应用数学和力学，第14卷第5期（1993年5月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

关于四阶变系数线性微分方程解的不稳定性*

卢德渊　廖宗璜

（贵州师范大学，1992年6月21日收到）

摘　要

本文利用李雅普诺夫第二方法[1]给出了至少有一个特征根具有正实部的四阶变系数线性微分方程解的不稳定性的充分条件．

关键词　常微分方程　运动稳定性理论　变系数线性微分方程

一、引　言

考虑方程

$$\frac{d^4x}{dt^4}+A(t)\frac{d^3x}{dt^3}+B(t)\frac{d^2x}{dt^2}+C(t)\frac{dx}{dt}+D(t)x=0 \tag{1.1}$$

其中$A(t)$，$B(t)$，$C(t)$，$D(t)$是t的实连续函数．

设等价系统为：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=x_4,\\&\frac{dx_4}{dt}=-D(t)x_1-C(t)x_2-B(t)x_3-A(t)x_4\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

并设特征方程

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ -D(t) & -C(t) & -B(t) & -A(t)-\lambda\end{vmatrix}=0$$

即

$$\lambda^4+A(t)\lambda^3+B(t)\lambda^2+C(t)\lambda+D(\lambda)=0 \tag{1.3}$$

的根$\lambda_i(t)(i=1,2,3,4)$中至少有一个具有正实部．

由于$A(t)$，$B(t)$，$C(t)$，$D(t)$是t的实连续函数，因此如果特征方程(1.3)有复根，必

* 张石生推荐．贵州省科学技术基金资助课题．

共轭成对.

由根与系数的关系知:

$$\begin{cases}-A(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)+\lambda_4(t)\\ B(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)+\lambda_1(t)\lambda_3(t)+\lambda_1(t)\lambda_4(t)+\lambda_2(t)\lambda_3(t)+t_2(t)\lambda_4(t)+\lambda_3(t)\lambda_4(t)\\ -C(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)+\lambda_2(t)\lambda_3(t)\lambda_4(t)+\lambda_3(t)\lambda_4(t)\lambda_1(t)+\lambda_4(t)\lambda_1(t)\lambda_2(t)\\ D(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\lambda_4(t)\end{cases}\tag{1.4}$$

记 $$\Delta(t)=A(t)B(t)C(t)D(t)-C^2(t)D(t)-A^2(t)D^2(t)\tag{1.5}$$

将(1.4)式代入(1.5)式，整理得

$$\begin{aligned}\Delta(t)=&\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\lambda_4(t)[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)][\lambda_1(t)+\lambda_3(t)][\lambda_1(t)+\lambda_4(t)]\\ &\cdot[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)][\lambda_2(t)+\lambda_4(t)][\lambda_3(t)+\lambda_4(t)]\end{aligned}\tag{1.6}$$

根据巴尔巴欣公式[2]取

$$\begin{aligned}V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)=&V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+2V_{14}(t)x_1x_4\\ &+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+2V_{24}(t)x_2x_4+V_{33}(t)x_3^2+2V_{34}(t)x_3x_4+V_{44}(t)x_4^2\end{aligned}\tag{1.7}$$

其中

$$\begin{aligned}V_{11}(t)=&-ABC^2+C^3+A^2CD-AB^2D+BCD-ABD^2+CD^2+AD^2-AD^3-CD^3\\ V_{12}(t)=&-AB^2C+BC^2-A^2D^2+ACD-ACD^2-C^2D^2\\ V_{13}(t)=&-A^2BC+AC^2+A^3D-CD^2+CD-BCD^2-ABD-AD^2+AD^3\\ V_{14}(t)=&-ABC+C^2+A^2D\\ V_{22}(t)=&-AB^3+B^2C+2ABD-AB^2D+BCD-A^2CD+AD^2-AC^2D-C^3D\\ &-CD+CD^2-ABD^2-A^3D-AD^3\\ V_{23}(t)=&ABC-C^2D-BC^2D-A^2B^2-A^2BD-A^2D^2\\ V_{24}(t)=&-AB^2+BC-ABD+CD-AD^2+AD-CD^2\\ V_{33}(t)=&-A^3B-A^3D-CD+CD^2-AC^2D+AD^2-AD+ABD^2-A^2CD\\ &+A^2C-BCD-B^2CD\\ V_{34}(t)=&-A^2B-A^2D-ACD+AC-C^2D\\ V_{44}(t)=&-BCD+AD^2-AB-AD-CD+C\end{aligned}\tag{1.8}$$

这里A，B，C，D均为的实连续函数.

而函数$V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)$对于时间 t 的由扰动运动方程(1.2)构成的全导数

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}=&\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+2\dot V_{14}(t)x_1x_4+\dot V_{22}(t)x_2^2\\ &+2\dot V_{23}(t)x_2x_3+2\dot V_{24}(t)x_2x_4+\dot V_{33}(t)x_3^2+2\dot V_{34}(t)x_3x_4+\dot V_{44}(t)x_4^2\\ &+2\Big[V_{11}(t)x_1\frac{dx_1}{dt}+V_{12}(t)\left(\frac{dx_1}{dt}x_2+x_1\frac{dx_2}{dt}\right)+V_{13}(t)\left(\frac{dx_1}{dt}x_4+x_1\frac{dx_3}{dt}\right)\\ &+V_{14}(t)\left(\frac{dx_1}{dt}x_4+x_1\frac{dx_4}{dt}\right)+V_{22}(t)x_2\frac{dx_2}{dt}+V_{23}(t)\left(\frac{dx_2}{dt}x_3+x_2\frac{dx_3}{dt}\right)\\ &+V_{24}(t)\left(\frac{dx_2}{dt}x_4+x_2\frac{dx_4}{dt}\right)+V_{33}(t)x_3\frac{dx_3}{dt}\end{aligned}$$

$$+V_{34}(t)\left(\frac{dx_3}{dt}x_4+x_3\frac{dx_4}{dt}\right)+V_{44}(t)x_4\frac{dx_4}{dt}\Big]$$

$$=\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+2\dot V_{14}(t)x_1x_4+\dot V_{22}(t)x_2^2$$
$$+2\dot V_{23}(t)x_2x_3+2\dot V_{24}(t)x_2x_4+\dot V_{33}(t)x_3^2+2\dot V_{34}(t)x_3x_4$$
$$+\dot V_{44}(t)x_4^2+2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2) \tag{1.9}$$

下面我们只讨论$\Delta(t)\neq 0$的情形.

