

改进的预处理共轭斜量法及其 在工程有限元分析中的应用*

郑 宏 葛修润

(中国科学院武汉岩土力学研究所, 1992年5月30日收到)

摘 要

本文就预处理共轭斜量法(PCCG法)给出了两个具有理论和实际意义的定理, 它们分别讨论了迭代解的定性性质和迭代矩阵的构造原则. 作者提出了新的非 M -矩阵的不完全LU分解技术和迭代矩阵的构造方法. 用此改进的PCCG法, 对病态问题和大型三维有限元问题进行了计算并与其他方法作了对比, 分析了PCCG法在求解病态方程组时的反常现象. 计算结果表明本文建议的方法是求解大型有限元方程组和病态方程组的一种十分有效的方法.

关键词 预处理共轭斜量法 有限元 病态问题

一、引 言

设系统的有限元方程组为:

$$Kp=q \quad (1.1)$$

其中 K 为 n 阶对称正定矩阵, p 和 q 分别是 n 阶节点位移和节点力向量.

目前求解(1.1)的最普遍的方法是直接法. 直接法虽有其优越性, 但是当问题的规模很大时, 特别是对于岩土工程的三维有限元分析时, 直接法求解常常需要很大的存贮空间和运算量, 因而其运算效率就是一个严重的问题. 迭代法的优点是完全不受带宽的限制, 能有效地利用计算机的内存空间, 因而目前迭代法在国际上又受到了应有的重视^[1].

众所周知, 从理论上讲, 共轭斜量法(CG法)能在有限次迭代中取得方程组的精确解, 然而CG法对于计算过程中的舍入误差相当敏感, 以至于往往得不到满意的结果. 正因如此近年来一些学者对CG法采取了一系列改进措施, 其中比较成功的就是先对系数矩阵 K 进行预处理后再引用CG法, 即所谓预处理共轭斜量法(PCCG法). 在PCCG法中要涉及迭代矩阵的构造问题. 迭代矩阵选取的好坏直接影响到收敛速度. 在有限元分析中的PCCG法中, 最著名要数Hughes等人给出的Element-by-Element法^[3]. 然而我们的计算实践表明, 这一方法不仅计算效率低, 而且收敛速度也很慢. 本文在构造迭代矩阵时, 对Jennings的工作^[4]在技术上作了改进, 算例表明这些改进是富有成效的.

* 钱伟长推荐.

二、PCCG法的迭代格式

在对方程组(1.1)进行预处理后所得到的PCCG的迭代格式^[2]为:

给定 p_0 , 令 $\beta_0=0$, 对于 $i=0, 1, 2, \dots$

$$p_{i+1} = p_i + \eta_i \delta_i \quad (2.1a)$$

$$\delta_i = r_i + \beta_i \delta_{i-1} \quad (2.1b)$$

$$r_i = -K_a^{-1} g_i \quad (2.1c)$$

$$\eta_i = -\frac{\delta_i^T g_i}{\delta_i^T K \delta_i} \quad (2.1d)$$

$$\beta_i = -\frac{r_i^T K \delta_{i-1}}{\delta_{i-1}^T K \delta_{i-1}} \quad (2.1e)$$

式中 K_a 为 n 阶对称正定矩阵, 我们称之为迭代矩阵, δ_i 是方向向量, g_i 是非平衡力向量, 定义为:

$$g_i = K p_i - q \quad (2.1f)$$

由 (2.1c) 可见: 在每一步迭代过程中, 都要解方程:

$$K_a r_i = -g_i \quad (2.2)$$

因此应要求 K_a^{-1} 易求.

三、与PCCG法有关的几个定理

为节省篇幅, 对于下面给出的几个引理, 我们都未加证明, 其证明方法类似于文献[2].

引理1 (正交性) 由格式(2.1)所得到的一系列非平衡力向量 $\{g_i\}$, 方向向量 $\{\delta_i\}$ 满足:

$$g_i^T K_a^{-1} g_j = 0 \quad \text{当 } i \neq j \quad (3.1a)$$

$$\delta_i^T K \delta_j = 0 \quad \text{当 } i \neq j \quad (3.1b)$$

$$\delta_i^T g_j = 0 \quad \text{当 } i < j \quad (3.1c)$$

由 (3.1a) 可知格式(2.1)可在不超过 n 次迭代中取得方程组的精确解.

