应用数学和力学，第14卷第4期（1993年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于广义变分不等式与广义拟变分不等式*

张 从 军

（淮北煤炭师范学院数学系，1992年1月8日收到）

摘 要

本文在非常一般的框架下，建立了极大极小不等式，广义变分不等式和广义拟变分不等式，证明了解的存在定理，且它们是在非紧集上得到的，从而推广和改进了[3～13]中的相应结果。

关键词 广义变分不等式 拟变分不等式

一、引言和预备知识

本文以Φ表示实或复数域，对每个非空集X，2^X表示X的所有非空子集族。设E和F是Φ上的两个向量空间，$\langle\ ,\ \rangle: F\times E\to\Phi$是双线性泛函。

对每个$x_0\in E$，E的非空子集A，$\varepsilon>0$，记：

$$W(x_0,\ \varepsilon)=\{y\in F: |\langle y,x_0\rangle|<\varepsilon\}$$

$$U(A,\ \varepsilon)=\{y\in F: \sup_{x\in A}|\langle y,x\rangle|<\varepsilon\}$$

以集族$\{W(x,\ \varepsilon): x\in E,\ \varepsilon>0\}$作为零邻域系的子基所生成的拓扑记为$\sigma(F,\ E)$。如果$E$是拓扑向量空间，以集族$\{U(A,\ \varepsilon): A$是$E$的非空紧子集，$\varepsilon>0\}$作为零邻域系的基所生成的拓扑记为$\delta(F,\ E)$；以集族$\{U(B,\ \varepsilon): B$是$E$的非空有界子集，$\varepsilon>0\}$作为零邻域系的基所生成的拓扑记为$\eta(F,\ E)$。易于证明，当$F$具有拓扑$\sigma(F,\ E)$或$\delta(F,\ E)$时，$F$成为局部凸的拓扑向量空间，（但未必是Hausdorff的）。当F具有$\eta(F,\ E)$时，F成为拓扑向量空间。

E的子集C称为是$\sigma(E,\ F)$-紧的，如果C关于$\sigma(E,\ F)$拓扑是紧集，其余依此类推。

设$X\subset E$是非空子集，$G: X\to 2^E$称为是KKM映象，如果对X中的任何有限子集$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$都有

$$\mathrm{co}\{x_1,\cdots,x_n\}\subset\bigcup_{i=1}^{n}G(x_i)$$

二、几 个 引 理

引理1[1] 设E是拓扑向量空间，$X\subset E$是非空子集，$G: X\to 2^E$是KKM映象，如果对任

* 张石生推荐。

何$x\in X$，$G(x)$是E中的闭集，且至少存在一点$x_0\in X$，$G(x_0)$是紧集，则$\bigcap_{x\in X}G(x)\neq\phi$.

引理2[14] 设E是局部凸的Hausdorff拓扑向量空间，$X\subset E$是非空凸子集，$D\subset X$是非空紧子集，$T:X\to 2^D$满足：

（1） 对$\forall x\in X$，$\mathrm{co}(T(x))\subset D$；

（2） 对$\forall y\in X$，$T^{-1}(y)$是X中的开集；

则必存在$\bar{x}\in X$，使$\bar{x}\in\mathrm{co}(T(\bar{x}))$.

引理3[15] 设E，F是Φ上的两个拓扑向量空间，$\langle\,,\rangle:F\times E\to\Phi$是双线性泛函，并在$F\times X$的紧子集上连续，其中$X\subset E$非空．$T:X\to 2^F$是具紧值且上半连续的．则对每个给定的$x\in X$，泛函$y\mapsto\inf\limits_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w,\ y-x\rangle$在$X$的每个非空紧子集上是下半连续的．

引理4[15] 设E是Φ上的拓扑向量空间，F是Φ上的向量空间，$\langle\,,\rangle:F\times E\to\Phi$是双线性泛函，$X\subset E$是非空凸子集，$h:X\to R$是凸泛函，$T:X\to 2^F$沿$X$中的线段关于$\sigma(F,\ E)$拓扑下半连续．如果$\bar{y}\in X$，使

$$\sup_{u\in T(x)}\mathrm{Re}\langle u,\ \bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y})\qquad\forall x\in X$$

则有，

$$\sup_{w\in T(\bar{y})}\mathrm{Re}\langle w,\ \bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y})\qquad\forall x\in X$$