二、特征方程有四个具有正实部的根

定理1 如果方程(1.1)满足下列条件:

1. $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$在$t_0\leqslant t\leqslant+\infty$上可微有界(其中$t_0$足够大), 即存在一个正常数$M>0$, 使得

$$|A(t)|\leqslant M,\ |B(t)|\leqslant M,\ |C(t)|\leqslant M,\ |D(t)|\leqslant M$$

2. 特征方程(1.3)的根均具有正实部, 即$\mathrm{Re}(\lambda_i(t))\geqslant\delta>0(i=1,2,3,4)$对所有的$t\geqslant t_0$都成立, 其中$\delta$是与$t$无关的一个正常数;

3. $$\max_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{64M^3+12M^2+8M},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{36M^2+16M+1}\right\}$$

η是一个常数, 且$0<\eta<2$,

则方程(1.1)的零解不稳定.

证 由条件2, 设

$$\lambda_i(t)\geqslant\delta>0(i=1,2,3,4)\text{或}\lambda_i(t)\geqslant\delta>0(i=1,2),\ \mathrm{Re}(\lambda_i(t))\geqslant\delta>0\quad(i=3,4)$$

或$\mathrm{Re}(\lambda_i(t))\geqslant\delta>0(i=1,2,3,4)$, 于是由(1.4)式有

$$-A(t)=[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)]+[\lambda_3(t)+\lambda_4(t)]\geqslant 4\delta$$
$$B(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)+[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)][\lambda_3(t)+\lambda_4(t)]+\lambda_3(t)\lambda_4(t)\geqslant 6\delta^2$$
$$-C(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)[\lambda_3(t)+\lambda_4(t)]+[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)]\lambda_3(t)\lambda_4(t)\geqslant 4\delta^3$$
$$D(t)=[\lambda_1(t)\lambda_2(t)][\lambda_3(t)\lambda_4(t)]\geqslant\delta^4$$

由(1.6)式有

$$\Delta(t)=[\lambda_1(t)\lambda_2(t)][\lambda_3(t)\lambda_4(t)][\lambda_1(t)+\lambda_2(t)][(\lambda_1(t)+\lambda_3(t))$$
$$\cdot(\lambda_1(t)+\lambda_4(t))(\lambda_2(t)+\lambda_3(t))(\lambda_2(t)+\lambda_4(t))][\lambda_3(t)+\lambda_4(t)]\geqslant 64\delta^{10}$$

根据公式(1.7)取

$$V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+2V_{14}(t)x_1x_4+V_{22}(t)x_2^2$$
$$+2V_{23}(t)x_2x_3+2V_{24}(t)x_2x_4+V_{33}(t)x_3^2+2V_{34}(t)x_3x_4+V_{44}(t)x_4^2$$

$$\because\quad -AB+C=[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)+\lambda_4(t)][\lambda_1(t)\lambda_2(t)+\lambda_1(t)\lambda_3(t)+\lambda_1(t)\lambda_4(t)$$
$$+\lambda_2(t)\lambda_3(t)+\lambda_2(t)\lambda_4(t)+\lambda_3(t)\lambda_4(t)]-[\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)+\lambda_2(t)\lambda_3(t)\lambda_4(t)$$
$$+\lambda_3(t)\lambda_4(t)\lambda_1(t)+\lambda_4(t)\lambda_1(t)\lambda_2(t)]$$
$$=[\lambda_3(t)+\lambda_4(t)][\lambda_1(t)+\lambda_2(t)]^2+[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)][\lambda_3(t)+\lambda_4(t)]^2$$
$$+\lambda_1(t)_2(t)[t_1(t)+\lambda_2(t)]+\lambda_3(t)\lambda_4(t)[\lambda_3(t)+\lambda_4(t)]\geqslant 20\delta^3$$

又已知 $-A(t)\geqslant 4\delta$, $-C(t)\geqslant 4\delta^3$, $D(t)\geqslant \delta^4$, $\Delta(t)\geqslant 64\delta^{10}$, $\delta>0$

$\therefore$ $V_{44}(t)=-BCD+AD^2-AB-AD-CD+C$

$$=\frac{\Delta(t)}{-A}+\frac{C^2D}{-A}+(-AB+C)-(A+C)D>0$$

当$x_4\neq 0$时，$V(t;0,0,0,x_4)=V_{44}(t)x_4^2>0 \quad (t\geqslant t_0)$

所以函数$V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)$在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取正的值。

其次证明函数$V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)$对于时间t的由扰动运动方程(1.2)构成的全导数dV/dt在$t_0\leqslant t<+\infty$内是正定的函数。

事实上，由(1.9)式有

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}=&\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+2\dot V_{14}(t)x_1x_4+\dot V_{22}(t)x_2^2+2\dot V_{23}(t)x_2x_3\\
&+2\dot V_{24}(t)x_2x_4+\dot V_{33}(t)x_3^2+2\dot V_{34}(t)x_3x_4+\dot V_{44}(t)x_4^2+2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\\
\geqslant&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)-[|\dot V_{11}(t)|x_1^2+|\dot V_{12}(t)|(x_1^2+x_2^2)+|\dot V_{13}(t)|(x_1^2+x_3^2)\\
&+|\dot V_{14}(t)|(x_1^2+x_4^2)+|\dot V_{22}(t)|x_2^2+|\dot V_{23}(t)|(x_2^2+x_3^2)+|\dot V_{24}(t)|(x_2^2+x_4^2)\\
&+|\dot V_{33}(t)|x_3^2+|\dot V_{34}(t)|(x_3^2+x_4^2)+|\dot V_{44}(t)|x_4^2]\\
=&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)-[(|\dot V_{11}(t)|+|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{13}(t)|+|\dot V_{14}(t)|)x_1^2\\
&+(|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{22}(t)|+|\dot V_{23}(t)|+|\dot V_{24}(t)|)x_2^2+(|\dot V_{13}(t)|+|\dot V_{23}(t)|\\
&+|\dot V_{33}(t)|+|\dot V_{34}(t)|)x_3^2+(|\dot V_{14}(t)|+|\dot V_{24}(t)|+|\dot V_{34}(t)|+|\dot V_{44}(t)|)x_4^2]\\
\geqslant&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)-\varepsilon[(|A|^3+3|D|^3+|A|^2|B|+2|A|^2|C|+6|A|^2|D|\\
&+2|A||B|^2+|A||C|^2+10|A||D|^2+6|A||B|C|+4|A|||B||D|\\
&+4|A||C||D|+|B|^2|C|+|B|^2|D|+|B||C|^2+2|B||D|^2+2|B||C||D|\\
&+2|C|^2|D|+7|C||D|^2+|A|^2+5|C|^2+4|D|^2+2|A||B|+4|A||C|\\
&+8|A||D|+4|B||C|+2|B||D|+6|C||D|+3|C|+|D|)x_1^2\\
&+(|A|^3+|B|^3+|C|^3+|D|^3+3|A|^2|B|+|A|^2|C|+9|A|^2|D|+7|A||B|^2\\
&+|A||C|^2+9|A||D|^2+2|A||B||C|+6|A||B||D|+6|A||C||D|+|B|^2|C|\\
&+|B|^2|D|+|B||C|^2+|B||D|^2+2|B||C||D|+7|C|^2|D|+3|C||D|^2\\
&+2|B|^2+2|C|^2+4|D|^2+6|A||B|+2|A||C|+8|A||D|+6|B||C|\\
&+4|B||D|+8|C||D|+|A|+|B|+3|C|+3|D|)x_2^2+(3|A|^3+|D|^3\\
&+7|A|^2|B|+2|A|^2|C|+10|A|^2|D|+2|A||B|^2+|A||C|^2+6|A||D|^2\\
&+2|A||B||C|+4|A||B||D|+4|A||C||D|+|B|^2|C|+|B|^2|D|+|B||C|^2\\
&+2|B||D|^2+6|B||C||D|+2|C|^2|D|+|C||D|^2+3|A|^2+3|C|^2+4|D|^2\\
&+4|A||B|+6|A||C|+8|A||D|+2|B||C|+2|B||D|+10|C||D|+2|A|\\
&+3|C|+3|D|)x_3^2+(3|A|^2+|B|^2+|C|^2+3|D|^2+6|A||B|+2|A||C|\\
&10|A||D|+2|B||C|+2|B||D|+6|C||D|+4|A|+2|B|+6|C|+4|D|+1)x_4^2]\\
\geqslant&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)-\varepsilon[(56M^3+36M^2+4M)x_1^2+(64M^3+42M^2+8M)x_2^2\\
&+(56M^3+42M^2+8M)x_3^2+(36M^2+16M+1)x_4^2]\\
\geqslant&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)-\varepsilon[(64M^3+42M^2+8M)x_1^2+(64M^3+42M^2+8M)x_2^2\\
&+(64M^3+42M^2+8M)x_3^2+(36M^2+16M+1)x_4^2]\\
\geqslant&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)-[\eta|\Delta(t)|x_1^2+\eta|\Delta(t)x_2^2+\eta|\Delta(t)|x_3^2+\eta|\Delta(t)|x_4^2]
\end{aligned}$$