为了讨论迭代解的定性性质, 我们引入矩阵 S

$$S = K_a^{-1} K \quad (3.2)$$

在经过 $l+1$ 次迭代后, 可得到 $n \times (l+1)$ 阶矩阵:

$$\psi = [r_0 \ S r_0 \ S^2 r_0 \ \dots \ S^l r_0] \quad (3.3)$$

定理1 (解的定性性质) 由格式(2.1)给出的第 $l+1$ 次迭代解 p_{l+1} 将位于 $p_0 + \text{span} \psi$ 这个超平面内, 特别地, 当取 $p_0=0$ 时, 有 $p_{l+1} \in \text{span} \psi$. ($\text{span} \psi$ 表示由 ψ 的 $l+1$ 个 n 维列向量 $\{S^j r_0\}_{j=0}^l$ 所张成的一个线性子空间).

证明 用 K 左乘 (2.1a) 式后两端再同时减去向量 q 得:

$$g_{i+1} = g_i + \eta_i K \delta_i \quad (3.4)$$

用 $-K_a^{-1}$ 左乘上式并注意到 (3.2) 式得:

$$r_{i+1} = r_i - \eta_i S \delta_i \quad (3.5)$$

当 $i=0$ 时:

$$r_1 = r_0 - \eta_0 S \delta_0 = (I - \eta_0 S) r_0$$

当 $i=1$ 时:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 - \eta_1 S \delta_1 = \{I - S[(\eta_0 + \eta_1 + \eta_1 \beta_1)I - \eta_0 \eta_1 S]\} r_0 \\ &= [I - SF^{(1)}(S)] r_0 \end{aligned}$$

用归纳法, 当 $i=l$ 时:

$$r_{l+1} = [I - SF^{(l)}(S)] r_0 \quad (3.6)$$

式中:

$$F^{(l)}(S) = \sum_{j=0}^l \lambda_j^{(l)} S^j \quad (3.7)$$

是 S 的一个 l 次多项式, $\{\lambda_j^{(l)}\}_{j=0}^l$ 是由 $\{\eta_j\}_{j=0}^l$ 和 $\{\beta_j\}_{j=0}^l$ 所决定的系数. 由式(2.2),

$$r_{l+1} = -K_a^{-1} g_{l+1} = K_a^{-1} (q - K p_{l+1}) = K_a^{-1} K (p_l - p_{l+1}) = S (p_l - p_{l+1}) \quad (3.8)$$

$$r_0 = S (p_l - p_0) \quad (3.9)$$

这里 p_l 是方程组 (1.1) 的精确解. (3.8)~(3.9) 得:

$$r_{l+1} = r_0 - S (p_{l+1} - p_0) \quad (3.10)$$

又由(3.6)、(3.10)得:

$$p_{l+1} = p_0 + F^{(l)}(S) r_0 \quad (3.11)$$

若记:

$$\psi = [r_0 \quad S r_0 \quad S^2 r_0 \quad \dots \quad S^l r_0]$$

则(3.11)可表示成

$$p_{l+1} = p_0 + \psi \lambda^{(l)} \quad (3.12)$$

其中 $\lambda^{(l)}$ 是由 $\{\lambda_j^{(l)}\}_{j=0}^l$ 所组成的一个 $l+1$ 维向量. 上式表明第 $l+1$ 步迭代的近似解 p_{l+1} 将位于 $p_0 + \text{span} \psi$ 这个超平面内. 证毕.

