应用数学和力学，第14卷第2期（1993年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

某类二阶非线性系统初值问题的奇摄动*

林宗池　　林苏榕

（福州 福建师范大学数学系）　（福州 福建电视大学数学科）

（1991年11月14日收到）

摘　要

本文研究某类二阶非线性向量微分方程初值问题

$\varepsilon^r x''=f(t,x,x',\varepsilon)$

$x(0,\varepsilon)=\alpha,\ x'(0,\varepsilon)=\beta$

的奇摄动，其中$r>0$为任意常数，$\varepsilon>0$为小参数，$x,f,\alpha,\beta\in R^n$. 在适当的假设下，利用多参数展开法和对角化技巧，证得摄动问题解的存在和导出解的高阶的一致有效渐近展开式.

关键词　非线性系统　奇异摄动　多参数展开　对角化技巧

一、引　　言

关于纯量的二阶非线性微分方程的初值问题的奇摄动已有人详细地研究过，而对于向量二阶非线性微分方程初值问题的奇摄动的研究还不多，特别是在方程的最高阶导数项带有小参数ε^r，$r>0$的情况，还未见有他人研究过. 本文将利用多参数展开法和对角化技巧研究如下的二阶非线性系统的初值问题：

$$\varepsilon^r x''=f(t,x,x',\varepsilon) \tag{1.1}$$

$$x(0,\varepsilon)=\alpha,\ x'(0,\varepsilon)=\beta \tag{1.2}$$

的奇摄动，其中$\varepsilon>0$为小参数，$r>0$为任意常数，$x,f,\alpha,\beta\in R^n$，并且x和f都有关于ε和ε^r的二重渐近幂级数展开式，当这些参数都趋向于零时.

为了确定起见，我们假定文中所有向量都是列向量. 对于向量函数或矩阵函数$A(t,\varepsilon)=[a_{ij}(t,\varepsilon)]\in C([0,T]\times[0,\varepsilon_0])$ 规定范数如下：

$$|A(t,\varepsilon)|=\Big(\sum_{i-j}(a_{i,j}(t,\varepsilon))^2\Big)^{1/2},\quad \|A(t,\varepsilon)\|=\max_{\substack{0\le t\le T\\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0}}|A(t,\varepsilon)|$$

其中ε_0和T为某个正的常数.

二、形 式 渐 近 解

为了构造形式渐近解，我们先引进变量替换：$x'=y$，则问题(1.1)、(1.2)化为

* 国家自然科学基金资助课题.

$$x'=y,\ x(0,\varepsilon)=\alpha \tag{2.1}$$

$$\varepsilon^r y'=f(t,x,y,\varepsilon),\ y(0,\varepsilon)=\beta \tag{2.2}$$

我们假定下面四个条件成立：

Ⅰ）方程 $f(t,x,y,0)=0$ 在变量(t,x)空间的某个有界闭区域$\bar{D}$上存在满足下列条件的解 $y=\varphi(t,x)$：

1) $\varphi(t,x)$为$\bar{D}$上的连续函数；

2) 当$(t,x)\in\bar{D}$ 时，$(t,x,\varphi(t,x))\in G$；

3) 解$y=\varphi(t,x)$在$\bar{D}$上是孤立的，即存在 $\eta>0$，使得当 $0\leqslant\|y-\varphi(t,x)\|\leqslant\eta$，$(t,x)\in\bar{D}$ 时有$f(t,x,y)\neq 0$。

其中G为变量(t,x,y)空间的某个开域。

Ⅱ）退化问题

$$x'=y,\ x(0,0)=\alpha,\ 0=f(t,x,y,0)$$

在$0\leqslant t\leqslant T$上存在着充分光滑的解$(\bar{x}_0(t),\ \bar{y}_0(t))$。

Ⅲ）存在常数 $\varepsilon_0>0$，$d_0>0$，使得在$0\leqslant t\leqslant T$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，$\|x-\bar{x}_0(t)\|\leqslant d_0$，$\|y-\bar{y}_0(t)\|\leqslant d_0$中$f$关于每一个变元都是充分多次连续可微的，并且$f_y(t,\bar{x}_0(t),\ \bar{y}_0(t),0)$ 的每一个特征值有小于零的实部，即$\mathrm{Re}\lambda_i\leqslant -k<0$。