$$=(2-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\geqslant 64(2-\eta)\delta^{10}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$

所以dV/dt是正定的．由条件1容易证明$V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)$具有无穷小上界．

根据非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[3]，可知方程(1.1)的零解不稳定．

三、特征方程有三个具有正实部的根

定理2 在方程(1.1)中设

1．$A(t)$，$B(t)$，$C(t)$，$D(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界（其中t_0足够大）即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|A(t)|\leqslant M,\quad |B(t)|\leqslant M,\quad |C(t)|\leqslant M,\quad |D(t)|\leqslant M$$

2．特征方程(1.3)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$\lambda_4(t)$满足

$$-\delta_4<\lambda_1(t)<-\delta_3,\quad \delta_1<\lambda_2(t)<\delta_2,\quad \delta_5<\lambda_3(t)\leqslant\lambda_4(t)$$

其中$\delta_i(i=1,2,3,4,5)$是与t无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<\delta_4<\delta_5$；

3．$-B(t)C(t)D(t)+A(t)D^2(t)-A(t)B(t)-A(t)D(t)-C(t)D(t)+C(t)>0$对所有的$t\geqslant t_0$都成立；

4．$$\max_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{64M^3+42M^2+8M},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{36M^2+16M+1}\right\}$$

η是一个常数，且$0<\eta<2$．

则方程(1.1)的零解不稳定．

证 由条件2有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\lambda_4(t)=-|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)||\lambda_4(t)|<-\delta_3\delta_1\delta_5\delta_5=-\delta_1\delta_3\delta_5^2<0,$$

$$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)<-\delta_3+\delta_2=-(\delta_3-\delta_2)<0,\qquad \lambda_1(t)+\lambda_3(t)>-\delta_4+\delta_5=\delta_5-\delta_4>0,$$

$$\lambda_1(t)+\lambda_4(t)>-\delta_4+\delta_5=\delta_5-\delta_4>0,\qquad \lambda_2(t)+\lambda_3(t)>\delta_1+\delta_5>0,$$

$$\lambda_2(t)+\lambda_4(t)>\delta_1+\delta_5>0,\qquad \lambda_3(t)+\lambda_4(t)>\delta_5+\delta_5=2\delta_5>0$$

所以

$$\begin{aligned}\Delta(t)=&|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\lambda_4(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_1(t)+\lambda_3(t)||\lambda_1(t)+\lambda_4(t)|\\&\cdot|\lambda_2(t)+\lambda_3(t)||\lambda_2(t)+\lambda_4(t)||\lambda_3(t)+\lambda_4(t)|\\&>\delta_1\delta_3\delta_5^2(\delta_3-\delta_2)(\delta_5-\delta_4)(\delta_5-\delta_4)(\delta_1+\delta_5)(\delta_1+\delta_5)(2\delta_5)\\&=2\delta_1\delta_3\delta_5^3(\delta_3-\delta_2)(\delta_5-\delta_4)^2(\delta_1+\delta_5)^2>0\end{aligned}$$

根据公式(1.7)取

$$\begin{aligned}V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)=&V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+2V_{14}(t)x_1x_4\\&+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+2V_{24}(t)x_2x_4+V_{33}(t)x_3^2+2V_{34}(t)x_3x_4+V_{44}(t)x_4^2\end{aligned}$$

根据条件1容易证明$V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)$具有无穷小上界．再根据条件3，显然可知当$x_4\neq 0$时

$$V(t;0,0,0,x_4)=V_{44}(t)x_4^2>0\qquad (t\geqslant t_0)$$

所以函数$V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)$在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取正的值．

现在再考察dV/dt，类似定理1有

$$\frac{dV}{dt}\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)-\eta\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$
$$=(2-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$
$$>2(2-\eta)\delta_1\delta_3\delta_5^3(\delta_3-\delta_2)(\delta_5-\delta_4)^2(\delta_1+\delta_5)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$$

所以dV/dt是正定的.

根据非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[3]，可知方程(1.1)的零解不稳定.

定理3 对于方程(1.1)设

1. $A(t)$，$B(t)$，$C(t)$，$D(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界（其中 t_0 足够大）即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|A(t)|\leqslant M,\quad |B(t)|\leqslant M,\quad |C(t)|\leqslant M,\quad |D(t)|\leqslant M$$

2. 特征方程(1.3)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$\lambda_4(t)$满足

$$-\delta_2<\lambda_1(t)<-\delta_1,\qquad \delta_3<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)\leqslant\lambda_4(t)$$

其中$\delta_i(i=1,2,3)$是与 t 无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$；

3. $-B(t)C(t)D(t)+A(t)D^2(t)-A(t)B(t)-A(t)D(t)-C(t)D(t)+C(t)<0$ 对所有的$t\geqslant t_0$都成立；

4. $$\max_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{64M^3+42M^2+8M},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{36M^2+16M+1}\right\}$$

η是一个常数，且$0<\eta<2$，

则方程(1.1)的零解不稳定.