为了衡量解的误差, 我们引入下列误差函数:

$$E(p_{l+1}) = \frac{1}{2} (p_l - p_{l+1})^T K (p_l - p_{l+1}) \quad (3.13)$$

由(3.8)到(3.11)式得:

$$p_l - p_{l+1} = [I - SF^{(l)}(S)] \varepsilon_0 \quad (3.14)$$

这里 $\varepsilon_0 = p_l - p_0$, 因此,

$$E(p_{l+1}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0^T [I - SF^{(l)}(S)]^T K [I - SF^{(l)}(S)] \varepsilon_0 \quad (3.15)$$

上式说明 E 是 l 次多项式 $F^{(l)}(S)$ 的一个二次能量泛函. 若记 $\mathcal{F}^{(l)}$ 为所有 l 次多项式的全体, 则当 $F^{(l)}$ 取不同的多项式时, 就会得到不同的误差, 然而由引理 1 可以证得:

引理 2 (极小值原理) 由 PCCG 法所给出的多项式 $F^{(l)}(S)$ 使得误差泛函 E 取极小值, 即:

$$E(p_{l+1})|_{\text{PCCG}} = \min_{F^{(l)} \in \mathcal{F}^{(l)}} \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon_0^T [I - SF^{(l)}(S)]^T K [I - SF^{(l)}(S)] \varepsilon_0 \right\} \quad (3.16)$$

有了上述引理, 我们可以得到:

定理 2 若矩阵 $S = K_a^{-1} K$ 仅有 r 个彼此不同的特征值, 则 PCCG 的迭代格式 (2.1) 可在不超过 r 次迭代中取得方程组 (1.1) 的精确解.

证明 因为 K_a 和 K 都是正定对称的, 所以存在非奇异矩阵 Q 和 R , 使得

$$K_a = Q^T Q, \quad K = R^T R \quad (3.17)$$

从而

$$S = K_a^{-1} K = (Q^{-1} Q^{-T})(R^T R) = Q^{-1} [(RQ^{-1})^T (RQ^{-1})] Q$$

即 S 相似于对称正定矩阵 $(RQ^{-1})^T (RQ^{-1})$, 所以 S 的特征值都是正数.

不妨设 S 的彼此不同的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r (r < n)$, 由 λ -矩阵理论知 S 的最小多项式为:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \prod_{i=1}^r (\lambda_i - \lambda) = C \prod_{i=1}^r (1 - \lambda/\lambda_i) \\ &= C [1 - \lambda \bar{F}^{(r-1)}(\lambda)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

式中 $C = \prod_{i=1}^r C_i$, $\bar{F}^{(r-1)}(\lambda)$ 是 λ 的一个 $r-1$ 次多项式. 再由 Cayley-Hamilton 定理知 S 满足

$$\varphi(S) = C [I - S \bar{F}^{(r-1)}(S)] = 0 \quad (3.19)$$

根据 (3.11), 若取

$$p_r = p_0 + \bar{F}^{(r-1)}(S) r_0 \quad (3.20)$$

则由 (3.16) 知 p_r 的误差 $E(p_r) = 0$, 即 p_r 是方程组 (1.1) 的精确解. 但由引理 2 知格式 (2.1) 所给出的多项式 $F^{(r-1)}(S)$ 在同类多项式中使误差泛函取极小, 故可以说 PCCG 法可在 r 步内取得小的精确解. 证毕.

四、关于迭代矩阵 K_a 的构造方法

由定理 2 可知在构造 K_a 时, 原则上应使 $K_a^{-1} K$ 离散的特征值尽可能地少, 但是考虑到 K_a 的存贮及方程组 (2.2) 求解的简易性, 又要使 K_a 易于分解.

目前在有限元法中, 构造 K_a 的最著名的方法是 Hughes (1983) 提出的 Element-by-Element 法^[9], 这一方法是在单元一级完成对 K_a 的构造的, 其基本思想是使 K_a 充分近似于 K , K_a 的表达式为

$$K_a = D_s^{1/2} \left[\prod_{e=1}^{n_e} (L_e D_e L_e^T) \right] D_s^{1/2} \quad (4.1)$$

式中, n_e 为系统内的单元总数, D_s 是由 K 的对角元所组成的对角阵, $L_e D_e L_e^T$ 是单元 e 的 $(I + \Delta K_e^*)$ 的 Cholesky 分解, 即

$$I + \Delta K_e^* = L_e D_e L_e^T \quad (4.2)$$

$$\text{而} \quad \Delta K_e^* = D_s^{-1/2} \Delta K_e D_s^{-1/2} \quad (4.3)$$

其中 ΔK_e 是令单元 e 的刚度矩阵 K_e (阶数扩张到 n) 的对角元为零后所得到的矩阵.