三、主要结果

定理1 设E是Φ上的拓扑向量空间，F是Φ上的向量空间，具有$\eta(F,\ E)$-拓扑．X是E的非空有界子集，$T:X\to 2^F$是具紧值的上半连续映射，$\langle\,,\rangle:F\times E\to\Phi$是双线性泛函，对每个$f\in F$，$x\mapsto\langle f,x\rangle$连续．对每个$y\in E$，令

$$g_y(x)=\inf_{w\subset T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\ x-y\rangle\qquad\forall x\in X$$

则$g_y:X\to R$是下半连续的．

证明 设$x_0\in X$．对$\forall\varepsilon>0$，我们证明存在x_0的开邻域$N(x_0)$，使当$x\in N(x_0)$时，

$$g_y(x)\geqslant g_y(x_0)-\varepsilon$$

事实上，取

$$V=\left\{f\in F:\ \sup_{t\in X-y}|\langle f,\ t\rangle|<\frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

这里$X-y=\{x-y:x\in X\}$．因为$X-y$是E的有界子集，所以$V\subset F$是开零邻域，对$\forall y\in T(x_0)$，$y+V$是y的开邻域，

故
$$T(x_0)+V=\bigcup_{y\in T(x_0)}(y+V)$$

是$T(x_0)$的开邻域，由T在x_0上半连续，知存在x_0的开邻域$N_0\subset X$，对$\forall x\in N_0$，有$T(x)\subset T(x_0)+V$.

对每个$u\in T(x_0)$，记

$$V_u=\left\{f\in F:\sup_{t\in\Omega}|\langle f,\ t\rangle-\langle u,\ t\rangle|<\frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

其中$\Omega=\{x-z:\ x,z\in X\}$是$E$中的有界集，故$V_u$是$F$中$u$的开邻域．因为$T(x_0)$是紧集，$T(x_0)\subset\bigcup\limits_{u\in T(x_0)}V_u$所以存在有限子集$\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n\}\subset T(x_0)$，使

$$T(x_0)\subset\bigcup_{i=1}^{n}V_{u_i}$$

对每个u_i，$i=1,2,\cdots,n$．泛函$x\mapsto\langle u_i,\ x\rangle$连续，故在$X$中存在$x_0$的开邻域$N_i$，使对$\forall x\in N_i$，

$$|\langle u_i,\ x\rangle-\langle u_i,\ x_0\rangle|<\varepsilon/3$$

令

$$N(x_0)=\bigcap_{i=0}N_i$$

则$N(x_0)\subset X$是x_0的开邻域．

下证$N(x_0)$即为所求．对$\forall x\in N(x_0)$，$w\in T(x)$，$x\in N_0$，故存在$u\in T(x_0)$，使$w-u\in V$．又因为

$$u\in T(x_0)\subset\bigcup_{i=1}^{n}V_{u_i}$$

故存在$i_0\in\{1,2,\cdots,n\}$，使$u\in V_{u_{i_0}}$．因此，我们有

$$|\mathrm{Re}\langle w,\ x-y\rangle-\mathrm{Re}\langle u,\ x-y\rangle|\leqslant|\langle w-u,\ x-y\rangle|<\varepsilon/3$$

从而

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle w,\ x-y\rangle&>\mathrm{Re}\langle u,\ x-y\rangle-\varepsilon/3\\&=\mathrm{Re}\langle u,\ x_0-y\rangle+\mathrm{Re}\langle u,\ x-x_0\rangle-\varepsilon/3\\&=\mathrm{Re}\langle u,\ x_0-y\rangle+\mathrm{Re}\langle u-u_{i_0},\ x-x_0\rangle+\mathrm{Re}\langle u_{i_0},\ x-x_0\rangle-\varepsilon/3\\&>\mathrm{Re}\langle u,\ x_0-y\rangle-\varepsilon/3-\varepsilon/3-\varepsilon/3\\&\geqslant\inf_{v\in T(x_0)}\mathrm{Re}\langle v,\ x_0-y\rangle-\varepsilon=g_y(x_0)-\varepsilon\end{aligned}$$

因为$w\in T(x)$是任意的，所以，

$$\inf_{w\in T(x)}\langle w,\ x-y\rangle\geqslant g_y(x_0)-\varepsilon$$

即

$$g_y(x)\geqslant g_y(x_0)-\varepsilon$$

证毕

注1 定理1的结论较引理3为强，这里$g_y:X\to R$不是仅在X的紧子集中下半连续，而是在X中下半连续，这对于处理非紧集情况要方便得多．此外，这里对$\langle\ ,\ \rangle:F\times E\to\Phi$的连续性要求也弱一些．

定理2 设E是Φ上的拓扑向量空间，X是E中的非空凸集．$\varphi,\psi:X\times X\to R\cup\{\pm\infty\}$，满足如下条件：

