应用数学和力学，第14卷第3期（1993年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

色散方程的四点显式差分格式*

黎 益

（四川大学数学系）

摘 要

本文对色散方程$u_t=au_{xxx}$构造了一类高稳定性的、在中间层涉及四个网格点的三层显式差分格式，其局部截断误差为$O(\tau+h)$，其稳定条件为$|R|=|a|\tau/h^3\leqslant 0.25$至$|R|\leqslant 10$，它们较大地改善了同类格式的稳定条件$|R|\leqslant 0.25$[1]。

关键词 色散方程 四点显式差分格式 高高稳定性

一、引 言

近年来，由于人们对孤立波的兴趣，在色散方程$u_t=au_{xxx}$（a是常数，可正可负）的差分解法上给出了一系列格式．在联系n、$n+1$层的两层显格式与联系$n-1$，n，$n+1$层的三层显格式中，所谓"k点格式"是指它在n层的网格点的分布区间的长度等于kh．目前，较好的稳定条件是：$|R|\leqslant 0.25$[1]（四点格式），$|R|\leqslant 0.7016$[7]（五点格式），$|R|\leqslant 1.1851$[2]，$|R|\leqslant 1.3575$[11]（六点格式），$|R|\leqslant 2$[6]，$|R|\leqslant 2.3824$[4]，$|R|\leqslant 2.3945$[5,8]（七点格式），$|R|\leqslant 4.0111$[9]（八点格式），$|R|\leqslant 5.3976$，$|R|\leqslant 5.6132$[9]（九点格式）．上述格式，四点格式为两层，精度为$O(h)$，其余格式为三层，精度为$O(h^2)$．

本文对色散方程$u_t=au_{xxx}$引入带参数p_0，p_1与p_2的三个附加项，构造了一类三层四点显格式，其局部截断误差为$O((p_0+1/2)\tau+(p_1+1/2)h+p_2h^2)$，其稳定条件为$|R|\leqslant f(p_0,p_1,p_2)$，$f$是其变元的增函数．例如，$f(0,0,0)=0.25$，$f(2,0.5,4.5)=1.25$，$f(4,2,9)=2.25$．本文结果较大地改善了条件$|R|\leqslant 0.25$[1]．应当指出，加大参数值还可以改进本文第三节列出的稳定条件，但由于截断误差项含有因子$(p_1+1/2)h$，参数值不宜过大，否则，将降低格式的精度．

二、差 分 格 式

假定网域是求解区域中的点集(x_m,t_n)，$x_m=mh$，$t_n=n\tau$，m,n整数，$n\geqslant 0$．这里$\tau=\Delta t$，$h=\Delta x$表示网格宽度．假定$R=a\tau/h^3=$常数．

* 钱伟长推荐．

对色散方程

$$u_t=au_{xxx} \tag{2.1}$$

引入三个附加项得到

$$u_t+p_0\tau u_{tt}=au_{xxx}-p_1hu_{xt}+p_2h^2u_{xxt} \tag{2.2}$$

其中 p_0,p_1与p_2是参数．对方程(2.2)作差分替换得到逼近方程(2.1)的两个差分格式．

1．对$a>0$，有

$$\begin{aligned}&\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+p_0\frac{u_m^{n+1}-2u_m^n+u_m^{n-1}}{\tau}\\&=\frac{a}{h^3}(u_{m+1}^n-3u_m^n+3u_{m-1}^n-u_{m-2}^n)\\&\quad+p_1\left(\frac{u_{m-1}^n-u_{m-1}^{n-1}}{\tau}-\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}\right)\\&\quad+p_2\left(\frac{u_{m+1}^n-u_{m+1}^{n-1}}{\tau}-2\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\frac{u_{m-1}^n-u_{m-1}^{n-1}}{\tau}\right)\end{aligned} \tag{2.3}$$

2．对$a<0$，有

$$\begin{aligned}&\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+p_0\frac{u_m^{n+1}-2u_m^n+u_m^{n-1}}{\tau}\\&=\frac{a}{h^3}(u_{m+2}^n-3u_{m+1}^n+3u_m^n-u_{m-1}^n)\\&\quad+p_1\left(\frac{u_{m+1}^n-u_{m+1}^{n-1}}{\tau}-\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}\right)\\&\quad+p_2\left(\frac{u_{m+1}^n-u_{m+1}^{n-1}}{\tau}-2\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau}+\frac{u_{m-1}^n-u_{m-1}^{n-1}}{\tau}\right)\end{aligned} \tag{2.4}$$

不难验证，格式(2.3)逼近方程(2.1)的局部截断误差为$O((p_0+1/2)\tau+(p_1+1/2)h+p_2h^2)$．在(2.3)中用$(-h)$替换$h$，用$u_{m+j}$替换$u_{m-j}$，则得格式(2.4)．