由 (4.1) 可见 K_a 是在单元一级完成其构造的, 然而我们的计算结果发现 Element-by-Element 法有如下几个缺点:

1) 在求解 $K_a r = -g$ 时, 需对单元进行循环, 且每个循环体内都包括向后和向前回代, 因此, 当单元数较多时, 完成 PCCG 的一次迭代就需要较长的机时;

2) 由 (4.1) 可见, 在求解 $K_a r = -g$ 时, 需进行频繁的内/外交换, 从而降低了求解效率;

3) 我们的算例表明, Element-by-Element法的收敛速度有时是很慢的。

我们认为造成3)的原因是系统内存在某些单元其 $I + \Delta K$ 非正定, 从而破坏了 K_0 的正定性, 而由引理1可知当且仅当 K_0 正定时, 才能保证格式(2.1)收敛到真解。

本文是基于下面两个引理及Jennings的工作^[4]来构造 K_0 的。

引理3 (Cholesky分解) 设 K 为正定对称矩阵, 则 K 存在分解

$$K = U^T U$$

其中 U 是上三角矩阵, 对于 $i=1, 2, \dots, n-1$,

$$U_{ij} = 0 \quad \text{当 } i > j$$

$$U_{ii} = \left\{ K_{ii} - \left[\sum_{l=1}^{i-1} U_{il}^2 \right]_{i,i} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$U_{ij} = \left\{ K_{ij} - \left[\sum_{l=1}^{i-1} U_{il} U_{lj} \right]_{i,j} \right\} / U_{ii} \quad (j=i+1, \dots, n)$$

如果按照程序惯例可将上式改造成下式:

对于 $i=1, 2, \dots, n-1; j=i+1, \dots, n$

$$U_{ij} = K_{ij} - \left[\sum_{l=1}^{i-1} U_{il} U_{lj} \right]_{i,j} \quad (4.4a)$$

$$U_{ii} = \left\{ K_{ii} - \left[\sum_{l=1}^{i-1} U_{il}^2 \right]_{i,i} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.4b)$$

$$U_{ij} = U_{ij} / U_{ii} \quad (4.4c)$$

与一般的LU分解过程不同的是上述分解法是按照行的顺序形成矩阵 U 的(见图1)。

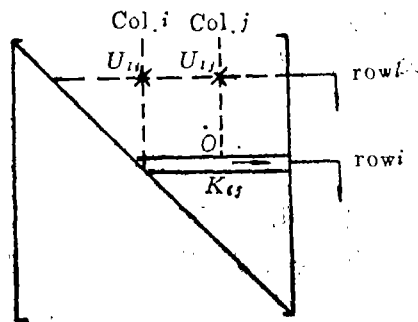


图1 按行序形成 U_{ij}

引理4 (不完全LU分解法) 设 K 是对称正定的, 则 K 存在分解

$$K = U^T U + R \quad (4.5)$$

其中 U 是非奇异的上三角矩阵, 且 U 的结构可由某一规则 \mathcal{J} 来决定。

Jennings证明^[4]当按下述规则 \mathcal{J} 对非 M -矩阵 K 施以不完全分解时, $U^T U$ 的最小特征值不小于 K 的最小特征值。设 $\theta \in [0, 1]$ 为某一给定的正数。

1) 利用(4.4a)修改 K 中的第 i 行, 若修改后的元素 U_{ij} 满足

$$|U_{ij}|^2 < \theta K_{ii} K_{jj} \quad (4.6)$$

则计算

$$t = U_{ii} / U_{jj} \quad (4.7a)$$

$$U_{ii} = U_{ii} + \sqrt{t} |U_{ij}| \quad (4.7b)$$

$$U_{jj} = U_{jj} + \frac{1}{\sqrt{t}} |U_{ij}| \quad (4.7c)$$

然后令 $U_{ij} = 0$ (我们称元素 (i, j) 牺牲了), 若 U_{ij} 不满足(4.6), 则保留 U_{ij} 并修改本行内的下一元素 $K_{i,j+1}$ 。注意在(4.6)和(4.7)诸式中的 U_{ii} , U_{jj} 和 U_{ij} 是分解过程中的当前值;

