应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非完整动力学逆问题的一种提法和解法*

刘凤丽　　梅凤翔

（沈阳 辽宁大学数学系）　　（北京理工大学）

（李骊推荐，1991年12月30日收到）

摘　要

本文给出非完整动力学逆问题的一种提法和解法：已知某些积分，来求施加在系统上的非完整约束的形式；进而在已知系统动能表达式的情况下，来求加在系统上的广义约束反力；最后，给出例子说明解法的应用．

关键词　分析力学　非完整系统　积分　逆问题

一、引　言

动力学逆问题是经典力学的主要问题之一，最著名的动力学逆问题是牛顿问题：行星按Kepler定律运动，求作用在行星上的力．这就为牛顿矢量力学奠定了基础．根据物体运动的已知性质来确定物体上的作用力问题，就是牛顿矢量力学中所建立的动力学逆问题的概念．近年发展起来的新兴学科，如宇航力学，飞行器动力学，运动和过程的控制理论，机器人动力学等，都与动力学逆问题密切相关．随着科学技术的发展，动力学逆问题的提法也在不断扩充[1]．到60～70年代，动力学逆问题才有了一般的提法[2]．然而，大多研究还仅限于完整力学系统．

文献[3，4]从不同角度提出并解决了非完整动力学的一些逆问题．但是，关于施加约束的形式问题还未解决．本文着重提出并解决系统所施加的非完整约束的形式问题．首先，根据系统的已知积分来求非完整约束的形式；其次，在已知动能表达式的情况下，可进一步确定系统的广义约束反力；最后，为说明上述结果，我们给出一个例子．

二、根据已知积分确定非完整约束的形式

设力学系统的位形由n个广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$来确定．假设系统有m个积分

$$\omega_\mu(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)=C_\mu \qquad (\mu=1,\ \cdots,\ m\leqslant n) \tag{2.1}$$

其中ω_μ是彼此函数独立的，且相容的，它们有对其变量q_s，$\dot{q}_s$，t的连续偏导数．当$C_\mu(\mu=1,\ \cdots,\ m\leqslant n)$为任意常数时，(2.1)给出第一积分；当$C_\mu=0$时，(2.1)给出特殊积分．

* 国家自然科学基金资助课题．

现在提出非完整动力学的一个逆问题：已知积分(2.1)，试求施加在系统上的非完整约束．为解此逆问题，首先将(2.1)对时间 t 求导数，并引进 Еругин 函数[2,5]，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_\mu}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial\omega_\mu}{\partial t}=\Phi_\mu(\omega,\ q,\ \dot{q},\ t)\qquad(\mu=1,\ \cdots,\ m)\tag{2.2}$$

其中Φ_μ为 Еругин 函数．当$C_\mu\neq 0$时，$\Phi_\mu=0$；当$C_\mu=0$时，Φ_μ为满足

$$\Phi_\mu(0,\ q,\ \dot{q},\ t)=0\tag{2.3}$$

的任意函数．

其次，由(2.2)解出广义加速度，记作

$$\ddot{q}_r=\sum_{l=1}^{m}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)-\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\Delta^{rk}}{\Delta}\ddot{q}_k\qquad(r=1,\ \cdots,\ m)\tag{2.4}$$

其中

$$\Delta=\det(\partial\omega_l/\partial\dot{q}_r)_{m\times n}\neq 0\tag{2.5}$$

而Δ_{lr}为行列式Δ的元素$(l,\ r)$的代数余子式，Δ^{rk}为Δ中第 r 列用(2.2)中矩阵第 k 列替代所得行列式．由(2.4)一般不能唯一确定全部广义加速度$\ddot{q}_s(s=1,\ \cdots,\ n)$．这是因为，第一，当$m<n$时，由(2.4)不能得到所有广义加速度；第二，即使$m=n$，(2.4)中含有 Еругин 函数Φ_l，一般说，它们除满足条件(2.3)外，仍是任意的．