（1） $\psi(x,\ x)\leqslant 0$，$\forall x\in X$；

（2） 对每个固定的$x\in X$，$\varphi(x,\ y)$在X上是下半连续的；

（3） 对每个固定的$y\in X$，

$$\{x\in X:\psi(x,\ y)>0\}\supset\mathrm{co}\{x\in X:\varphi(x,\ y)>0\}；$$

（4） 存在$x_0\in X$，使$X_0=\{y\in X:\varphi(x_0,\ y)\leqslant 0\}$是紧集．

则存在$\bar{y}\in X_0$，使$\varphi(x,\ \bar{y})\leqslant 0$ 对$\forall x\in X$．

证明 对每个$x\in X$，定义$T:X\to 2^X$如下，

$$T(x)=\{y\in X,\ \varphi(x,\ y)\leqslant 0\}$$

则T是KKM映象．

因为若不然，则存在$\{x_1,\ \cdots,\ x_n\}\subset X$，$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\geqslant 0$，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,\quad 使\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\in\bigcup_{i=1}^{n}T(x_i)$$

从而
$$\varphi\left(x_i,\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right)>0$$

由(3)得,

$$\psi\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)>0$$

这与(1)矛盾。

再由(2)知，$T(x)$是X中的闭集，由(4)知，$T(x_0)$是X中的紧集，由引理1，$\bigcap_{x\in X}T(x)\neq\phi$。取$\bar{y}\in\bigcap_{x\in X}T(x)$，则对$\forall x\in X$，$\varphi(x,\ \bar{y})\leqslant 0$。显然，$\bar{y}\in T(x_0)=X_0$。即存在$\bar{y}\in X_0$，使

$$\varphi(x,\ \bar{y})\leqslant 0\qquad 对\forall x\in X$$

证毕

注2 该定理改进和推广了[3，4，6，8，9]中的相应结果。

定理3 设E是Φ上局部凸的Hausdorff拓扑向量空间，X是E的有界凸子集，D是X中的非空紧子集，F是Φ上的向量空间，具有$\eta(F,\ E)$拓扑。$\langle\ ,\ \rangle:F\times E\to\Phi$是双线性泛函，对每个$f\in F$，$x\mapsto\langle f,\ x\rangle$是连续的(在$X$上)。又设：

(1) $h:X\to R$是下半连续的凸泛函；

(2) $T:X\to 2^F$是具紧值的上半连续映射；

(3) 对每个$x\in X\setminus D$,

$$\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)\leqslant 0\qquad 对\forall y\in X\tag{*}$$

则存在一点$\bar{x}\in X$，使

$$\inf_{w\in T(\bar{x})}\mathrm{Re}\langle w,\ \bar{x}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{x})\qquad \forall x\in X$$

证明 假定对每个$x\in X$，存在$x_0\in X$，使得

$$\inf_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\ x-x_0\rangle>h(x_0)-h(x)$$

由(*)式，$x_0\in D$。定义$P:X\to 2^D$，对$\forall x\in X$

$$P(x)=\{y\in D:\ \inf_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\ x-y\rangle+h(x)-h(y)>0\}$$

则对每个$x\in X$，$P(x)\subset D$非空。下证$P(x)$是凸集。

设y_1，$y_2\in P(x)$，$t_i\in[0,\ 1]$，$t_1+t_2=1$，则有

$$\inf_{w\in T(x)}\mathrm{Re}\langle w,\ x-y_i\rangle+h(x)-h(y_i)>0\qquad (i=1,2)$$

因为h是凸泛函，故有

$$\begin{aligned}&\inf_{w\in T(x)}[\mathrm{Re}\langle w,\ x-(t_1y_1+t_2y_2)\rangle+h(x)-h(t_1y_1+t_2y_2)]\\&\geqslant\inf_{w\in T(x)}[t_1\mathrm{Re}\langle w,\ x-y_1\rangle+t_2\mathrm{Re}\langle w,\ x-y_2\rangle+h(x)-t_1h(y_1)-t_2h(y_2)]\\&\geqslant t_1\inf_{w\in T(x)}[\mathrm{Re}\langle w,\ x-y_1\rangle+h(x)-h(y_1)]\\&\quad+t_2\inf_{w\in T(x)}[\mathrm{Re}\langle w,\ x-y_2\rangle+h(x)-h(y_2)]>0\end{aligned}$$

