应用数学和力学，第14卷第4期（1993年4月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

广义相对论的等效原理和经典力学方程的不变性*

梁天麟　周凌云

（昆明工学院，1992年8月5日收到）

摘　要

本文根据广义相对论中引力与惯性力的等效原理[3]，论证了经典力学非惯性系中的“惯性力”并非虚拟的力，而是非惯性系形成的加速度动空间场的场力，而且是有势力，是真实作用于作相对运动物体上的主动力．由此推出了非惯性系内的Lagrange等动力学基本方程，进而说明这些方程无论对惯性系还是非惯性系均普遍适用，它们具有不变性，并阐明了这种不变性对经典力学的理论及应用的意义．

关键词　相对运动　惯性力　广义力　不变性

一、引　言

用经典力学处理非惯性系内的动力学问题时，为使其满足牛顿定律的形式而引入了“惯性力”的概念，并强调这种“惯性力”是虚拟的而与达朗伯原理中的惯性力及真实的力有原则的区别．按广义相对论的思想：“加速场与引力场等效”，即惯性力与引力等效．可以证明：在引力场（或非惯性系形成的动空间场）内，粒子的动力学方程为[3]

$$m\frac{d^2x^2}{d\tau^2}+m\Gamma^i_{KL}\frac{dx^K}{d\tau}\frac{dx^L}{d\tau}=F_i \tag{1.1}$$

式中$d^2x^2/d\tau^2$为四维加速度，F_i为引力场以外的各种力，而$-m\Gamma^i_{KL}\dot{x}^K\dot{x}^L$即代表包含“惯性力”在内的引力（引力与惯性力无法区别），它们是场对粒子的作用．其中

$$\Gamma^i_{KL}=0.5g^{iu}(g^{uL\cdot K}+g_{KL.u}-g_{KL.u}) \tag{1.2}$$

是与时空规度有关的时空张量．这说明，“惯性力”和引力一样都是场对物体的一种作用，与粒子所在点的时空性质（场的性质）密切相关，因而都是场力，是真实作用于在场中运动的物体上的主动力．继而，用此观点来处理经典力学中的相对运动问题发现，它不仅在理论上是先进的，而且在应用上也是简明而有效的．

虽从广义相对论得知，惯性力与引力等效，但为了得到“惯性力”确是一种场力而且是有势力的结论，还需予以严格的证明．

---

* 王洪纲推荐．
1990年2月15日第一次收到．

二、非惯性系中"惯性力"有广义势的证明

从经典力学的角度，设非惯性系（载体）上的一点相对惯性系的加速度为 $\boldsymbol{a}_0(t)$，非惯性相对惯性系的角速度为$\boldsymbol{\omega}(t)$，则被载体任意一点所受的"惯性力"为：

$$\boldsymbol{F}_{iI}=-m_i\boldsymbol{a}_0-m_i\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_i-m_i\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)-2m_i\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_i \tag{2.1}$$

现证明，对$\boldsymbol{F}_{iI}$存在如下含速度矢的广义势

$$V_I=\sum_i\left[m_i\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{r}_i-\frac{1}{2}m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)^2-m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\right] \tag{2.2}$$

使得

$$\boldsymbol{F}_{iI}=-\frac{\partial V_I}{\partial\boldsymbol{r}_i}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_I}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}\right) \tag{2.3}$$

或使其广义力为

$$Q_{jI}=-\frac{\partial V_I}{\partial q_j}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_I}{\partial\dot{q}_j}\right) \tag{2.4}$$

证明

$$\begin{aligned}-\frac{\partial V_I}{\partial\boldsymbol{r}_i}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_I}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}\right)&=-\nabla_iV_I+\frac{d}{dt}\nabla_{v_i}V_I\\&=-m_i\nabla_i(\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{r}_i)+\frac{1}{2}m_i\nabla_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)^2+m_i\nabla_i[(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i]\\&\quad-m_i\frac{d}{dt}\nabla_{v_i}[(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i]\end{aligned} \tag{2.5}$$