Ⅳ）引进附加方程组

$$d\tilde{y}/d\tau=f(0,\beta,\tilde{y}),\qquad (\tau\geqslant 0) \tag{2.3}$$

及初始条件

$$\tilde{y}(0)=\alpha \tag{2.4}$$

问题(2.3)、(2.4)的解$\tilde{y}(\tau)$满足下列条件：

1) $\tilde{y}(\tau)\to\varphi(0,\alpha)$，当$\tau\to\infty$时；

2) 点$(0,\alpha,\tilde{y}(\tau))\in G$，当$\tau\geqslant 0$时。

现在我们来构造摄动问题(2.1)、(2.2)的形式渐近解，设(2.1)、(2.2)的解x,y都可以表示为下列形式：

$$z(t,\varepsilon)=\bar{z}(t,\varepsilon)+\Pi z(\tau,\varepsilon),\ \tau=t/\varepsilon^r \tag{2.5}$$

其中

$$\bar{z}(t,\varepsilon)\sim\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^i\varepsilon^{rj}\bar{z}_{ij}(t) \tag{2.6}$$

$$\Pi z(\tau,\varepsilon)\sim\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^i\varepsilon^{rj}\Pi z_{ij}(\tau) \tag{2.7}$$

因而方程(2.1)、(2.2)可化为

$$\varepsilon^r\frac{d\bar{x}}{dt}+\frac{d\Pi x}{d\tau}=\varepsilon^r\bar{y}+\varepsilon^r\Pi y \tag{2.8}$$

$$\varepsilon^r\frac{d\bar{y}}{dt}+\frac{d\Pi y}{d\tau}=f(t,\bar{x}+\Pi x,\ \bar{y}+\Pi y,\varepsilon) \tag{2.9}$$

与x,y的表示式类似，我们也把f表示为下列形式：

$$f(t,\bar{x}+\Pi x,\bar{y}+\Pi y,\varepsilon)=f(t,\bar{x}(t,\varepsilon),\bar{y}(t,\varepsilon),\varepsilon)$$
$$+f(t,\bar{x}(t,\varepsilon)+\Pi x(\tau,\varepsilon),\ \bar{y}(t,\varepsilon)+\Pi y(\tau,\varepsilon),\ \varepsilon)$$

$$-f(t,\bar{x}(t,\varepsilon),\ \bar{y}(t,\varepsilon),\varepsilon)=\bar{f}+\Pi f$$

把(2.6)、(2.7)代入(2.8)、(2.9)，我们进一步把$\bar{f}$，Πf表示为ε和ε^r的幂级数：

$$\bar{f}\equiv f(t,\bar{x}(t,\varepsilon),\ \bar{y}(t,\varepsilon),\ \varepsilon)\sim f(t,\bar{x}_{00}(t),\bar{y}_{00}(t),0)$$
$$+\sum_{i+j\geq 1}\varepsilon^i\varepsilon^{rj}[\bar{f}_x(t)\bar{x}_{ij}(t)+\bar{f}_y(t)\bar{y}_{ij}(t)+\bar{f}_{ij}]$$

中其矩阵元素 $\bar{f}_x(t)$，$\bar{f}_y(t)$分别为$f_x(t,\bar{x}_{00}(t),\ \bar{y}_{00}(t),0)$，$f_y(t,\bar{x}_{00}(t),\ \bar{y}_{00}(t),0)$，$\bar{f}_{ij}$是由$\bar{x}_{lp},\bar{y}_{lp}$构成的函数$(0\leqslant l\leqslant i,\ 0\leqslant p\leqslant j,\ l+p<i+j)$。