三、稳定性分析

假定$a>0$，令[10]

$$u_m^n=\lambda^n\exp[i\alpha x_m] \qquad (i^2=-1,\ \alpha\text{实数})$$

代入(2.3)得到特征方程

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0 \tag{3.1}$$

$$\begin{cases}A=1+p_0+p_1+2p_2,\ C=p_0+p_1\exp[-i\varphi]+2p_2\cos\varphi,\ \varphi=\alpha h\\B=-A-C-RD,\ D=\exp[i\varphi]-3+3\exp[-i\varphi]-\exp[-i2\varphi]\end{cases} \tag{3.2}$$

下面用λ_1，λ_2表示方程(3.1)的两个根．

引理1[10] 若存在正数τ_0，方程(3.1)的系数对$0<\tau\leqslant\tau_0$及一切实数α有界，且$|\lambda_1|\leqslant1$，$|\lambda_2|\leqslant\delta<1$，($\delta$是常数，与$\tau,\alpha$无关)，则差分格式稳定．

引理2[3] 若方程(2.1)满足条件，

$$|A|>|C|,\ |\bar{A}B-\bar{B}C|\leqslant|A|^2-|C|^2 \tag{3.3}$$

则有$|\lambda_1|\leqslant1$，$|\lambda_2|<1$．

假定对方程(3.1)～(3.2)有$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|$，则有

$$|\lambda_2|^2\leqslant|\lambda_1\lambda_2|=\left|\frac{C}{A}\right|\leqslant\begin{cases}\dfrac{p_0+p_1+2p_2}{1+p_0+p_1+2p_2} & (p_j\geqslant 0)\\ 1/3 & (p_0=0,\ p_2=-p_1=1/2)\end{cases}$$

由此推出$|\lambda_2|\leqslant\delta<1$($\delta$是常数，与$\tau,\alpha$无关)．应用引理1,2便知，用不等式(3.3)导出的对网比R的限制是格式(2.3)的稳定条件．

由(3.2)算得

$$\bar{A}B-\bar{B}C=R(C\bar{D}-\bar{A}D)-(A\bar{A}-C\bar{G})\equiv RG-E$$

代入(3.3)得到

$$G\bar{G}R^2-(G+\bar{G})ER\leqslant 0 \tag{3.4}$$

这里

$$\begin{aligned}G&=C\bar{D}-\bar{A}D=(p_0+2p_2y)\bar{D}-(1+p_0+2p_1+2p_2)D\\&\equiv C_1\bar{D}-C_2D,\qquad (y=\cos\varphi)\\G\bar{G}&=(C_1+C_2)^2D\bar{D}-C_1C_2(D+\bar{D})^2,\\G+\bar{G}&=(C_1-C_2)(D+\bar{D}),\\D\bar{D}&=8(1-y)^3,\ D+\bar{D}=-4(1-y)^2.\end{aligned}$$

显然，$y=1$时，(3.4)式对一切R恒成立．不失一般性，下设$y\neq 1$．由(3.4)解得(2.3)的稳定条件

$$|R|\leqslant f(p_0,p_1,p_2)=\min_{-1\leqslant y<1}F(y) \tag{3.5}$$

其中

$$F(y)=\frac{(C_2-C_1)E}{[(C_1+C_2)^2-C_1C_2Q]Q}$$

$$\begin{cases}C_1=p_0+2p_2y,\ C_2=1+p_0+2p_1+2p_2,\ Q=2(1-y),\\E=A\bar{A}-C\bar{C}=(C_2-p_1)^2-(C_1+p_1y)^2-p_1^2(1-y^2)\end{cases}$$

因为$O((p_1+1/2)h)$是格式(2.3)截断误差的主要部份，求f时，我们先给定p_1，再应用优选法选择p_0，p_2使f取极大值．对表1中的参数值，$f=F(-1)=(1+2p_0)/4$.

表 1

p_0	0	0	2	2	3.1	4	5.6	8	14	19.5
p_1	−0.5	0	0.5	1	1.1	2	3	5	10	15
p_2	0.5	0	4.5	2	14	9	22	34	80	110
f	0.25	0.25	1.25	1.25	1.8	2.25	3.026	4.25	7.25	10

格式(2.3)的截断误差，对第一列参数值为$O(h^2)$，对于其它列为$O(h)$.

重复前面的推导可以证明(3.5)式也是格式(2.4)的稳定条件.

