深座底圆柱横荡运动的时域解, 如传统方法将速势 ϕ 分成两部分 ϕ_T 和 ϕ_M , 它们分别表示瞬时效应和记忆效应. 参考第二节有关部分, 瞬时效应 ϕ_T 可写为

$$\phi_T = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K_1(a_n r) \cos[a_n(z+h)] \quad \left(a_n = \frac{n - \frac{1}{2}}{h} \pi \right) \quad (\text{A1.1})$$

其中

$$a_n = \frac{2}{a_n K_1'(a_n a)} \frac{1}{h} \int_{-h}^0 v \cos[a_n(z+h)] dz \quad (\text{A1.2})$$

于是

$$\frac{\partial \phi_T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{2}{h} \int_{-h}^0 v \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{K_1(a_n r)}{K_1'(a_n a)} \cos[a_n(\xi+h)] d\xi \quad (\text{A1.3})$$

我们用复变函数理论可以将上式中的无穷和变成一无穷积分。由于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{K_1(r\omega)}{K_1'(a\omega)} \frac{\cos[(\xi+h)\omega]}{\cosh\omega} d\omega, \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \text{res}_{\omega=a_n} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \frac{K_1(a_n r)}{K_1'(a_n a)} \cos[a_n(\xi+h)] \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

可以证明，在大小半圆上上述积分的贡献为零，在虚轴上

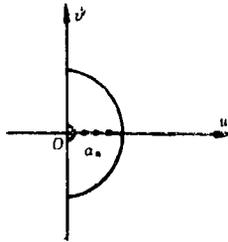


图 3

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(ir k)}{K_1'(iak)} \frac{\cos[i(\xi+h)k]}{\cosh k} i dk \\ & = \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{H_1^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)'}(ka)} - \frac{H_1^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)'}(ka)} \right] \frac{\text{ch}k(\xi+h)}{\text{ch}kh} dk \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im} \left(\frac{H_1^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)'}(ka)} \right) \frac{\text{ch}k(\xi+h)}{\text{ch}kh} dk \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_1(kr)Y_1'(ka) - J_1'(ka)Y_1(kr)}{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)} \frac{\text{ch}k(\xi+h)}{\text{ch}kh} dk \end{aligned} \quad (\text{A1.5})$$

所以由(A1.3)可得

$$\frac{\partial \phi_T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{2}{\pi} \int_{-h}^0 v d\xi \int_0^{\infty} \frac{J_1(kr)Y_1'(ka) - J_1'(ka)Y_1(kr)}{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)} \frac{\text{ch}k(\xi+h)}{\text{ch}kh} dk \quad (\text{A1.6})$$

由自由面条件(2.12)决定 ϕ_M ，记

$$\phi_M = \int_0^{\infty} B(k, r, t) \text{ch}k(z+h) dk \quad (\text{A1.7})$$

代入(2.12)式有

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + gkB \right) \text{ch}k(z+h) \Big|_{z=0} dk = -g \frac{\partial \phi_T}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ & = \frac{2g}{\pi} \int_{-h}^0 v d\xi \int_0^{\infty} \frac{J_1'(ka)Y_1(kr) - J_1(kr)Y_1'(ka)}{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)} \frac{\text{ch}k(\xi+h)}{\text{ch}kh} dk \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

于是有

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + gkB = \frac{2g}{\pi} \int_{-h}^0 \frac{J_1'(ka)Y_1(kr) - J_1(kr)Y_1'(ka)}{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)} \frac{chk(\xi+h)}{ch^2kh} v d\xi$$

$$\triangleq F(k, r, t) \tag{A1.9}$$

大家知道, 方程 $\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + gkB = F(k, r, t)$ 的解是容易求的, 去掉解中的驻波项, 可得记忆效应 ϕ_M 为

$$\phi_M = \frac{2\sqrt{g}}{\pi} \int_0^t d\tau \int_{-h}^0 v d\xi \int_0^\infty \sin[\sqrt{gkthkh}(t-\tau)]$$

$$\frac{J_1'(ka)Y_1(kr) - J_1(kr)Y_1'(ka)}{J_1'^2(ka) + Y_1'^2(ka)} \frac{chk(\xi+h)}{chkh} \frac{chk(z+h)}{chkh} \frac{1}{\sqrt{kthkh}} dk \tag{A1.10}$$

附录 II 积分与级数公式

1. $\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi)$
2. $\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cos nx \quad (-\pi < x < \pi)$
3. $\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{|x|}{2}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} \quad (-\pi < x < \pi, x \neq 0)$
4. $\int_0^x \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \quad (0 < x < 2\pi)$
5. $\int_0^x du \int_0^u \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \quad (0 < x < 2\pi)$
6. $\int_0^x \ln\left(\operatorname{ctg}\frac{|t|}{2}\right) dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$

参 考 文 献

- [1] Jacobsen, L. S., Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of a fluid surrounding a cylindrical pier, *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 39(1949).
- [2] Cointe, R., B. Molin, and P. Nays, Nonlinear and second-order transient waves in a rectangular tank, BOSS'88, Trondheim, (1988).
- [3] Cointe, R., Nonlinear simulation of transient free Surface flow, 5th ICNSH, Hiroshima, Japan, (1989).
- [4] Lin, W. M., J. N. Newman and D. K. Yue, Nonlinear forced motions of floating bodies, *Proceedings of the 15th Symp. Naval Hydro.*, National Academy Press, Washington, P. C. (1984).
- [5] Wang, K. H. and A. T. Chwang, Nonlinear free-surface flow around an impulsively moving cylinder, *J. of Ship Res.*, Vol. 33(3) (1989).
- [6] Kashiwagi, M. and M. Ohkusu, The effects of forward speed in the radiation problem of a surface-piercing body, *The Society of Naval Architects of Japan*, 164, (1988).
- [7] Yeung, Ronald W., Added mass and damping of a vertical cylinder in finite-depth waters, *Applied Ocean Res.*, Vol. 3(1981).

The Singular Behaviour in the Vicinity of Intersection between the Body and Free Surface

Zhu Lin-sheng

(Huazhong Univ. of Science and Technology, Wuhan)

Dai Yi-shan

(Haerbin Shipbuilding Engineering Inst., Haerbin)

Abstract

The singular behaviour in the vicinity of intersection between the body and free surface is presented. It is shown that in the linear regime, the singularity of velocity potential for transient problem is in $d^2 \ln d$. The singular behaviour for harmonic problem is the same as the result for the transient problem. In particular, the singularity for harmonic problem with infinite frequency is in $d \ln d$ for velocity potential (d is the distance between field point and intersection).

Key words singularity, velocity potential, the transient problem, the harmonic problem