其中

$$\begin{aligned}\nabla_i(\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{r}_i)&=\boldsymbol{a}_0\times(\nabla_i\times\boldsymbol{r}_i)+\boldsymbol{r}_i\times(\nabla_i\times\boldsymbol{a}_0)+(\boldsymbol{a}_0\cdot\nabla_i)\boldsymbol{r}_i+(\boldsymbol{r}_i\cdot\nabla_i)\boldsymbol{a}_0\\&=(\boldsymbol{a}_0\cdot\nabla_i)\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{a}_0\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\nabla_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)^2&=\nabla_i[(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)]\\&=2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\times[\nabla_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)]+2[(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot\nabla_i](\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\\&=2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\times[(\boldsymbol{r}_i\cdot\nabla_i)\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{r}_i(\nabla_i\cdot\boldsymbol{\omega})-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_i)\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{\omega}(\nabla_i\cdot\boldsymbol{r}_i)]\\&\quad+2[(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)_x\partial/\partial x_i+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)_y\partial/\partial y_i+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)_z\partial/\partial z_i]\\&\quad\cdot[\boldsymbol{i}(z_i\omega_y-y_i\omega_z)+\boldsymbol{j}(x_i\omega_z-z_i\omega_x)+\boldsymbol{k}(y_i\omega_x-x_i\omega_y)]\\&=2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\times[\boldsymbol{\omega}(\nabla_i\cdot\boldsymbol{r}_i)-(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla_i)\boldsymbol{r}_i]+2\boldsymbol{i}[\omega_y(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)_z\\&\quad-\omega_z(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)_y]+2\boldsymbol{j}[\omega_z(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)_x-\omega_x(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)_z]\\&\quad+2\boldsymbol{k}[\omega_x(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)_y-\omega_y(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)_x]\\&=2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\times(3\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega})+2\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)=-2\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}&\nabla_i[(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i]=\nabla_i[(\dot{\boldsymbol{r}}_i\times\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{r}_i]\\&\quad=(\dot{\boldsymbol{r}}_i\times\boldsymbol{\omega})\times(\nabla_i\times\boldsymbol{r}_i)+\boldsymbol{r}_i\times[\nabla_i\times(\dot{\boldsymbol{r}}_i\times\boldsymbol{\omega})]+[(\dot{\boldsymbol{r}}_i\times\boldsymbol{\omega})\cdot\nabla_i]\boldsymbol{r}_i\\&\qquad+(\boldsymbol{r}_i\nabla_i)(\dot{\boldsymbol{r}}_i\times\boldsymbol{\omega})\\&\quad=[(\dot{\boldsymbol{r}}_i\times\boldsymbol{\omega})\cdot\nabla_i]\boldsymbol{r}_i=\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{\omega}\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}&\nabla_{v_i}[(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i]=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\times(\nabla_{v_i}\times\dot{\boldsymbol{r}}_i)+\dot{\boldsymbol{r}}_i\times[\nabla_{v_i}\times(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_i)]\\&\qquad+[(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot\nabla_{v_i}]\dot{\boldsymbol{r}}_i+(\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\nabla_{v_i})(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\\&\quad=[(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)\cdot\nabla_{v_i}]\dot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i\end{aligned}$$

将(2.6)、(2.7)、(2.8)、(2.9)式代入(2.5)式得

$$-\frac{\partial V_I}{\partial \boldsymbol{r}_i}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_I}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\right)=-m_i\boldsymbol{a}_0+\frac{1}{2}m_i[-2\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)]$$

$$+m_i\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{\omega}-m_i\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)$$

$$=-m_i\boldsymbol{a}_0-m_i\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_i-m_i(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i))-2m_i\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_i$$

$$=\boldsymbol{F}_{iI}$$

即

$$\boldsymbol{F}_{iI}=-\frac{\partial V_I}{\partial \boldsymbol{r}_i}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_I}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\right)$$

这就是所要证明的。它说明了，在相对运动中的“惯性力”，确是一种有势力，因而它是使场中物体运动的主动力。

三、关于动力学的基本方程

据上节的论证，设质点在通常力的作用下相对非惯性系运动，此时还受到非惯性系的场力作用，则根据牛顿第二定律，质点相对于动系的运动方程为

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{ir}=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{F}_{ie}+\boldsymbol{F}_{ik}=\sum\boldsymbol{F}^*_{ir} \tag{3.1}$$