2) 经步骤1)将第 i 行的所有元素都修改完毕后, 由于牺牲掉的元素对 K_{ii} 作了贡献, 所以应按(4.4b)将 K_{ii} 修改成 U_{ii} ;

3) 由 (4.4c) 对第 i 行再作一次调整, 注意牺牲掉的元素已不复存在。

在上述过程中, θ 决定了 U 中非零元素的数目, 若 θ 较小则 U 就较稠密, 反之 U 就较稀疏。特别地, 当取 $\theta=0$ 时, 将相当于完全 LU 分解, 而取 $\theta=1$ 则将牺牲所有的非对角元而使 U 为一对角阵。我们认为在实际计算中, 应根据计算机内存的大小及问题的病态性质来选择 θ 值。

算法 \mathcal{L} 的一个不足之处是: 若分解前第 i 行带宽内的某一元素 $K_{ij}=0$, 分解后 (即经步骤 1) 所产生的 $U_{ij} \neq 0$, 且 U_{ij} 不满足 (4.6) 式, 则根据算法 \mathcal{L} 的规定就应保留此新增的非零元素 U_{ij} , 这样就仍然存在着完全 LU 分解法中的非零填充问题。为了节约存贮空间, 简化方程 (2.2) 的求解, 我们在技术上对算法 \mathcal{L} 作如下改进:

i) 利用 (4.4a) 修改 K 中第 i 行, 如果修改前的某一元素 $K_{ij}=0$, 修改后所产生的元素 $U_{ij} \neq 0$, 则按 (4.7) 将 U_{ij} 对 U_{ii} 和 U_{ji} 作出贡献后, 牺牲掉该元素 U_{ij} ; 若 $K_{ij} \neq 0$, 则仍按算法 \mathcal{L} 的规定进行处理。

ii) 和 iii) 分别同原算法的 2) 和 3)。

本文用上述改进后的不完全 LU 分解法并取 $K_0 = U^T U$, 算例表明这种构造 K_0 的方法十分有效。这表现在 (1.1) 使 U 至少保持了原系数阵 K 中非零元素的分布结构, 且其半带宽不大于 K 的半带宽; (2.1) 简化了方程 (2.2) 的求解。

五、算 例

例1 Hilbert 病态问题

为了考核算法对病态方程组的数值稳定性, 我们以著名的 Hilbert 方程组:

$$Hx = b \quad (5.1)$$

作为算例, 其中:

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

若取 $b_i = \sum_{j=1}^n H_{ij}$, 则方程组 (5.1) 的真解为 $x_i = 1$ 。

Hilbert 矩阵的病态性是如此的严重, 以至于当用全主元高斯消元法去求解 (5.1) 时, 若取单精度字长运算, 当 $n > 6$ 时, 结果就严重失真, 采用双精度时, n 只能取到 11。

考虑到 H 的严重病态性, 我们取 $\theta=1$, 即使 $H_0 (=K_0)$ 为对角阵, 以减少分解及解方程 $H_0 r = -g$ 过程中有效位数的丢失。计算时我们取最大相对误差 $E^{(l)}$ 满足:

$$E^{(l)} = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|x_i - x_i^{(l)}|}{|x_i|} < 1\% \quad (5.2)$$

时终止迭代过程。此时解向量 $x^{(l)}$ 中各分量的有效数字的位数不低于 2。表 1 给出了 n 取不同阶数时单精度下的计算结果。

同样取最大相对误差为 1%, 而把精度改为双精度字长后, 计算结果如下:

当 $n \leq 60$ 时, 迭代次数 $l \leq 5$; 当 $70 \leq n \leq 240$ 时, $l=6$;

表1 单精度下 Hilbert 方程组的计算结果

阶数 n	迭代次数 l	相对误差 $E^{(l)}(\%)$	阶数 n	迭代次数 l	相对误差 $E^{(l)}(\%)$
5	34	0.99	21	9	0.99
10	5	0.57	22	92	0.92
15	7	0.86	23	16	0.96
20	21	0.99	24	97	0.99

当 $n=260$ 时, $l=36$; 当 $n=280$ 时, $l=12$; 当 $n=300$ 时, $l=16$.