证 由条件2，有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\lambda_4(t)=-|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)||\lambda_4(t)|<-\delta_1\delta_3\delta_3=-\delta_1\delta_3^3<0,$$
$$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)>-\delta_2+\delta_3=\delta_3-\delta_2>0,\quad \lambda_1(t)+\lambda_3(t)>-\delta_2+\delta_3=\delta_3-\delta_2>0,$$
$$\lambda_1(t)+\lambda_4(t)>-\delta_2+\delta_3=\delta_3-\delta_2>0,\quad \lambda_2(t)+\lambda_3(t)>\delta_3+\delta_3=2\delta_3>0,$$
$$\lambda_2(t)+\lambda_4(t)>\delta_3+\delta_3=2\delta_3>0,\quad \lambda_3(t)+\lambda_4(t)>\delta_3+\delta_3=2\delta_3>0.$$

所以

$$\Delta(t)=-|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\lambda_4(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_1(t)+\lambda_3(t)||\lambda_1(t)$$
$$+\lambda_4(t)||\lambda_2(t)+\lambda_3(t)||\lambda_2(t)+\lambda_4(t)||\lambda_3(t)+\lambda_4(t)|$$
$$<-\delta_1\delta_3^3(\delta_3-\delta_2)(\delta_3-\delta_2)(\delta_3-\delta_2)(2\delta_3)(2\delta_3)(2\delta_3)$$
$$=-8\delta_1\delta_3^6(\delta_3-\delta_2)^3<0$$

根据公式(1.7)取

$$V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+2V_{14}(t)x_1x_4+V_{22}(t)x_2^2$$
$$+2V_{23}(t)x_2x_3+2V_{24}(t)x_2x_4+V_{33}(t)x_3^2+2V_{34}(t)x_3x_4+V_{44}(t)x_4^2$$

根据条件1容易证明$V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)$具有无穷小上界. 再根据条件3，显然可知当$x_4\neq 0$时

$$V(t;0,0,0,x_4)=V_{44}(t)x_4^2<0\qquad(t\geqslant t_0)$$

所以函数$V(t;x_1,x_2x_3,x_4)$在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取负的值。

其次证明函数$V(t;x_1,x_2,x_3,x_4)$对于时间t的由扰动运动方程(1.2)构成的全导数dV/dt在$t_0\leqslant t<+\infty$内是负定的函数。

事实上，由(1.9)式有

$$
\begin{aligned}
\frac{dV}{dt}=&\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+2\dot V_{14}(t)x_1x_4+\dot V_{22}(t)x_2^2+2\dot V_{23}(t)x_2x_3\\
&+2\dot V_{24}(t)x_2x_4+\dot V_{33}(t)x_3^2+2\dot V_{34}(t)x_3x_4+\dot V_{44}(t)x_4^2+2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\\
\leqslant&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+[|\dot V_{11}(t)|x_1^2+|\dot V_{12}(t)|(x_1^2+x_2^2)\\
&+|\dot V_{13}(t)|(x_1^2+x_3^2)+|\dot V_{14}(t)|(x_1^2+x_4^2)+|\dot V_{22}(t)|x_2^2+|\dot V_{23}(t)|(x_2^2+x_3^2)\\
&+|\dot V_{24}(t)|(x_2^2+x_4^2)+|\dot V_{33}(t)|x_3^2+|\dot V_{34}(t)|(x_3^2+x_4^2)+|\dot V_{44}(t)|x_4^2]\\
=&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+{}_4^2)+[(|\dot V_{11}(t)|+|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{13}(t)|+|\dot V_{14}(t)|)x_1^2\\
&+(|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{22}(t)|+|\dot V_{23}(t)|+|\dot V_{24}(t)|)x_2^2+(|\dot V_{13}(t)|+|\dot V_{23}(t)|\\
&+|\dot V_{33}(t)|+|\dot V_{34}(t)|)x_3^2+(|\dot V_{14}(t)|+|\dot V_{24}(t)|+|\dot V_{34}(t)|+|\dot V_{44}(t)|)x_4^2]\\
\leqslant&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+\varepsilon[(|A|^3+3|D|^3+|A|^2|B|+2|A|^2|C|\\
&+6|A|^2|D|+2|A||B|^2+|A||C|^2+10|A||D|^2+6|A||B||C|\\
&+4|A||B||D|+4|A||C||D|+|B|^2|C|+|B|^2|D|+|B||C|^2+2|B||D|^2\\
&+2|B||C||D|+2|C|^2|D|+7|C||D|^2+|A|^2+5|C|^2+4|D|^2+2|A||B|\\
&+4|A||C|+8|A||D|+4|B||C|+2|B||D|+6|C||D|+3|C|+|D|)x_1^2\\
&+(|B|^3+|B|^3+|C|^3+|D|^3+3|A|^2|B|+|A|^2|C|+9|A|^2|D|\\
&+7|A||B|^2+|A||C|^2+9|A||D|^2+2|A||B||C|+6|A||B||D|\\
&+6|A||C||D|+|B|^2|C|+|B|^2|D|+|B||C|^2+|B||D|^2+2|B||C||D|\\
&+7|C|^2|D|+3|C||D|^2+2|B|^2+2|C|^2+4|D|^2+6|A||B|+2|A||C|\\
&+8|A||D|+6|B||C|+4|B||D|+8|C||D|+|A|+|B|+3|C|+3|D|)x_2^2\\
&+(3|A|^3+|D|^3+7|A|^2|B|+2|A|^2|C|+10|A|^2|D|+2|A||B|^2\\
&+|A||C|^2+6|A||D|^2+2|A||B||C|+4|A||B||D|+4|A||C||D|\\
&+|B|^2|C|+|B|^2|D|+|B||C|^2+2|B||D|^2+6|B||C||D|+2|C|^2|D|\\
&+|C||D|^2+3|A|^2+3|C|^2+4|D|^2+4|A||B|+6|A||C|+8|A||D|\\
&+2|B||C|+2|B||D|+10|C||D|+2|A|+3|C|+3|D|)x_3^2\\
&+(3|A|^2+|B|^2+|C|^2+3|D|^2+6|A||B|+2|A||C|+10|A||D|\\
&+2|B||C|+2|B||D|+6|C||D|+4|A|+2|B|+6|C|+4|D|+1)x_4^2]\\
\leqslant&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+\varepsilon[(56M^3+36M^2+4M)x_1^2+(64M^3+42M^2\\
&+8M)x_2^2+(56M^3+42M^2+8M)x_3^2+(36M^2+16M+1)x_4^2]\\
\leqslant&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+\varepsilon[(64M^3+42M^2+8M)x_1^2+(64M^3+42M^2+8M)x_2^2\\
&+(64M^3+42M^2+8M)x_3^2+(36M^2+16M+1)x_4^2]\\
\leqslant&2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+[\eta|\Delta(t)|x_1^2+\eta|\Delta(t)|x_2^2+\eta|\Delta(t)|x_3^2+\eta|\Delta(t)|x_4^2]\\
=&(2-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)<-8(2-\eta)\delta_1\delta_3^6(\delta_3-\delta_2)^3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)
\end{aligned}
$$