最后，研究加在系统上的非完整约束的形式．假设系统受有 g 个非完整约束，将其表为

$$f_\beta(q_s,\ \dot{q}_s,\ t)=0\qquad(\beta=1,\ \cdots,\ g;\ s=1,\ \cdots,\ n)\tag{2.6}$$

下面，我们来建立f_β应满足的方程．将(2.6)对时间 t 求导数，并引入 Еругин 函数，得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=\Psi_\beta(f,\ q,\ \dot{q},\ t)\qquad(\beta=1,\ \cdots,\ g)\tag{2.7}$$

其中Ψ_β为 Еругин 函数，它们满足

$$\Psi_\beta(0,\ q,\ \dot{q},\ t)=0\qquad(\beta=1,\ \cdots,\ g)\tag{2.8}$$

将(2.4)代入(2.7)，我们得到

$$\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_r}\left\{\sum_{l=1}^{m}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)-\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\Delta^{rk}}{\Delta}\ddot{q}_k\right\}$$

$$+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=\Psi_\beta(f,\ q,\ \dot{q},\ t)\qquad(\beta=1,\cdots,g)\tag{2.9}$$

方程(2.9)就是系统上施加的非完整约束应满足的偏微分方程组．显然，一般情形下，由(2.9)还不能得到f_β的具体形式．在此我们研究一些特殊情形．当 $m=n$ 时，方程(2.9)成为

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_r}\left\{\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\Phi_l-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\omega_l}{\partial q_s}\dot{q}_s-\frac{\partial\omega_l}{\partial t}\right)\right\}$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=\Psi_\beta(f,\ q,\ \dot{q},\ t)\qquad(\beta=1,\ \cdots,\ g)\tag{2.10}$$

进而，如果所有$C_\mu\neq 0$，即积分(2.1)全部是第一积分，则

$$\Phi_l=0 \qquad (l=1,\ \cdots,\ n) \tag{2.11}$$

于是(2.10)成为

$$-\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_r}\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \omega_l}{\partial q_s}\dot q_s+\frac{\partial \omega_l}{\partial t}\right)$$

$$+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot q_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=\Psi_\beta(f,\ q,\ \dot q,\ t) \qquad (\beta=1,\ \cdots,\ g) \tag{2.12}$$

最后，如果仅限于研究满足约束(2.6)的运动，那么

$$\Psi_\beta=0 \qquad (\beta=1,\ \cdots,\ g) \tag{2.13}$$

成立．于是，(2.12)成为

$$-\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_r}\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \omega_l}{\partial q_s}\dot q_s+\frac{\partial \omega_l}{\partial t}\right)+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot q_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g) \tag{2.14}$$

解偏微分方程(2.14)，就有可能得到f_β的具体表达式，即得到了非完整约束的形式．

三、广义约束反力的确定

如果已知系统动能表达式，和足够数目的积分，就有可能确定加在系统上的广义约束反力．

假设系统所受非完整约束为(2.6)，则系统运动方程可表为 Routh 形式[6]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s} \qquad (s=1,\ \cdots,\ n) \tag{3.1}$$

利用文献[6]给出的方法，方程(3.1)可表为显式

$$\ddot q_l=\sum_{s=1}^{n}\frac{\widetilde\Delta_{sl}}{\widetilde\Delta}\left\{-\sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,\ r;\ s]\dot q_k\dot q_r+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot q_k\right.$$

$$\left.+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot q_k+Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot q_s}\right\} \qquad (l=1,\ \cdots,\ n) \tag{3.2}$$

其中$\widetilde\Delta=\det(A_{ks})_{n\times n}\neq 0$，$A_{ks}$为动能中广义速度二次型的系数，$\widetilde\Delta_{sl}$为$\widetilde\Delta$元素$(s,\ l)$的代数余子式，$B_s$为动能中广义速度的一次型的系数，$T_0$为动能中不含广义速度的项，而

$$[k,\ r;\ s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_r}+\frac{\partial A_{rs}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{kr}}{\partial q_s}\right) \tag{3.3}$$