由上述计算结果可以看出, 迭代次数 l 并不一定随着阶数 n 的增加而提高, 有时当 n 增加时, l 反而下降. 我们认为这种反常现象可由定理 2 来解释. 当 n 增加时, 虽然 H 矩阵的病态条件数急剧增大, 但是与 CG 法不同的是 PCCG 算法对其系数矩阵的病态条件数的依赖性不强, 决定 PCCG 法迭代次数应由矩阵 $S=H_0^{-1}H$ 的离散特征值数目来决定. 所以当 n 增加时, 虽然 H 的病态条件数增大了, 但是矩阵 S 的特征值分布可能还有所改善, 从而使其迭代次数不仅未随 n 的增大而提高, 反而有所下降. 这就是对上述结果中的反常现象的解释.

例2 工程病态问题

图 2 为一高弹模 ($E_1=10^6\text{MPa}$) 的基础作用于—软弱地基 ($E_2=10\text{MPa}$) 上. 若在基础和软基之间增设一层节理单元, 则无病态现象; 但是当基础与软基之间作为直接联接处理时, 则将产生严重病态的有限元方程组.

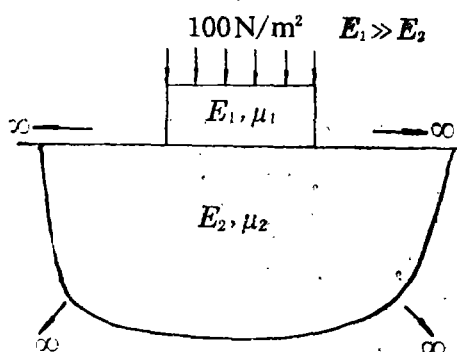


图2 基础与软基问题

今固结两种介质, 并用本文所建议的改进的 PCCG 算法来求解. 考虑到对称性仅取一半进行分析. 图 3 是网格图, 其中基础和接触区是 8 节点的二次等参元, 过渡区用 4—8 变节点的四边形单元和 3—6 变节点的三角形单元. 图 4 是网格变形图.

本例当将网格加密后, 即使一个四边形单元分裂成 4 个四边形单元, 一个三角形单元分裂成 4 个三角形单元, 结果是收敛的, 而采用直接法或当今比较流行的 SOR 法时结果却不收敛.

例3 大型岩体工程问题的实例^[7]

图 5 为位于湖北某地的一重力拱坝 (坝高 151m) 连同复杂地基的三维有限元计算模

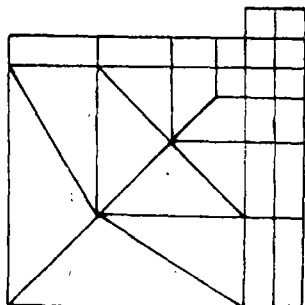


图3 例2中的网格图

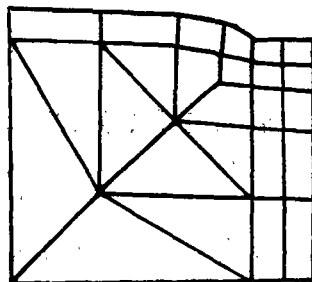


图4 例2的网格变形图

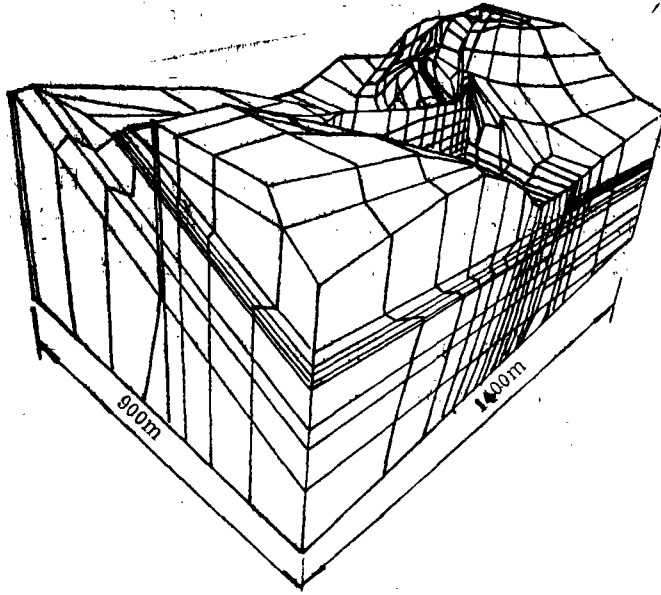


图5 某工程的有限元模型

型。模型东西长1400m，南北宽900m，高600m。模型中考虑了三条大断层和两条软弱夹层，共1428个8—20节点等参元，417个8—16节点的节理单元，节点总数为3280。