与传统的方程原则的差异在于牵连“惯性力”$\boldsymbol{F}_{ie}$及哥氏“惯性力”$\boldsymbol{F}_{ik}$并非虚拟的“修正项”或“表现力”，而是真实的主动场力，因而质点系的相对运动达朗伯原理为：

$$\sum_i\boldsymbol{F}^*_{ir}-\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{ir}=0 \tag{3.2}$$

它与传统的达朗伯原理的原则区别是将其中的$(-\sum m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{ir})$定义为惯性力。

质点系的虚位移原理为

$$\sum_i\boldsymbol{F}^*_{ir}\cdot\delta\boldsymbol{r}_{ir}=0 \tag{3.3}$$

质点的动力学普遍方程为

$$\sum_i(\boldsymbol{F}^*_{ir}-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_{ir})\cdot\delta\boldsymbol{r}_{ir}=0 \tag{3.4}$$

从而将动力学的基本原理在绝对运动和相对运动中统一了起来，因而从(3.1)式到(3.4)式中的各量均是相对于所论的坐标系而言的。特殊地，若所论的坐标系为惯性系，则$\boldsymbol{r}_{ir}$蜕化为第i质点的绝对矢径$\boldsymbol{r}_i$，而$\sum\boldsymbol{F}^*_{ir}$蜕化为普通的力$\sum\boldsymbol{F}_i$。

四、关于不变性的应用

作为例子，现用不变性得到相对运动中的完整系统的Lagrange型方程及非完整系统的Appell 型等方程。按照传统的理论和方法在推导这些方程时，因为“惯性力”是“虚拟的力”，不得不用相对运动中的量来表示绝对运动的量，不得不引入很多相应的名词、概念和进行冗长的数学演绎[1]，而利用不变性就可避开上述的麻烦，在一般情况下可由绝对运动方程直接得到。首先我们来得出相对运动中的Lagrange型方程。

据不变性，利用传统的绝对运动 Lagrange 方程，不用推导就可将相对运动的 Lagrange型方程的一般形式写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T_r}{\partial q_j}=Q_{jr} \tag{4.1}$$

它的主要特点是：它和绝对运动中Lagrange方程不但具有完全相同的形式，而且还有相同的物理意义。即等号左边是广义惯性力，而右边是包括惯性场力在内的广义主动力。式中各量均是相对所论坐标系的量。为了(4.1)式的应用方便，只需将(2.1)式代入得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T_r}{\partial q_j}=\sum_i[\boldsymbol{F}_i+(-m_i\boldsymbol{a}_0-m_i\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_{ir}-m_i\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{ir})$$
$$-2m_i\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_i]\frac{\partial \boldsymbol{r}_{ir}}{\partial q_j} \tag{4.2}$$

(4.2)式右边的$\sum\boldsymbol{F}_i$是通常的力，其余各项是所论坐标系的场力——传统的“惯性力”。若令(4.2)中

$$\left.\begin{aligned}&\sum_i \boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{ir}}{\partial q_j}=Q_j,\quad \Pi^0=\left(-\sum_i m_i\boldsymbol{a}_0\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{ir}}{\partial q_j}\\&\Pi^{\omega}=\left(-\sum_i m_i\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{ir})\right)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{ir}}{\partial q_j},\quad Q_j^{\dot{\omega}}=-\sum_i(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times m_i\boldsymbol{r}_{ir})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{ir}}{\partial q_j}\\&\Gamma_j=-\sum m_i(2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_{ir})\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_{ir}}{\partial q_j}\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

其中Π^0，Π^{ω}中 $\boldsymbol{r}/\ q_j$前的系数不含$\dot{q}_j$，则(4.2)最后写成

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T_r}{\partial q_j}=Q_j-\frac{\partial}{\partial q_j}(\Pi^0+\Pi^{\omega})+Q_j^{\dot{\omega}}+\Gamma_j \tag{4.4}$$

(4.4)式即为相对运动中Lagrange型方程．从中可看出：若按传统的方法推得此方程[1]，必须用相对的q_i及$\dot{q}_j$表示绝对动能，并同时引入牵连动能、相对动能、混合动能等概念，最后又转变为各种“惯性力”、“广义惯性力”的概念，这将是一个较为复杂的理论叙述及数学演绎过程。