为系数A_{ks}的第一类 Christoffel 记号．

当$m=n$，所有$C_\mu\neq 0$，且只限于研究沿曲面(2.6)的运动时，则广义加速度由下式确定

$$\ddot q_r=-\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{lr}}{\Delta}\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \omega_l}{\partial q_s}\dot q_s+\frac{\partial \omega_l}{\partial t}\right) \qquad (r=1,\ \cdots,\ n) \tag{3.4}$$

而f_β的形式由方程(2.14)确定．将(3.4)以及由(2.14)所确定的f_β代入方程(3.2)，便得到为确定$(n+g)$个量Q_s，λ_β的n个代数方程．为由这些方程最终求解Q_s，λ_β，尚须补充g个关系．如果求出全部λ_β，那么广义约束反力

$$\Lambda_s=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\qquad(s=1,\ \cdots,\ n)\tag{3.5}$$

便可确定.

四、算　　例

为说明上述结果的应用，我们给出一个典型例子.

设单位质量质点在一个非完整约束下在空间中运动，已知系统有三个第一积分

$$\omega_1=(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)/2+gq_3=C_1\tag{4.1}$$

$$\omega_2=\dot{q}_2/\dot{q}_1=C_2\qquad(\dot{q}_1\neq0)\tag{4.2}$$

$$\omega_3=\dot{q}_1\dot{q}_3+gq_1=C_3\tag{4.3}$$

其中C_1，C_2，C_3为任意常数，g为重力加速度. 试研究非完整约束的形式以及广义约束反力.

首先，求广义加速度. 将(4.1)，(4.2)，(4.3)对时间t求导数，因C_1，C_2，C_3为任意常数，故Ерyгин函数取为零，有

$$\ddot{q}_1\dot{q}_1+\ddot{q}_2\dot{q}_2+\ddot{q}_3\dot{q}_3+g\dot{q}_3=0\tag{4.4}$$

$$\ddot{q}_2\dot{q}_1-\ddot{q}_1\dot{q}_2=0\tag{4.5}$$

$$\ddot{q}_1\dot{q}_3+\dot{q}_1\ddot{q}_3+g\dot{q}_1=0\tag{4.6}$$

由(4.2)和(4.5)解得

$$\ddot{q}_2=C_2\ddot{q}_1\tag{4.7}$$

将(4.7)代入(4.4)和(4.6)，得

$$\dot{q}_1\ddot{q}_1(1+C_2^2)+\dot{q}_3\ddot{q}_3=-g\dot{q}_3\tag{4.8}$$

$$\dot{q}_3\ddot{q}_1+\dot{q}_1\ddot{q}_3=-g\dot{q}_1\tag{4.9}$$

当

$$\Delta=\dot{q}_1^2(1+C_2^2)-\dot{q}_3^2\neq0\tag{4.10}$$

时，由(4.8)、(4.9)得到第一组解为

$$\ddot{q}_1=\ddot{q}_2=0,\ \ddot{q}_3=-g\tag{4.11}$$

当

$$\Delta=\dot{q}_1^2(1+C_2^2)-\dot{q}_3^2=0\tag{4.12}$$

时，将(4.12)对时间t求导数，并将其代入(4.8)，得

$$\ddot{q}_1=-g\dot{q}_1\dot{q}_3/2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)\tag{4.13}$$

将(4.13)代入(4.9)，得

$$\ddot{q}_3=-g+g\dot{q}_3^2/2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)\tag{4.14}$$

将(4.13)代入(4.7)，并注意到(4.2)，得

$$\ddot{q}_2=-g\dot{q}_2\dot{q}_3/2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)\tag{4.15}$$

于是，有第二组解(4.13)～(4.15).