再由(*)式，$t_1y_1+t_2y_2\in D$ 所以 $t_1y_1+t_2y_2\in P(x)$ 从而$P(x)$是凸集。

以下再证对每个$y\in D$，$P^{-1}(y)$是X中的开集．事实上，设$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是$X\setminus P^{-1}(y)$中的一个网，且$x_\alpha\to x_0\in X$，则有

$$\inf_{w\in T(x_\alpha)}\operatorname{Re}\langle w,\ x_\alpha-y\rangle+h(x_\alpha)-h(y)\leqslant 0\qquad\forall\alpha\in\Gamma$$

由定理1，$x\mapsto\inf\limits_{w\in T(x)}\operatorname{Re}\langle w,\ x-y\rangle$是下半连续的，而$h:X\to R$也下半连续，故有

$$\inf_{w\in T(x_0)}\operatorname{Re}\langle w,\ x_0-y\rangle+h(x_0)-h(y)\leqslant 0$$

因此，$X\setminus P^{-1}(y)$是X中的闭集，从而$P^{-1}(y)$是X中的开集．由引理2，存在一点$\bar{x}\in X$，使得$\bar{x}\in P(\bar{x})$，从而有$\bar{x}\in D$，使

$$\inf_{w\in T(\bar{x})}\operatorname{Re}\langle w,\ \bar{x}-\bar{x}\rangle+h(\bar{x})-h(\bar{x})>0$$

这是一个矛盾．故存在一点$\bar{x}\in X$，使

$$\inf_{w\in T(\bar{x})}\operatorname{Re}\langle w,\ \bar{x}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{x})\qquad\forall x\in X$$

证毕

注3 该定理将[5, 12, 13]中的结果推广到X是非紧集的情形，且这里是在很一般的框架下获得的．

定理4 设E是Φ上的拓扑向量空间，F是Φ上的向量空间，$X\subset E$是非空凸子集，$\langle\ ,\ \rangle$: $F\times E\to\Phi$是双线性泛函．又设：

（1） $h:X\to R$是$\sigma(E,\ F)$-下半连续的凸泛函；

（2） $T:X\to 2^F$沿X中的线段关于F中的$\sigma(F,\ E)$-拓扑下半连续，且对每个$y\in X$，有

$$\{x\in X:\ \inf_{w\in T(y)}\operatorname{Re}\langle w,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)>0\}$$
$$\supset\{x\in X:\ \sup_{u\in T(x)}\operatorname{Re}\langle u,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)>0\}$$

（3） 存在$x_0\in X$，使

$$K=\{y\in X:\ \sup_{u\in T(x_0)}\operatorname{Re}\langle u,\ y-x_0\rangle+h(y)-h(x_0)\leqslant 0\}$$

是$\sigma(E,\ F)$-紧的．

则存在一点$\bar{y}\in K$，使

$$\sup_{w\in T(\bar{y})}\operatorname{Re}\langle w,\ \bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y})\qquad\forall x\in X$$

证明 定义$\varphi,\ \psi:X\times X\to R\cup\{\pm\infty\}$如下：

$$\varphi(x,\ y)=\sup_{u\in T(x)}\operatorname{Re}\langle u,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)$$
$$\psi(x,\ y)=\inf_{w\in T(y)}\operatorname{Re}\langle w,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)$$

则φ，ψ具有如下性质：

（i） 对$\forall x\in X$，$\psi(x,\ x)=0$；

（ii） 对每个固定的$x\in X$，$y\mapsto\varphi(x,\ y)$在X上是$\sigma(E,\ F)$-下半连续的．

以下先证对每个固定的$f\in F$，$x\mapsto\langle f,\ x\rangle$关于$\sigma(E,\ F)$连续．事实上，对$\forall x_0\in E$，$\forall\varepsilon>0$，则$W(f,\ w)=\{x\in E,\ |\langle f,\ x\rangle|<\varepsilon\}$是开的零邻域，从而$N(x_0)=x_0+W(f,\ w)=\{x\in E,\ |\langle f,\ x-x_0\rangle|<\varepsilon\}$是$x_0$的开邻域，当$x\in N(x_0)$时，$|\langle f,\ x\rangle-\langle f,\ x_0\rangle|=|\langle f,\ x-x_0\rangle|<\varepsilon$．

从而对每个固定的$x\in X$，$y\mapsto\sup\limits_{u\in T(x)}\operatorname{Re}\langle u,\ y-x\rangle$是连续的，（关于$\sigma(E,\ F)$-拓扑），再由条件（1）知$y\to\phi(x,\ y)$在$X$上是$\sigma(E,\ F)$-下半连续的．