所以dV/dt是负定的。

应用非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[3]，可知方程(1.1)的零解不稳定。

四、特征方程有两个具有正实部的根

定理4 在方程(1.1)中设

1. $A(t)$，$B(t)$，$C(t)$，$D(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界（其中t_0足够大）即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|A(t)|\leqslant M,\ |B(t)|\leqslant M,\ |C(t)|\leqslant M,\ |D(t)|\leqslant M$$

2. 特征方程(1.3)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$\lambda_4(t)$满足

$$-\delta_6<\lambda_2(t)<-\delta_5,\ -\delta_2<\lambda_1(t)<-\delta_1,\ \delta_3<\lambda_3(t)<\delta_4,\ \delta_7<\lambda_4(t)$$

其中$\delta_i(i=1,2,3,4,5,6,7)$是与$t$无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<\delta_4<\delta_5<\delta_6<\delta_7$；

3. $-B(t)C(t)D(t)+A(t)D^2(t)-A(t)B(t)-A(t)D(t)-C(t)D(t)+C(t)>0$对所有的$t\geqslant t_0$都成立；

4. $$\max_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{64M^3+42M^2+8M},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{36M^2+16M+1}\right\}$$

η是一个常数，且$0<\eta<2$，

则方程(1.1)的零解不稳定.

证明方法类似于定理2，故从略.

定理5 在方程(1.1)中设

1. $A(t)$，$B(t)$，$C(t)$，$D(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界（其中t_0足够大）即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|A(t)|\leqslant M,\ |B(t)|\leqslant M,\ |C(t)|\leqslant M,\ |D(t)|\leqslant M$$

2. 特征方程(1.3)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$\lambda_4(t)$满足

$$-\delta_2<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_1(t)<-\delta_1,\ \delta_3<\lambda_3(t)\leqslant\lambda_4(t)$$

其中$\delta_i(i=1,2,3)$是与t无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$；

3. $-B(t)C(t)D(t)+A(t)D^2(t)-A(t)B(t)-A(t)D(t)-C(t)D(t)+C(t)<0$对所有的$t\geqslant t_0$都成立；

4. $$\max_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{64M^3+42M^2+8M},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{36M^2+16M+1}\right\}$$

η是一个常数，且$0<\eta<2$，

则方程(1.1)的零解不稳定.

证明方法类似于定理3，故从略.

五、特征方程有一个具有正实部的根

定理6 如果方程(1.1)满足下列条件：

1. $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界（其中t_0足够大），即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|A(t)|\leqslant M,\ |B(t)|\leqslant M,\ |C(t)|\leqslant M,\ |D(t)|\leqslant M$$

2. 特征方程(1.3)的根$\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$, $\lambda_4(t)$满足

$$-\delta_2<\lambda_3(t)\leqslant\lambda_2(t)\leqslant\lambda_1(t)<-\delta_1,\quad \delta_3<\lambda_4(t)$$

其中$\delta_i(i=1, 2, 3)$是与t无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$；

3. $-B(t)C(t)D(t)+A(t)D^2(t)-A(t)B(t)-A(t)D(t)-C(t)D(t)+C(t)>0$ 对所有的$t\geqslant t_0$都成立；

4. $$\max_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{64M^3+42M^2+8M},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{36M^2+16M+1}\right\}$$

η是一个常数，且$0<\eta<2$

则方程(1.1)的零解不稳定.

证明方法类似于定理2，故从略.

定理7 对于方程(1.1)设

1. $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界（其中t_0足够大）即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|A(t)|\leqslant M,\ |B(t)|\leqslant M,\ |C(t)|\leqslant M,\ |D(t)|\leqslant M$$

2. 特征方程(1.3)的根$\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$, $\lambda_4(t)$满足

$$\lambda_3(t)<-\delta_5,\quad -\delta_2<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_1(t)<-\delta_1,\quad \delta_3<\lambda_4(t)<\delta_4$$

其中$\delta_i(i=1, 2, 3, 4, 5)$是与$t$无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<\delta_4<\delta_5$；

3. $-B(t)C(t)D(t)+A(t)D^2(t)-A(t)B(t)-A(t)D(t)-C(t)D(t)+C(t)<0$ 对所有的$t\geqslant t_0$都成立；

4. $$\max_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{64M^3+42M^2+8M},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{36M^2+16M+1}\right\}$$

η是一个常数，且$0<\eta<2$，

则方程(1.1)的零解不稳定.

证明方法类似于定理3，故从略.