其次，研究非完整约束的形式. 设非完整约束有形式

$$f(\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \dot{q}_3,\ t)=0\tag{4.16}$$

如仅限于研究沿曲面(4.16)的运动，则有

$$\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_1}\ddot{q}_1+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_2}\ddot{q}_2+\frac{\partial f}{\partial\dot{q}_3}\ddot{q}_3+\frac{\partial f}{\partial t}=0\tag{4.17}$$

将第一组解(4.11)代入(4.17)，得到偏微分方程

$$-\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_3}g+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{4.18}$$

于是，f有形式

$$f=\varphi(\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \dot{q}_3+gt) \tag{4.19}$$

其中φ为任意函数．再将第二组解(4.13)～(4.15)代入(4.17)，得到偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}\left(-\frac{g\dot{q}_1\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)}\right)+\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2}\left(-\frac{g\dot{q}_2\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)}\right)+\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_3}\left(-g+\frac{g\dot{q}_3^2}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)}\right)+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{4.20}$$

方程(4.20)有解

$$f=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-\dot{q}_3^2 \tag{4.21}$$

这便是经典 Appell-Hamel 例的约束方程．

最后，研究广义约束反力．假设问题的动能为

$$T=(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)/2 \tag{4.22}$$

则 Routh 方程(3.1)给出

$$\ddot{q}_1=Q_1+\lambda\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1},\quad \ddot{q}_2=Q_2+\lambda\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2},\quad \ddot{q}_3=Q_3+\lambda\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_3} \tag{4.23}$$

将第一组解(4.11)及(4.19)代入(4.23)，得

$$0=Q_1+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_1},\quad 0=Q_2+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_2},\quad 0=Q_3+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \tag{4.24}$$

其中 $x_3=\dot{q}_3+gt$．这就是广义力 Q_s 和广义约束反力 $\lambda\partial\varphi/\partial\dot{q}_s$ 所应满足的方程．将第二组解(4.13)～(4.15)及(4.21)代入(4.23)，得

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{g}{2}\frac{\dot{q}_1\dot{q}_3}{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}&=Q_1+2\lambda\dot{q}_1\\
-\frac{g}{2}\frac{\dot{q}_2\dot{q}_3}{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}&=Q_2+2\lambda\dot{q}_2\\
-\frac{g}{2}&=Q_3-2\lambda\dot{q}_3
\end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

为由(4.25)最终确定广义约束反力，必须补充一个条件．例如，可令

$$Q_1=0 \tag{4.26}$$

于是，可由(4.25)和(4.26)解得

$$\lambda=-g\dot{q}_3/4(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) \tag{4.27}$$

而广义约束反力为

$$\Lambda_1=-\frac{g\dot{q}_1\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)},\quad \Lambda_2=-\frac{g\dot{q}_2\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)},\quad \Lambda_3=\frac{g}{2} \tag{4.28}$$

参 考 文 献

[1] 梅凤翔，动力学逆问题的提法和解法，力学与实践，**13(1)** (1991)，17—23.

[2] Галиуллин А. С., *Методы Решения Обратных Задач Динамики*, Наука, Москва (1986).

[3] 梅凤翔，广义 Poisson 条件与非完整动力学逆问题，北京师范学院学报，**11(2)** (1990)，17—22.

[4] 梅凤翔，非完整动力学逆问题的基本解法，力学学报，23(2) (1991)，252—256.
[5] Еругин Н. П., Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую, *П. М. М.*, 16(6) (1952), 659—670.
[6] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社 (1985).

Formulation and Solution for Inverse Problem of Nonholonomic Dynamics

Liu Feng-li

(Liaoning University, Shengyang)

Mei Feng-xiang

(Beijing Institute of Technology, Beijing)

Abstract

This paper presents a formulation and solution for the inverse problem of nonholonomic dynamics: to find the form of nonholonomic constraints when some integrals are given and to find the generalized reactive forces of constraint acting on the system when the expression of the kinetic energy is given. An example is given to illustrate the application of the result.

Key words analytical mechanics, nonholonomic system, integral, inverse problem