四、数 值 例 子

假定$u_t=au_{xxx}$与初边值条件确定的解为

$$u(x,t)=\cos(x-at)+\exp(x+at)\qquad(0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0) \tag{4.1}$$

取步长$h=0.05$。以u_m^n表示用格式(2.3)或(2.4)算出的解。我们的主要目的是考查稳定条件，因而对解的准确值$u(x_m,t_n)$、差分格式要求的初值、边值及开始值均用(4.1)计算。下面列出相对误差$1-u_m^n/u(x_m,t_n)$的部份数值。

表2 $a=4$，格式(2.3)

x \ n	2	202	402	R
0.4	$7.72E-7$	$1.45E-4$	$2.21E-4$	0.25
	$1.29E-6$	$1.56E-3$	$1.56E-3$	2.25
	$4.50E-6$	$1.12E-2$	$9.00E-3$	10
0.8	$7.72E-7$	$1.20E-4$	$2.30E-4$	0.25
	$1.30E-6$	$1.91E-3$	$1.90E-3$	2.25
	$3.86E-6$	$1.39E-2$	$1.03E-2$	10

表3 $a=-4$，格式(2.4)

x \ n	2	202	402	R
0.4	$7.02E-7$	$1.21E-3$	$1.34E-3$	-1.25
	$1.56E-6$	$3.33E-3$	$3.32E-3$	-2.25
0.8	$7.18E-7$	$2.02E-4$	$2.15E-4$	-1.25
	$1.60E-6$	$5.33E-4$	$5.35E-4$	-2.25

表4 $a=4$，格式(2.3)，$h=0.05$，$\tau=Rh^3/a$，$t=n\tau$

x	$R=0.25$, $n=402$, $t=0.003141$	$R=2.25$, $u=45$, $t=0.003164$	$R=10$, $n=10$, $t=0.003125$
0.2	$0.742E-4$	$2.81E-4$	$1.34E-4$
0.4	$2.21\ E-4$	$7.05E-4$	$1.54E-4$
0.6	$2.94\ E-4$	$7.47E-4$	$1.63E-4$
0.8	$2.30\ E-4$	$5.50E-4$	$1.65E-4$

表5 $a=-4$，格式(2.4)，$p_0=0$，$p_4=-p_1=0.5$，$R=-0.25$

x \ n	2	202	402
0.2	$1.27E-8$	$2.89E-6$	$7.13E-6$
0.4	$1.20E-8$	$4.65E-6$	$8.58E-6$
0.6	$1.28E-8$	$4.01E-6$	$5.94E-6$
0.8	$1.40E-8$	$1.39E-6$	$1.79E-6$

表2、3说明：1)计算过程稳定，验证了稳定条件(3.5)；2)对同一步长h和相同的计算步数n，R值越小，精度越高。

表4说明，对同一t值，误差的阶相同、此时，R值大对应的n值小，即计算步数少，这

在一定程度上反映了稳定性好的格式的优越性。

计算表2,3的格式的精度为$O(h)$，计算表5的格式的精度为$O(h^2)$，这点可从三个表中的数据看出。

参 考 文 献

[1] 秦孟兆，色散方程$u_t=au_{xxx}$的差分格式，计算数学，6(1)(1984)，1—13.

[2] 邬华谟，一类具高稳定性的三层显式格式H_3，计算数学，8(3)(1986)，329—331.

[3] 邬华谟，二次多项式根的Schur-Cohn定理和Miller 定理的初等证明，数值计算与计算机应用，1(1982)，63—64.

[4] 林鹏程，色散方程$u_t=au_{xxx}$的一类具高稳定性三层显式格式，应用数学和力学，9(9)(1988)，803—808.

[5] 戴嘉尊、赵宁、徐云，关于色散方程$u_t=au_{xxx}$一类显式差分格式的讨论，计算数学，11(2)(1989)，172—177.

[6] 戴伟忠，色散方程的显式与半显式差分格式，厦门大学学报，27(1)(1988)，116—118.

[7] 黎益、李北杰，关于色散方程$u_t=au_{xxx}$的两个显式差分格式，计算数学，8(3)(1986)，275—280.

[8] 黎益，关于色散方程$u_t=au_{xxx}$的三层显式差分格式，四川大学学报(自然科学版)，25(3)(1988)，298—306.

[9] 黎益、武蔚文，色散方程的显式差分格式，重庆大学学报，(3)(1990).

[10] Richtmyer, R. D. and K. W. Morton, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2nd Ed., John Wiley and Sons (1967), 68—90.

[11] Li Yi, *A Class of Three-Level Explicit Difference Schemes*. (to appear)

Four-Point Explicit Difference Schemes for the Dispersive Equation

Li Yi

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu)

Abstract

A class of three-level explicit difference shcemes for the dispersive equation $u_t=au_{xxx}$ are established. These schemes have higher stability and involve four mesh points at the middle level. Their local truncation errors are $O(\tau+h)$ and stability conditions are from $|R|\leqslant 0.25$ to $|R|\leqslant 10$, where $R=a\tau/h^3$, which is much better than $|R|\leqslant 0.25$ [1].

Key words dispersive equation, four-point explicit difference scheme, higher stability