除以上七个定理外由于特征根的不同位置还有十五种情形也可用类似的方法证明方程(1.1)的零解不稳定，现列于表1：

表 1

方程(1.1)零解不稳定的充分条件 / 不同情况	当$t\geq t_0$时特征根$\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$, $\lambda_4(t)$满足的条件	当$t\geq t_0$时$V_{44}(t)$的符号	当$t\geq t_0$时$A(t),B(t),C(t),D(t)$满足的条件	证明方法
特征方程有三个具有正实部的根	1) $\lambda_1(t)<-\delta_3$, $\delta_1<\lambda_2(t)\leq\lambda_3(t)\leq\lambda_4(t)<\delta_2$或 2) $\lambda_1(t)<-\delta_3$, $\delta_1<\lambda_2(t)<\delta_2$, $\lambda_3(t)=p(t)+q(t)I$ $\lambda_4(t)=p(t)-q(t)I$, 且$p(t)>\delta_1'$, $\lvert q(t)\rvert>\delta_2'$	$V_{44}(t)>0$	满足定理2的条件1和条件4	类似于定理2
	3) $-\delta_4<\lambda_1(t)<-\delta_3$, $\delta_1<\lambda_2(t)\leq\lambda_3(t)<\delta_2$, $\delta_5<\lambda_4(t)$或 4) $-\delta_2<\lambda_1(t)<-\delta_1$, $\delta_3<\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)=p(t)+q(t)I$ $\lambda_4(t)=p(t)-q(t)I$, 且$p(t)>\delta_1'$, $\lvert q(t)\rvert>\delta_2'$	$V_{44}(t)<0$		类似于定理3
特征方程有两个具有正实部的根	1) $\lambda_2(t)<-\delta_7$, $-\delta_4<\lambda_1(t)<-\delta_3$, $\delta_1<\lambda_3(t)<\delta_2$ $\delta_5<\lambda_4(t)<\delta_6$	$V_{44}(t)>0$		类似于定理2
	2) $\lambda_2(t)<-\delta_5$, $-\delta_2<\lambda_1(t)<-\delta_1$, $\delta_3<\lambda_3(t)\leq\lambda_4(t)<\delta_4$或 3) $\lambda_2(t)\leq\lambda_1(t)<-\delta_3$, $\delta_1<\lambda_3(t)\leq\lambda_4(t)<\delta_2$或 4) $-\delta_4<\lambda_2(t)\leq\lambda_1(t)<-\delta_3$, $\delta_1<\lambda_3(t)<\delta_2$, $\delta_5<\lambda_4(t)$或 5) $\lambda_2(t)\leq\lambda_1(t)<-\delta_1'$, $\lambda_3(t)=p(t)+q(t)I$ $\lambda_4(t)=p(t)-q(t)I$, 且$p(t)>\delta_2'$, $\lvert q(t)\rvert>\delta_1'$或 6) $\delta_1'<\lambda_1(t)\leq\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)=p(t)+q(t)I$, $\lambda_4(t)=p(t)-q(t)I$, 且$p(t)<-\delta_2'$, $\lvert q(t)\rvert>\delta_3'$或 7) $\lambda_1(t)=R(t)+S(t)I$, $\lambda_2(t)=R(t)-S(t)I$ $\lambda_3(t)=p(t)+q(t)I$, $\lambda_4(t)=p(t)-q(t)I$且 $R(t)>\delta_1'$, $\lvert S(t)\rvert>\delta_2'$, $p(t)<-\delta_3'$ $\lvert q(t)\rvert>\delta_4'$, $\lvert S(t)\pm q(t)\rvert>\delta_5'$	$V_{44}(t)<0$	满足定理2的条件1和条件4	类似于定理3
特征方程有一个具有正实部的根	1) $\lambda_3(t)\leq\lambda_2(t)<-\delta_5$, $-\delta_2<\lambda_1(t)<-\delta_1$, $\delta_3<\lambda_4(t)<\delta_4$或 2) $-\delta_2<\lambda_1(t)<-\delta_1$, $\delta_3<\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)=p(t)+q(t)I$ $\lambda_4(t)=p(t)-q(t)I$, 且$p(t)<-\delta_1'$, $\lvert q(t)\rvert>\delta_2'$	$V_{44}(t)>0$	满足定理2的条件1和条件4	类似于定理2
	3) $\lambda_3(t)\leq\lambda_2(t)\leq\lambda_1(t)<-\delta_3$, $\delta_1<\lambda_4(t)<\delta_2$或 4) $\lambda_1(t)<-\delta_3$, $\delta_1<\lambda_2(t)<\delta_2$, $\lambda_3(t)=p(t)+q(t)I$ $\lambda_4(t)=p(t)-q(t)I$, 且$p(t)<-\delta_1'$, $\lvert q(\cdot)\rvert>\delta_2'$	$V_{44}(t)<0$		类似于定理3

其中$\delta_i(i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$与$\delta_j'(j=1, 2, 3, 4, 5)$都是与$t$无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<\delta_4<\delta_5<\delta_6<\delta_7$, $I=\sqrt{-1}$

六、例　子

例1 考察方程

$$\frac{d^4x}{dt^4}-13\frac{d^3x}{dt^3}+\left(62+\frac{\sin^2t}{t^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2}-\left(128+5\frac{\sin^2t}{t^2}\right)\frac{dx}{dt}+\left(96+6\frac{\sin^2t}{t^2}\right)x=0 \quad (6.1)$$

的零解的稳定性。

容易证明方程(6.1)的特征方程是

$$\lambda^4-13\lambda^3+\left(62+\frac{\sin^2t}{t^2}\right)\lambda^2-\left(128+5\frac{\sin^2t}{t^2}\right)\lambda+\left(96+6\frac{\sin^2t}{t^2}\right)=0$$

它的特征根是

$$\lambda_1(t)=2,\ \lambda_2(t)=3,\ \lambda_3(t)=4+\frac{\sin t}{t}I,\ \lambda_4(t)=4-\frac{\sin t}{t}I$$

下面验证方程(6.1)满足定理1的条件

1．方程(6.1)的系数

$$A(t)=-13,\ B(t)=62+\frac{\sin^2 t}{t^2},\ C(t)=-\left(128+5\frac{\sin^2 t}{t^2}\right),\ D(t)=96+6\frac{\sin^2 t}{t^2}$$

在$60\leqslant t<+\infty$上可微有界，且

$$|A(t)|\leqslant 133,\ |B(t)|\leqslant 133,\ |C(t)|\leqslant 133,\ |D(t)|\leqslant 133$$

$$\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|=0,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|\leqslant\left|\frac{2\sin t\cos t}{t^2}\right|+\left|\frac{2\sin^2 t}{t^3}\right|\leqslant\frac{4}{t^2}\leqslant\frac{1}{900},$$

$$\left|\frac{dC(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{180},\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{150}$$

2．$\mathrm{Re}(\lambda_i(t))\geqslant 2\quad(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

3．(i) $$\max_{60\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}$$

$$\leqslant\max\left\{0,\ \frac{1}{900},\ \frac{1}{180},\ \frac{1}{150}\right\}=\frac{1}{150}$$

(ii) $$\Delta(t)=A(t)B(t)C(t)D(t)-C^2(t)D(t)-A^2(t)D^2(t)$$

$$=6773760+749760\frac{\sin^2 t}{t^2}+24240\frac{\sin^4 t}{t^4}+240\frac{\sin^6 t}{t^6}\geqslant 6773760$$

(iii) $$\varepsilon=\min_{60\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{64M^3+42M^2+8M},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{36M^2+16M+1}\right\}$$

$$=\min_{60\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{|\Delta(t)|}{151312770},\ \frac{|\Delta(t)|}{638933}\right\}\quad(\text{其中 }\eta=1,\ M=133)$$

$$=\min_{60\leqslant t<+\infty}\frac{|\Delta(t)|}{151312770}\geqslant\frac{6773760}{151312770}>\frac{1}{150}$$

从而可知

$$\max_{60\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

所以定理1的全部条件均被满足，根据定理1可知方程(6.1)的零解不稳定。

例2　考察方程

$$\frac{d^4x}{dt^4}-\frac{11}{2}\frac{d^3x}{dt^3}+\left[\frac{11}{2}-(\mathrm{arctg}t)^2\right]\frac{d^2x}{dt^2}+\left[\frac{15}{2}-\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}t)^2\right]\frac{dx}{dt}$$

$$+\left[-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}t)^2\right]x=0 \tag{6.2}$$