(iii) 对每个固定y，易于验证

$$\{x\in X: \inf_{w\in T(y)} \mathrm{Re}\langle w, y-x\rangle+h(y)-h(x)>0\}$$

是凸集．由条件(2)有，

$$\{x\in X:\psi(x, y)>0\}\supset\mathrm{co}\{x\in X:\varphi(x, y)>0\}$$

(iv) 由条件(3)，存在$x_0\in X$，使

$$K=\{y\in X:\varphi(x_0, y)\leqslant 0\}$$

是$\sigma(E, F)$-紧的．

由定理2，存在$\bar{y}\in K$，使$\varphi(x, \bar{y})\leqslant 0 \quad \forall x\in X$

即

$$\sup_{u\in T(x)} \mathrm{Re}\langle u, \bar{y}-x\rangle+h(\bar{y})-h(x)\leqslant 0 \qquad \forall x\in X$$

由引理4有，

$$\sup_{w\in T(\bar{y})} \mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y}) \qquad \forall x\in X$$

证毕

注4 定理4推广了[9]中的相应结果．

定理5 设E是Φ上的拓扑向量空间，F是Φ上的向量空间，X是E的非空凸子集，$\langle\,,\rangle$: $F\times E\to\Phi$是双线性泛函，对每个$f\in F$，映射$x\mapsto\langle f, x\rangle$在$X$上连续．又设：

(1) $h:X\to R$是下半连续的凸泛函；

(2) $T:X\to 2^F$沿X中的线段关于F的$\sigma(F, E)$拓扑下半连续，且对每个$y\in X$，有

$$\{x\in X: \sup_{u\in T(x)} \mathrm{Re}\langle u, y-x\rangle+h(y)-h(x)>0\}$$
$$\subset\{x\in X: \inf_{w\in T(y)} \mathrm{Re}\langle w, y-x\rangle+h(y)-h(x)>0\}$$

(3) 存在$x_0\in X$，使

$$K=\{y\in X: \sup_{u\in T(x_0)} \mathrm{Re}\langle u, y-x_0\rangle+h(y)-h(x_0)\leqslant 0\}$$

是紧集．

则存在一点$\bar{y}\in K$，使

$$\sup_{w\in T(\bar{y})} \mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y}) \qquad \forall x\in X$$

证明与定理4中完全类似，这里从略．

定理6 设E是Φ上的拓扑向量空间，F是Φ上的向量空间，带有$\delta(F, E)$-拓扑．X是E的非空凸子集，$\langle\,,\rangle:F\times E\to\Phi$是双线性泛函，对每个$f\in F$，$x\mapsto\langle f, x\rangle$在$X$上连续．又设：

(1) $h:X\to R$是下半连续的凸泛函；

(2) $T:X\to 2^F$上半连续的且具紧凸值；

(3) 存在$x_0\in X$，使

$$K=\{y\in X: \inf_{w\in T(y)} \mathrm{Re}\langle w, y-x_0\rangle+h(y)-h(x_0)\leqslant 0\}$$

是紧集．

则存在$\bar{y}\in K$，$\bar{w}\in T(\bar{y})$，使

$$\mathrm{Re}\langle \bar{w}, \bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y}) \qquad \forall x\in X$$

证明 先证$\langle\,,\rangle$在$F\times X$的紧子集上连续．事实上，不妨设$F\times X$的紧子集是$D\times A$，其

中D，A分别是F与X的紧子集．对任何$(f_0, x_0)\in D\times A$ $\varepsilon>0$，则$U(A, \varepsilon)=\{y\in F: \sup\limits_{x\in A}|\langle y, x\rangle|<\varepsilon\}$是$F$中的开零邻域，从而

$$W_0=f_0+U(A, \varepsilon)=\{g\in F:\sup_{x\in A}|\langle g-f_0, x\rangle|<\varepsilon\}$$

是f_0的开邻域．又因为$x\mapsto\langle f_0, x\rangle$连续，所以存在$U_0$是$x_0$的开邻域，当$x\in U_0$时，有

$$|\langle f_0, x\rangle-\langle f_0, x_0\rangle|<\varepsilon$$

于是，当$(f, x)\in W_0\times U_0$时，就有

$$|\langle f, x\rangle-\langle f_0, x_0\rangle|\leqslant|\langle f, x\rangle-\langle f_0, x\rangle|+|\langle f_0, x\rangle-\langle f_0, x_0\rangle|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

下面定义$\psi: X\times X\to R$如下：

$$\psi(x, y)=\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w, y-x\rangle+h(y)-h(x)$$

