应用数学和力学，第14卷第4期（1993年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

在生物化学中布鲁塞尔振子极限环的渐近解

杨鸿春　　徐振源

（淮南矿业学院）　　（无锡轻工学院）

（钱伟长推荐，1992年3月6日收到）

摘　要

本文利用两种简便方法给出了 Brusselator 极限环的渐近解析式，在某些地方，它们要优于文[2]给出的渐近解析式。

关键词　常微分方程　渐近解　极限环　布鲁塞尔振子

一、引　言

对应于没有扩散项的 Brusselator 的速率方程是以下非线性常微分方程

$$dx/dt=A-(B+1)x+x^2y,\ dy/dt=Bx-x^2y \tag{1.1}$$

其中A和B是正常数．文[1]证明了当$B>1+A^2$，(1.1)存在唯一极限环而且是渐近稳定的．文[2]利用计算机给出了 Brusselator 极限环渐近解析式，该解析式的优点是逼近于周期误差较小，缺点是渐近解图象有一部分在x轴下方，这与实际情况不符．本文利用文[3]一类哈密顿系统周期解的解析形式，利用两种简便方法选择其中的参数来逼近(1.1)的极限环，得到的解析式在某些地方要优于文[2]的解析式．

二、第 一 种 方 法

文[3]讨论了方程

$$dx/dt=x(f-ax-2by),\ dy/dt=y(-f+2ax+by) \tag{2.1}$$

该方程是哈密顿方程．它有无穷条周期轨道，我们选择适当参数在这无穷条周期轨道中找出一条轨道来逼近(1.1)的极限环．

(2.1)的周期解为

$$\left.\begin{aligned}x_n(t)&=\frac{\gamma}{1-A_0^2\operatorname{sn}^2\Omega t}\\ y_n(t)&=\frac{1}{2b}\left(f-\frac{a\gamma}{1-A_0^2\operatorname{sn}^2\Omega t}-\frac{2A_0^2\Omega\cdot\operatorname{sn}\Omega t\cdot\operatorname{cn}\Omega t\cdot\operatorname{dn}\Omega t}{1-A_0^2\operatorname{sn}^2\Omega t}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

其中 $A_0=\frac{\beta-\gamma}{\beta}$，$\Omega=\frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)\beta}}{2}\cdot a$

$\alpha>\beta>\gamma>0$ 为三次代数方程

$$z^3-\frac{2f}{a}z^2+\frac{f^2}{a^2}z-\frac{4bh}{a^2}=0 \tag{2.3}$$

的三个实根。$\mathrm{sn}\Omega t$，$\mathrm{cn}\Omega t$，$\mathrm{dn}\Omega t$为模$k^2=(\beta-\gamma)\alpha/(\alpha-\gamma)\beta$的 Jacobi 椭圆函数，(2.2)的解周期为

$$T=2K(k)/\Omega \tag{2.4}$$

且$\alpha>f/a$，$f/a>\beta>f/3a$，$f/3a>\gamma>0$。轨道(2.2)的通积分为

$$H(x,y)=xy(f-ax-by)=h \tag{2.5}$$

我们先给出第一种方法：

设(1.1)中心和(2.1)中心相等即

$$A=\frac{f}{3a},\ \frac{B}{A}=\frac{f}{3b}$$

得 $$f=3aA,\ b=aA^3/B$$

以a为参数，则三次代数方程成为

$$z^3-6Az^2+9A^2z-4A^2h/aB=0 \tag{2.6}$$

在(2.2)中令$t=0$可得

$$x_n(0)=\gamma,\ y_n(0)=(f-a\gamma)/2b$$

从而(2.5)成为

$$h=\gamma\frac{1}{2b}(f-a\gamma)\cdot\left[f-a\gamma-b\cdot\frac{1}{2b}(f-a\gamma)\right]=\frac{B\gamma a}{4A^2}(3A-\gamma)^2 \tag{2.7}$$

因$0<h<f^3/27ab=AaB$，故$0<h/a<AB$

最后(2.6)成为

$$z^3-6Az^2+9A^2z-\gamma(3A-\gamma)^2=0 \tag{2.8}$$

根据数值解结果可取定初值$x_0=\gamma_0$，$y_0=(f-a\gamma_0)/2b$，并从(2.8)可解出α_0，β_0，γ_0从而确定k_0，Ω_0，再由$T=2K(k_0)/\Omega_0$确定参数a，最终得到表达式(2.2)，它将是(1.1)极限环的渐近解析式。

三、第二种方法

方程(2.1)有一条异宿轨线，限制周期轨道变化区域。根据(1.1)数值解中最大的x_0y_0值，将(1.1)周期轨道边界线与(2.1)的异宿轨线视为一致，即

$$\frac{f}{a}=x_0,\ \frac{f}{b}=y_0,\ f=ax_0,\ b=\frac{f}{y_0}=\frac{ax_0}{y_0} \tag{3.1}$$