的零解的稳定性。

容易证明方程(6.2)的特征方程是

$$\lambda^4-\frac{11}{2}\lambda^3+\left[\frac{11}{2}-(\mathrm{arctg}t)^2\right]\lambda^2+\left[\frac{15}{2}-\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}t)^2\right]\lambda$$

$$+\left[-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}t)^2\right]=0$$

它的特征根是

$$\lambda_1(t)=-1,\ \lambda_2(t)=\frac{1}{2},\ \lambda_3(t)=3-\mathrm{arctg}t,\ \lambda_4(t)=3+\mathrm{arctg}t$$

下面验证方程(6.2)满足定理2的条件

1．方程(6.2)的系数

$$A(t)=-\frac{11}{2},\quad B(t)=\frac{11}{2}-(\mathrm{arctg}t)^2,\quad C(t)=\frac{15}{2}-\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}t)^2,$$

$$D(t)=-\frac{9}{2}+\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}t)^2$$

在 $1000\leqslant t<+\infty$ 上可微有界，且

$$|A(t)|\leqslant 7.5,\quad |B(t)|\leqslant 7.5,\quad |C(t)|\leqslant 7.5,\quad |D(t)|\leqslant 7.5$$

$$\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|=0,\quad \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|=\left|\frac{2\mathrm{arctg}t}{1+t^2}\right|\leqslant\frac{4}{1+t^2}\leqslant\frac{4}{t^2}\leqslant\frac{1}{250000},$$

$$\left|\frac{dC(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{500000},\quad \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{500000}$$

2. 当 $1000\leqslant t<+\infty$ 时，特征根 $\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$\lambda_4(t)$ 满足不等式

$$-\delta_4<\lambda_1(t)<-\delta_3,\quad \delta_1<\lambda_2(t)<\delta_2,\quad \delta_5<\lambda_3(t)<\lambda_4(t)$$

其中 $\delta_1=\frac{1}{4}$，$\delta_2=\frac{7}{10}$，$\delta_3=\frac{9}{10}$，$\delta_4=\frac{6}{5}$，$\delta_5=\frac{7}{5}$

3. 当 $1000\leqslant t<+\infty$ 时，

$$-B(t)C(t)D(t)+A(t)D^2(t)-A(t)B(t)-A(t)D(t)-C(t)D(t)+C(t)$$

$$=121-\frac{205}{4}(\mathrm{arctg}t)^2+\frac{25}{4}(\mathrm{arctg}t)^4-\frac{1}{4}(\mathrm{arctg}t)^6$$

$$=41-\frac{45}{4}(\mathrm{arctg}t)^2+5[(\mathrm{arctg}t)^2-4]^2+\frac{1}{4}(\mathrm{arctg}t)^4[5-(\mathrm{arctg}t)^2]$$

$$\geqslant 41-\frac{45}{4}(\mathrm{arctg}t)^2$$

$$\geqslant 41-\frac{45}{4}(1.6)^2=12.2>12$$

4. (i) $\max\limits_{1000\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}$

$$\leqslant\max\left\{0,\frac{1}{250000},\frac{1}{500000},\frac{1}{500000}\right\}=\frac{1}{250000}$$

(ii) $\Delta(t)=A(t)B(t)C(t)D(t)-C^2(t)D(t)-A^2(t)D^2(t)$

$$=\frac{1}{8}[5292-2343(\mathrm{arctg}t)^2+303(\mathrm{arctg}t)^4-12(\mathrm{arctg}t)^6]$$

$$=\frac{1}{8}\{1404-399(\mathrm{arctg}t)^2+243[(\mathrm{arctg}t)^2-4]^2+12(\mathrm{arctg}t)^4[5-(\mathrm{arctg}t)^2]\}$$

$$\geqslant\frac{1}{8}\{1404-399(\mathrm{arctg}t)^2\}$$

$$\geqslant\frac{1}{8}\{1404-399(1.6)^2\}=47.82>47$$

(iii) $\varepsilon=\min\limits_{1000\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{64M^3+42M^2+8M},\frac{\eta|\Delta(t)|}{36M^2+16M+1}\right\}$

$$=\min_{1000\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\Delta(t)}{29422.5},\frac{\Delta(t)}{2146}\right\}\quad（其中\ \eta=1,\ M=7.5）$$

$$=\min_{1000\leqslant t<+\infty}\frac{\Delta(t)}{29422.5}>\frac{47}{29422.5}>\frac{1}{250000}$$

从而可知

$$\max_{1000\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

所以定理 2 的全部条件均被满足，根据定理 2 可知方程(6.2)的零解不稳定。

例 3 考察方程

$$\frac{d^4x}{dt^4}-5\frac{d^3x}{dt^3}+(6-\exp[-2t])\frac{d^2x}{dt^2}+(4+\exp[-2t])\frac{dx}{dt}-(8-2\exp[-2t])x=0 \tag{6.3}$$

的零解的稳定性。

方程(6.3)的特征方程是

$$\lambda^4-5\lambda^3+(6-\exp[-2t])\lambda^2+(4+\exp[-2t])\lambda-(8-2\exp[-2t])=0$$

它的特征根是

$$\lambda_1(t)=-1,\ \lambda_2(t)=2-\exp[-t],\ \lambda_3(t)=2,\ \lambda_4(t)=2+\exp[-t]$$

下面验证方程(6.3)满足定理 3 的条件

1. 方程(6.3)的系数

$$A(t)=-5,\ B(t)=6-\exp[-2t],\ C(t)=4+\exp[-2t],$$
$$D(t)=-(8-2\exp[-2t])$$

在$10\leqslant t<+\infty$上可微有界，且

$$|A(t)|\leqslant 9,\ |B(t)|\leqslant 9,\ |C(t)|\leqslant 9,\ |D(t)|\leqslant 9$$

$$\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|=0,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{10000},\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{10000},\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{5000}$$

2. 当$10\leqslant t<+\infty$时，特征根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$\lambda_4(t)$满足不等式

$$-\delta_2<\lambda_1(t)<-\delta_1,\ \delta_3<\lambda_2(t)<\lambda_3(t)<\lambda_4(t)$$

其中 $$\delta_1=\frac{1}{2},\ \delta_2=\frac{3}{2},\ \delta_3=\frac{8}{5}$$

3. 当$10\leqslant t<+\infty$时

$$-B(t)C(t)D(t)+A(t)D^2(t)-A(t)B(t)-A(t)D(t)-C(t)D(t)+C(t)$$
$$=-102+134\exp[-2t]-34\exp[-4t]+2\exp[-6t]$$
$$<-102+134\exp[-2t]+2\exp[-6t]$$
$$<-102+\frac{134}{(2.7)^{20}}+\frac{2}{(2.7)^{60}}\qquad(\because e>2.7)$$
$$=-101-\left[1-\frac{134}{(2.7)^{20}}-\frac{2}{(2.7)^{60}}\right]<-101<0$$