下面再由不变性直接从惯性系中的非完整系统运动方程得到相对运动中的非完整系统的运动方程．若设被载体受有形如$f_\beta(q_j,\dot{q}_j,t)=0$的$g$个非线性非完整约束，而虚位移满足条件

$$\sum_j\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j=0$$

则据系统在惯性系中带乘子λ_β的Routh方程

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\sum_\beta\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_j} \tag{4.5}$$

考虑到被载体还受载体场力的作用，据不变性则可将其相对运动的 Routh 型方程直接写出

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j+\sum\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial}{\partial q_j}(\Pi^0+\Pi^{\omega})+Q_j^{\dot{\omega}}+\Gamma_j \tag{4.6}$$

而无需去作复杂的理论陈述及数学推导[2]。

当然，据同样的理由可将绝对运动的非完整系统的Appell方程

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j}=Q_j+\sum_\beta\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_j}$$

改写成相对运动中非完整系统的Appell型方程，即

$$\frac{\partial S_r}{\partial \ddot{q}_j}=Q_j-\frac{\partial}{\partial q_j}(\Pi^0+\Pi^{\omega})+Q_j^{\dot{\omega}}+\Gamma_j+\sum_\beta\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_j} \tag{4.7}$$

也无需再由绝对加速度能 S 经过麻烦的理论叙述和数学推导转化为相对加速度能 S_r 来得到(4.7)式[2]等等。

作为在工程实践中经常碰到的载体以匀角速绕定轴转动的情形，注意到$a_0=\dot{\omega}=\Pi^0=Q_j^{\dot{\omega}}=\Gamma_j=0$且此时

$$\Pi^{\omega}=-\sum m_i\omega\times(\omega\times r_{ir})\cdot\frac{\partial r_{ir}}{\partial q_j}=\left(-\frac{1}{2}\omega\cdot\theta^0\cdot\omega\right)\frac{\partial r_{ir}}{\partial q_j}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2}\omega^2\sum m_i(x_{ir}^2+y_{ir}^2)\right)$$

则(4.4)式成为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T_r}{\partial q_j}=Q_j-\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\frac{1}{2}\omega^2\sum m_i(x_{ir}^2+y_{ir}^2)\right] \tag{4.8}$$

其中θ^0为系统对与动系相固连的坐标系原点O的惯性张量，而$\sum m_i(x_{ir}^2+y_{ir}^2)$即对转轴的转动惯量。

在解决相对运动的实际问题时，不少经典著作曾指出，可以直接用绝对运动中的Lagrange等方程而不用考虑“惯性力”（即所论的有势场力）。据同样的理由，这样做要比一开始就考虑非惯性系的有势场力而直接利用上述所得的公式要麻烦得多，这是显而易见的。

五、结　　语

（1）本文根据广义相对论的思想，放弃了经典力学相对运动中的“惯性力”概念而代之以主动有势场力的概念。与此同时，将相对运动中的惯性力定义为系统相对动系的各质点的质量与加速度乘积的矢量和冠以负号。这样就把相对静系和动系的惯性力统一起来，得到惯性力的不变性。继而就可用统一的观点来叙述和处理与惯性力密切相关的力学理论，从而得到经典力学方程在绝对和相对运动中的不变性。因而可使力学原理具有更高的概括性、更大的普遍性，增强了力学的科学审美性。

（2）利用不变性，无论对力学的理论还是对解决力学的实际问题，尤其是对力学理论的叙述、公式的推导，显得特别简便、有效。这无疑对力学理论的学习和研究都是有益的。

考 考 文 献

[1] 梅凤翔，《分析力学基础》，西安交通大学出版社，西安（1987）.
[2] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社，北京（1985）.
[3] Bergmann, P. G., *Introduction to the Theory of Relativity*, New York (1958).

Principle of Equal Effects of General Relativity and Invariance of Classical Mechanics Equations

Liang Tian-lin　　Zhou Ling-yun
(Kunming Institute of Technology, Kunming)

Abstract

This paper gives the proof that the "inertia forces" in a noninertial system are not fabricated forces, but potential forces which actually act on the objects in motion in the acceleration field, according to the equivalent principle between gravitation and inertial forces in the theory general relativity. Further, the invariance of kinetical equation is illuminated.

Key words relative motion, inertia force, generalized force, invariance