则ψ具有如下性质：

(i) 对每个$x\in X$，$\psi(x, x)=0$；

(ii) 由引理3，对每个固定的$x\in X$，$y\mapsto\psi(x, y)$在X的每个非空紧子集上下半连续；

(iii) 对每个固定的$y\in X$，显然$\{x\in X:\psi(x, y)>0\}$是凸集；

(iv) 存在$x_0\in X$，使$K=\{y\in X:\psi(x_0, y)\leqslant 0\}$是紧集．

由定理2，存在$\bar{y}\in K$，使

$$\inf_{w\in T(\bar{y})}\mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle+h(\bar{y})-h(x)\leqslant 0 \qquad \forall x\in X$$

再定义$f: X\times T(\bar{y})\to R$如下：

$$f(x, w)=\mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle+h(\bar{y})-h(x)$$

因为$T(\bar{y})$是紧集，所以对每个固定的$x\in X$，可知$w\mapsto f(x, w)$在紧凸集$T(\bar{y})$上连续且为仿射泛函，而对每个固定的$w\in T(\bar{y})$，$x\mapsto f(x, w)$在凸集X上是凹泛函，根据Kneser极大极小定理[19]有，

$$\inf_{w\in T(\bar{y})}\sup_{x\in X}[\mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle+h(\bar{y})-h(x)]$$

$$=\sup_{x\in X}\inf_{w\in T(\bar{y})}[\mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle+h(\bar{y})-h(x)]\leqslant 0$$

又因为$T(\bar{y})$是紧的，所以存在$\bar{w}\in T(\bar{y})$使

$$\sup_{x\in X}[\mathrm{Re}\langle\bar{w}, \bar{y}-x\rangle+h(\bar{y})-h(x)]$$

$$=\inf_{w\in T(\bar{y})}\sup_{x\in X}[\mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle+h(\bar{y})-h(x)]$$

因此，存在$\bar{y}\in K$，$\bar{w}\in T(\bar{y})$，使

$$\mathrm{Re}\langle\bar{w}, \bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y}) \qquad \forall x\in X$$

证毕

注5 定理6将[5]中的相应结果在更一般的情况下推广到X是非紧集的情况．

定理7 设E是Φ上的局部凸的Hausdorff拓扑向量空间，F是Φ上的向量空间，X是E的非空凸子集，C是X的非空紧子集，$\langle\,,\,\rangle: F\times E\to\Phi$是双线性泛函且对每个$f\in F$，映射$x\to\langle f, x\rangle$在$X$上连续．又设

(1) $S: X\to 2^X$上半连续，对$\forall x\in X$，$S(x)$是C中的闭凸子集；

(2) $h: X\to R$是下半连续的凸泛函；

(3) $T: X\to 2^F$沿X中的线段关于F的$\sigma(F, E)$拓扑下半连续，对每个$y\in X$，

$$\{x\in X: \sup_{u\in T(x)}\mathrm{Re}\langle u, y-x\rangle+h(y)-h(x)>0\}$$

$$\subset\{x\in X:\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)>0\}$$

（4） 对每个$z\in X$，存在$x_z\in X$，使

$$K_z=\{y\in X:\sup_{u\in T(x_z)}\mathrm{Re}\langle u,\ y-x_z\rangle+h(y)-h(x_z)\leqslant 0\}\subset S(z)$$

则存在$\bar{y}\in C$，使$\bar{y}\in S(\bar{y})$且

$$\sup_{w\in T(\bar{y})}\mathrm{Re}\langle w,\ \bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y})\qquad \forall x\in X$$

证明 对每个$z\in X$，$S(z)$是C中的非空紧集，从而$K_z\subset S(z)$是紧集. 由定理5，存在一点$\bar{y}_0\in K_z$使

$$\sup_{u\in T(\bar{y}_0)}\mathrm{Re}\langle w,\ \bar{y}_0-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y}_0)\qquad \forall x\in X$$

于是集合

$$\{y\in S(z):\sup_{x\in X}[\sup_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)]\leqslant 0\}$$

非空.