4. (i) $$\max_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}$$
$$\leqslant\max\left\{0,\ \frac{1}{10000},\ \frac{1}{10000},\ \frac{1}{5000}\right\}=\frac{1}{5000}$$

(ii) $$\Delta(t)=A(t)B(t)C(t)D(t)-C^2(t)D(t)-A^2(t)D^2(t)$$
$$=-512+672\exp[-2t]-168\exp[-4t]+8\exp[-6t]$$

$$<-512+\frac{672}{\exp[2t]}+\frac{8}{\exp[6t]}$$

$$<-512+\frac{672}{(2.7)^{20}}+\frac{8}{(2.7)^{60}} \qquad (\because e>2.7)$$

$$=-511-\left[1-\frac{672}{(2.7)^{20}}-\frac{8}{(2.7)^{60}}\right]<-511$$

所以当 $10\leqslant t<+\infty$ 时，$|\Delta(t)|>511$

(iii) $$\varepsilon=\min_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{64M^3+42M^2+8M},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{36M^2+16M+1}\right\}$$

$$=\min_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{|\Delta(t)|}{50130},\ \frac{|\Delta(t)|}{3061}\right\} \qquad (\text{其中 } \eta=1,\ M=9)$$

$$=\min_{10\leqslant t<+\infty}\frac{|\Delta(t)|}{50130}>\frac{511}{50130}>\frac{1}{5000}$$

从而可知

$$\max_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

所以定理 3 的全部条件均被满足，根据定理 3 可知方程(6.3)的零解不稳定。

例 4 考察方程

$$\frac{d^4x}{dt^4}-\left(25+\frac{9}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2}-\left(60+\frac{27}{t}+\frac{3}{t^2}\right)\frac{dx}{dt}-\left(36+\frac{18}{t}+\frac{2}{t^2}\right)x=0 \qquad (6.4)$$

的零解的稳定性。

方程(6.4)的特征方程是

$$\lambda^4-\left(25+\frac{9}{t}+\frac{1}{t^2}\right)\lambda^2-\left(60+\frac{27}{t}+\frac{3}{t^2}\right)\lambda-\left(36+\frac{18}{t}+\frac{2}{t^2}\right)=0$$

它的特征根是

$$\lambda_1(t)=-1,\ \lambda_2(t)=-2,\ \lambda_3(t)=-3-\frac{1}{t},\ \lambda_4(t)=6+\frac{1}{t}$$

下面验证方程(6.4)满足定理 6 的条件

1. 方程(6.4)的系数

$$A(t)=0,\ B(t)=-\left(25+\frac{9}{t}+\frac{1}{t^2}\right),\ C(t)=-\left(60+\frac{27}{t}+\frac{3}{t^2}\right),$$

$$D(t)=-\left(36+\frac{18}{t}+\frac{2}{t^2}\right)$$

在 $1000\leqslant t<+\infty$ 上可微有界，且

$$|A(t)|\leqslant 61,\ |B(t)|\leqslant 61,\ |C(t)|\leqslant 61,\ |D(t)|\leqslant 61$$

$$\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|=0,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|=\left|-\frac{9}{t^2}+\frac{2}{t^3}\right|\leqslant\frac{9}{t^2}+\frac{1}{t^2}=\frac{10}{t^2}\leqslant\frac{1}{100000},$$

$$\left|\frac{dC(t)}{dt}\right|=\left|\frac{27}{t^2}+\frac{6}{t^3}\right|\leqslant\frac{27}{t^2}+\frac{1}{t^2}<\frac{50}{t^2}\leqslant\frac{1}{20000},$$

$$\left|\frac{dD(t)}{dt}\right|=\left|\frac{18}{t^2}+\frac{4}{t^3}\right|\leqslant\frac{18}{t^2}+\frac{2}{t^2}=\frac{20}{t^2}\leqslant\frac{1}{50000}$$

2. 当 $1000\leqslant t<+\infty$ 时，特征根 $\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$\lambda_4(t)$ 满足不等式

$$-\delta_2<\lambda_3(t)<\lambda_2(t)<\lambda_1(t)<-\delta_1,\ \delta_3<\lambda_4(t)$$

其中 $\delta_1=\frac{1}{2}$, $\delta_2=5$, $\delta_3=6$

3. 当 $1000\leqslant t<+\infty$ 时

$$-B(t)C(t)D(t)+A(t)D^2(t)-A(t)B(t)-A(t)D(t)-C(t)D(t)+C(t)$$
$$=51780+\frac{68661}{t}+\frac{37761}{t^2}+\frac{11070}{t^3}+\frac{1830}{t^4}+\frac{162}{t^5}+\frac{6}{t^6}$$
$$>51780$$

4. (i) $\max\limits_{1000\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}$

$$\leqslant\max\left\{0,\ \frac{1}{100000},\ \frac{1}{20000},\ \frac{1}{50000}\right\}=\frac{1}{20000}$$

(ii) $\Delta(t)=A(t)B(t)C(t)D(t)-C^2(t)D(t)-A^2(t)D^2(t)$

$$=\left(60+\frac{27}{t}+\frac{3}{t^2}\right)^2\left(36+\frac{18}{t}+\frac{2}{t^2}\right)$$
$$>(60)^2\cdot(36)=129600$$

(iii) $\varepsilon=\min\limits_{1000\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{64M^3+42M^2+8M},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{36M^2+16M+1}\right\}$

$$=\min_{1000\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\Delta(t)}{14683554},\ \frac{\Delta(t)}{134933}\right\}\quad(\text{其中 }\eta=1,\ M=61)$$

$$=\min_{1000\leqslant t<+\infty}\frac{\Delta(t)}{14683554}>\frac{129600}{14683554}>\frac{1}{20000}$$

从而可知

$$\max_{1000\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{dA(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dB(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dC(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dD(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

所以定理 6 的全部条件均被满足，根据定理 6 可知方程(6.4)的零解不稳定.

参 考 文 献

[1] 秦元勋、王联、王慕秋，缓变系数动力系统的运动稳定性，中国科学，专辑(Ⅰ)(1979).

[2] Барбашин Е. А., *Функций Ляпунова*, Физ. Мат. Гиз., (1970).

[3] 秦元勋、王慕秋、王联，《运动稳定性理论与应用》，科学出版社(1981).

Instability of Solution For the Fourth Order linear Differential Equation with Varied Coefficient

Lu De-yuan   Liao Zong-huang

(Guizhou Normal University, Guiyang)

Abstract

In this paper, we give some sufficient conditions of the instability for the fourth order linear differential equation with varied coefficient, at least one of the characteristic roots of which has positive real part, by means of Liapunov's second method

Key words ordinary differential equation, motive stability theory, linear differential equation with varied coefficient