我们在带有加速板 (Definicon780+) 的 IBM/AT 微机上，分别用SOR法和本文建议的改进的PCCG法计算了本例。这里仅给出静水压力情况下两种方法的计算结果。取精度 ϵ_1 满足

$$\epsilon_1 = \frac{\|g_i\|_2}{\|q\|_2} < 4\%$$

时终止迭代过程。SOR法的迭代次数为2500次，机时为4.5小时，本文建议的PCCG法的迭代次数为393次，机时仅为1小时40分。在计算过程中，SOR的精度呈跳跃状，而PCCG法的精度则基本上是单调下降的。

图6给出了静水压力情况下此重力拱坝上、下游表面的主应力分布图。

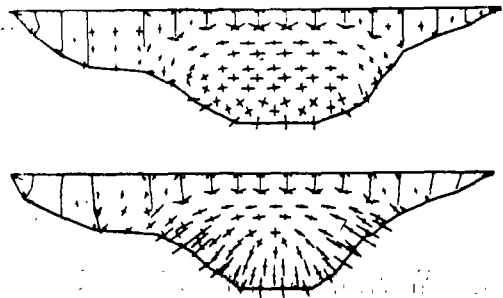


图6 重力拱坝的上下游表面的主应力分布图

六、结 论

通过上述分析，我们可以得出以下结论：

- (1) PCCG算法的迭代次数取决于矩阵 $S = K^{-1}K$ 的离散特征值数目和所给定的精度；
- (2) 改进的PCCG算法对于常见的病态问题有很强的求解能力；
- (3) 改进的PCCG法是在微、小型机上求解大型三维有限元方程组的一种十分有效的算法。

参 考 文 献

- [1] Purasinghe, R. and R. Muller, Improved iterative solution for finite element analysis on microcomputers, *Microcomputers in Civil Engineering*, 4(7) (1989), 91—97.
- [2] Crisfield, M. A., *Finite Element and Solution Procedures for Structural Analysis*, Vol. 1, Swansea, U. K. (1986), 197—223.
- [3] Hughes, T. J. R., An element-by-element algorithm for problems of structural and solid mechanics, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 36 (1983), 241—254.
- [4] Jennings, A., Development of an ICCG algorithm for large sparse systems, *Preconditioning Techniques in Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Ed. by D. J. Evans, Gordon and Breach, New York (1983), 426—438.
- [5] 蔡大用, 《数值代数》, 清华大学出版社 (1987).
- [6] 蒋尔雄, 《对称矩阵计算》, 上海科学技术出版社 (1984).
- [7] 杨家岭、郑宏、葛修润, 清江隔河岩重力拱坝坝体与复杂地基相互作用的三维有限元分析, 岩土力学, (4) (1989), 5—19.

Improved Preconditioned Conjugate Gradient Method and Its Application in F. E. A. for Engineering

Zheng Hong Ge Xiu-run

(Institute of Rock and Soil Mechanics, Academia Sinica, Wuhan)

Abstract

In this paper two theorems with theoretical and practical significance are given in respect to the preconditioned conjugate gradient method (PCCG). The theorems discuss respectively the qualitative property of the iterative solution and the construction principle of the iterative matrix. The authors put forward a new incompletely LU factorizing technique for non- M -matrix and the method of constructing the iterative matrix. This improved PCCG is used to calculate the ill-conditioned problems and large-scale three-dimensional finite element problems, and simultaneously contrasted with other methods. The abnormal phenomenon is analyzed when PCCG is used to solve the system of ill-conditioned equations. It is shown that the method proposed in this paper is quite effective in solving the system of large-scale finite element equations and the system of ill-conditioned equations.

Key words preconditioned conjugate gradient method, finite element, ill-conditioned problems