定义$F:X\to 2^X$如下，对$\forall z\in X$，

$$F(z)=\{y\in S(z):\sup_{x\in X}[\sup_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)]\leqslant 0\}$$

对每个给定的$z\in X$，由引理4，有

$$F(z)\supset\{y\in S(z):\sup_{x\in X}[\sup_{u\in T(x)}\mathrm{Re}\langle u,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)]\leqslant 0\}$$

反之，若$y\in F(z)$，则$y\in S(z)$且

$$\sup_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)\leqslant 0\qquad \forall x\in X$$

从而

$$\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\langle w,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)\leqslant 0\qquad \forall x\in X$$

由条件(3)有

$$\sup_{u\in T(x)}\mathrm{Re}\langle u,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)\leqslant 0\qquad \forall x\in X$$

所以，

$$y\in\{y\in S(z):\sup_{x\in X}[\sup_{u\in T(x)}\mathrm{Re}\langle u,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)]\leqslant 0\}$$

综上所述得，

$$F(z)=\{y\in S(z):\sup_{x\in X}[\sup_{u\in T(x)}\mathrm{Re}\langle u,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)]\leqslant 0\}$$

由条件(2)及对每个固定的f，$x\mapsto\langle f,\ x\rangle$在$X$上连续可知，$F(z)$是$X$中的闭凸集；再由$F(z)\subset S(z)\subset C$，而$C$是紧集[20，推论9]，若$F$有闭图象，则可知$F$是上半连续映射.

事实上，设$\{(z_\alpha,\ y_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}\subset \mathrm{graph}(F)=\{(z,\ y)\in X\times C:y\in F(z)\}$，$(z_\alpha,\ y_\alpha)\to(z_0,\ y_0)\in X\times C$，则有，$y_\alpha\in F(z_\alpha)$，从而$y_\alpha\in S(z_\alpha)$且

$$\sup_{x\in X}[\sup_{u\in T(x)}\mathrm{Re}\langle u,\ y_\alpha-x\rangle+h(y_\alpha)-h(x)]\leqslant 0$$

由于S是上半连续的，根据[22，定理1.1]，$y_0\in S(z_0)$，又因为$x\mapsto\langle u,\ x\rangle$在$X$上连续，$h$在$X$上下半连续，由[1，命题1,4,6]，

$$y\mapsto\sup_{x\in X}[\sup_{u\in T(x)}\mathrm{Re}\langle u,\ y-x\rangle+h(y)-h(x)]$$

是下半连续的. 从而有

$$\sup_{x\in X}[\sup_{u\in T(x)}\mathrm{Re}\langle u,\ y_0-x\rangle+h(y_0)-h(x)]\leqslant 0$$

故有$y_0\in F(z_0)$，从而$(z_0, y_0)\in \mathrm{graph}(F)$，即$F$有闭图象.

于是，由Himmelberg不动点定理(见[21])，存在$\bar{y}\in X$，使$\bar{y}\in F(\bar{y})$，即$\bar{y}\in S(\bar{y})$且

$$\sup_{w\in T(\bar{y})} \mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle+h(\bar{y})-h(x)\leqslant 0 \qquad \forall x\in X$$

因为$F(\bar{y})\subset C$，所以$\bar{y}\in C$.

证毕

定理8 设E是Φ上局部凸的Hausdorff拓扑向量空间，X是E的非空凸子集，C是X的非空紧子集，F是Φ上的向量空间，$\langle\ ,\ \rangle: F\times E\to\Phi$是双线性泛函，对每个$f\in F$，映射$x\mapsto\langle f, x\rangle$在$X$上连续. 又设

(1) $S: X\to 2^X$上半连续且对每个$x\in X$，$S(x)$是C的闭凸集；

(2) $h: X\to R$是下半连续的凸泛函；

(3) $T: X\to 2^F$沿X中的线段关于F的$\sigma(F, E)$拓扑下半连续，对每个$y\in X$，有

$$\{x\in X: \sup_{u\in T(x)} \mathrm{Re}\langle u, y-x\rangle+h(y)-h(x)>0\}$$
$$\subset\{x\in X: \inf_{w\in T(y)} \mathrm{Re}\langle w, y-x\rangle+h(y)-h(x)>0\}$$

则存在$\bar{y}\in C$，使$\bar{y}\in S(\bar{y})$且

$$\sup_{w\in T(\bar{y})} \mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y}) \qquad \forall x\in S(\bar{y})$$

证明 对每个$z\in X$，定义$G: X\to 2^X$如下，

$$G(z)=\{y\in S(z): \sup_{x\in S(z)}[\sup_{w\in T(y)} \mathrm{Re}\langle w, y-x\rangle+h(y)-h(x)]\leqslant 0\}$$

注意$S(z)\subset C$是紧凸集. 类似于定理7中的证明可得，

$$G(z)=\{y\in S(z): \sup_{x\in S(z)}[\sup_{u\in T(x)} \mathrm{Re}\langle u, y-x\rangle+h(y)-h(x)]\leqslant 0\}$$