仍以a为参数，则(2.3)成为

$$z^3-2x_0z^2+x_0^2z-4x_0h/ay_0=0 \tag{3.2}$$

(2.2)式中令$t=0$可得

$$x_n(0)=\gamma,\ y_n(0)=\frac{y_0}{2x_0}(x_0-\gamma)$$

$$h=\frac{a\gamma y_0}{4x_0}(x_0-\gamma)^2$$

此时(3.2)成为

$$z^3-2x_0z^2+x_0^2z-\gamma(x_0-\gamma)^2=0 \tag{3.3}$$

同样根据数值解可取得值 $x_0=\gamma_0'$，$y_0=(f-a\gamma_0')/2b$ 求出 α_0'，β_0'，γ_0'，k_0'，Ω_0'，再由 $T=2K(k_0')/\Omega_0'$ 确定参数 a，最后也可得解表达式。

四、数值例子

$A=1$，$B=3$

第一种方法：

$f=3a$，$b=a/3$，

$h=3a\gamma(3-\gamma)^2/4$，　　$0<h<3a$

$x(0)=0.3$，$y(0)=4.05$，$\gamma=0.3$，$h/a=1.64$

解出：　$\alpha=3.76$，$\beta=1.94$，$k=0.9585$，$\Omega=1.295a$

得　　$a=0.561$，$f=1.682$，$b=0.187$，$\Omega=0.725$，$A_0=0.845$

解析解为：

$$x(t)=\frac{0.3}{1-(0.845)^2\mathrm{sn}^2 0.725t}$$

$$y(t)=\frac{1}{0.374}\left(1.682-\frac{0.168}{1-(0.845)^2\mathrm{sn}^2 0.725t}\right.$$
$$\left.-\frac{2\times(0.845)^2\times 0.725\,\mathrm{sn}0.725t\cdot\mathrm{cn}0.725t\cdot\mathrm{dn}0.725t}{1-(0.845)^2\mathrm{sn}^2 0.725t}\right)$$

数值解、文[2]解和我们解的比较见图1。

第二种方法：

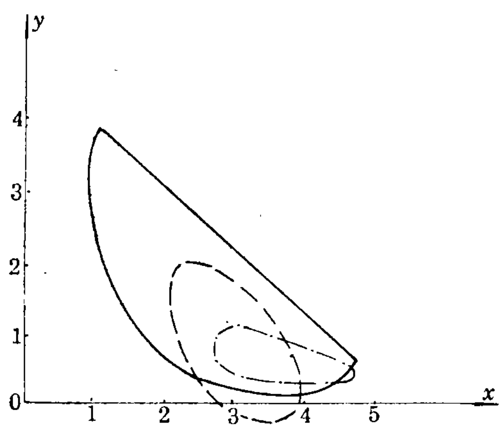

图 1

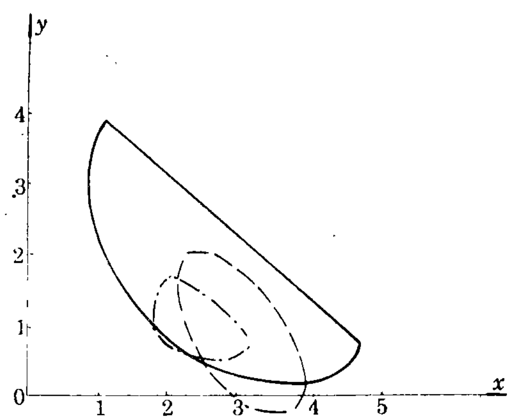

图 2

$f=5a$，$b=5a/6$，$h=0.3a\gamma(5-\gamma)^2$

$x(0)=0.5$，$y(0)=2.7$，$h/a=3.0375$

解出：　$\alpha=6.27$，$\beta=3.23$，$\gamma=0.5$，$k=0.9584$，$\Omega=2.158a$

$$a=0.310,\ f=1.55,\ b=0.258,\ \Omega=0.669,\ A_0=0.845$$

解析解为：

$$x(t)=\frac{0.5}{1-(0.845)^2\mathrm{sn}^2 0.669t}$$

$$y(t)=\frac{1}{0.516}\left(1.55-\frac{0.155}{1-(0.845)^2\mathrm{sn}^2 0.669t}\right.$$

$$\left.-\frac{2\times(0.845)^2\times(0.669)\cdot\mathrm{sn}0.669t\cdot\mathrm{cn}0.669t\cdot\mathrm{dn}0.669t}{1-(0.845)^2\mathrm{sn}^2 0.669t}\right)$$

数值解、文[2]解和我们的解比较见图2.

参 考 文 献

[1] 秦元勋、曾宪武，生物化学中的布鲁塞尔振子方程的定性研究，科学通报，25(8) (1980)，337—339.

[2] Zhang Suo-chun, Approximate solution of the Brusselator limit cycle in biochemistry, *Sci. Bull. China*, 27(4) (1982), 433—437.

[3] 李继彬、陈兰荪，周期时间制的捕食者一食饵系统周期分叉和混沌解，生物数学学报，(2) (1986).

Asymptotic Solution of Brusselator Limit Cycle in Biochemistry

Yang Hong-chun

(*Huainan Mining Institute, Huainan, Anhui*)

Xu Zhen-yuan

(*Wuxi Institute of Light Industry, Wuxi, Jiangsu*)

Abstract

In this paper, two kinds of asymptotic analytic expression of the Brusselator limit cycle are given by means of two simple methods. To some extent, they are better than the analytic expression in [2].

Key words Brusselator, limit cycle, asymptotic solution