任取$x_0\in S(z)$. 因为

$$y\mapsto \sup_{u\in T(x_0)} \mathrm{Re}\langle u, y-x_0\rangle+h(y)-h(x_0)$$

下半连续，所以

$$K=\{y\in S(z): \sup_{u\in T(x_0)} \mathrm{Re}\langle u, y-x_0\rangle+h(y)-h(x_0)\leqslant 0\}$$

是$S(z)$中的闭集从而也是紧集. 由定理5，存在$y_0\in K\subset S(z)$，使

$$\sup_{u\in T(y_0)} \mathrm{Re}\langle w, y_0-x\rangle+h(y_0)-h(x)\leqslant 0 \qquad \forall x\in S(z)$$

故$G(z)$是非空集. 再仿定理7的证明还可知，$G(z)$具紧凸值上半连续，由Himmelberg不动点定理(见[21]定理2)，存在$\bar{y}\in C$，使$\bar{y}\in G(\bar{y})$，即$\bar{y}\in S(\bar{y})$，且

$$\sup_{w\in T(\bar{y})} \mathrm{Re}\langle w, \bar{y}-x\rangle\leqslant h(x)-h(\bar{y}) \qquad 对\forall x\in S(\bar{y})$$

证毕

注6 定理8从多方面推广了[7]中的相应结果.

本文是作者在四川大学数学研究所访问期间完成的，作者感谢导师张石生教授的精心指导.

参 考 文 献

[1] 张石生，《变分不等式和相补问题理论及应用》，上海科技文献出版社 (1991).

[2] 夏道行、杨亚力，《线性拓扑空间引论》，上海科技出版社 (1986).

[3] Allen, G., Variational inequalities, complementarity problems, and duality theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, **58** (1977), 1—10.

[4] Bae, J.S., W.K. Kim and K.K. Tan, Another generalization of Ky Fan's minimax inquality and its applications. (submitted for publication)

[5] Browder, F.E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, *Math. Ann.*, **177** (1968), 283—301.

[6] Fan, K., Some properties of convex sets related to fixed point theorems, *Math. Ann.*, **266** (1984), 519—537.

[7] Shih, M.H. and K.K. Tan, Generalized quasi-variational inequalities in locally convex topological vector spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **108** (1985), 333—343.

[8] Shih, M.H. and K.K. Tan, A geometric property of convex sets with applications to minimax type ineqalities and fixed point theorems, *J. Austral. Math. Soc.*, Ser. A, **45** (1988), 169—183.

[9] Tan, K.K., Comparison theorems on minimax inequalities variational inequalities, and fixed point theorems, *J. London Math. Soc.*, **28** (1983), 555—562.

[10] Browder, F.E., A new generalization of the Schauder fixed point theorems, *Math. Ann.*, **174** (1967), 285—290.

[11] Shih, M.H. and K.K. Tan, Minimax inequalities and applications, *Contemp. Math.*, **54** (1986), 45—63.

[12] Hartman, P. and G. Stampacchia, On some nonlinear elliptic functional differential equations, *Acta Math.*, **115** (1966), 271—310.

[13] Kim, W.K. and K.K. Tan, A variational inequality in non-compact sets and its applications, *Bull Austral. Math. Soc.* (to appear)

[14] Ding, X.P., W.K. Kim and K.K. Tan, Equilibrum of non-compact generalized games with L-majorized preference correspondences, *J. Math. Anal. Appl.* (in Press)

[15] Ding, X.P. and K.K. Tan, Generalized variational inequalities and generalized quasi-variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **148** (1990), 497—508.

[16] Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill Inc. (1973).

[17] Shih, M.H. and K.K. Tan, Generalized bi-quasi-variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **143** (1989), 66—85.

[18] Aubin, J.P. and A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, New York (1984).

[19] Kneser, H., Sur un theoreme fondamental de la theorie des jeux, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **234** (1952), 2418—2420.

[20] Aubin, J.P. and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley-Interscience, New York (1984).

[21] Himmelberg, C.J., Fixed point of compact multifunction, *J. Math. Anal. Appl.*, **38** (1972), 205—207.

[22] Ma, T.W., Topological degree for set-valued compact vector field in local spaces, *Dissortations Math.*, **92** (1972), 1—43.

Generalized Variational Inequalities and Generalized Quasi-Variational Inequalities

Zhang Cong-jun

(Department of Mathematics, Huaibei Coal Teachers College, Huaibei, Anhui)

Abstract

Under much weaker hypotheses and in a more general setting some existence theorems of solutions to generalized variational inequalities and generalized quasi-variational inequalities and minimax inequalities are established. The results presented in this paper generalize the corresponding results of [3～13] to the non-compact case, thus improving these results.

Key words generalized variational inequality, quasi-variational inequality