同样地，也可把Πf表示成ε和ε^r的幂级数：

$$\Pi f\equiv f(t,\bar{x}(t,\varepsilon)+\Pi x(\tau,\varepsilon),\ \bar{y}(t,\varepsilon)+\Pi y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$$
$$-f(t,\bar{x}(t,\varepsilon),\ \bar{y}(t,\varepsilon),\varepsilon)$$
$$=f(\varepsilon^r\tau,\bar{x}(\varepsilon^r\tau,\varepsilon)+\Pi x(\tau,\varepsilon),\bar{y}(\varepsilon^r\tau,\varepsilon)+\Pi y(\tau,\varepsilon),\varepsilon)$$
$$-f(\varepsilon^r\tau,\bar{x}(\varepsilon^r\tau,\varepsilon),\ \bar{y}(\varepsilon^r\tau,\varepsilon),\varepsilon)$$
$$\sim[f(0,\bar{x}_{00}(0)+\Pi x_{00}(\tau),\ \bar{y}_{00}(0)+\Pi y_{00}(\tau),0)-f(0,\bar{x}_{00}(0),\ \bar{y}_{00}(0),0)]$$
$$+\sum_{i+j\geq 1}\varepsilon^i\varepsilon^{rj}[f_x(\tau)\Pi x_{ij}(\tau)+f_y(\tau)\Pi y_{ij}(\tau)+G_{ij}(\tau)] \tag{2.10}$$

其中矩阵元素$f_x(\tau)$，$f_y(\tau)$分别为$f_x(0,\bar{x}_{00}(0)+\Pi x_{00}(\tau),\ \bar{y}_{00}(0)+\Pi y_{00}(\tau),0)$，$f_y(0,\bar{x}_{00}(0)+\Pi x_{00}(\tau),\ \bar{y}_{00}(0)+\Pi y_{00}(\tau),\ 0)$，而向量函数$G_{ij}(\tau)$是由$\Pi x_{lp}(\tau)$，$\Pi y_{lp}(\tau)(0\leqslant l\leqslant i,\ 0\leqslant p\leqslant j,\ l+p<i+j)$确定。

现在把展开式(2.5)～(2.7)代入方程(2.1)、(2.2)，令两边关于同ε和ε^r次幂的系数相等，则得到：

$$\begin{cases} d\bar{x}_{00}/dt=\bar{y}_{00} & (2.11)\\ f(t,\bar{x}_{00},\bar{y}_{00},0)=0 & (2.12)\end{cases}$$

$$\begin{cases} d\Pi x_{00}/d\tau=0 & (2.13)\\ d\Pi y_{00}/d\tau=f(0,\bar{x}_{00}(0)+\Pi x_{00}(\tau),\bar{y}_{00}(0)+\Pi y_{00}(\tau),0) & (2.14)\end{cases}$$

一般地，

$$\begin{cases} d\bar{x}_{ij}/dt=\bar{y}_{ij} & (2.15)\\ d\bar{y}_{i,j-1}/dt=\bar{f}_x(t)\bar{x}_{ij}+\bar{f}_y(t)\bar{y}_{ij}+\bar{f}_{ij} & (2.16)\end{cases}$$

$$\begin{cases} d\Pi x_{ij}/d\tau=0 & (2.17)\\ d\Pi y_{ij}/d\tau=f_x(\tau)\Pi x_{ij}(\tau)+f_y(\tau)\Pi y_{ij}(\tau)+G_{ij} & (2.18)\end{cases}$$

为了确定初值条件，我们把$\bar{x}(0,\varepsilon)$，$y(0,\varepsilon)=\bar{y}(0,\varepsilon)+\Pi y(0,\varepsilon)$展开为$\varepsilon$和$\varepsilon^r$的双重级数，代入(2.1)、(2.2)中的初值条件，令ε，ε^r同次幂的系数相等，并顾及边界层函数的要求，则得：

$$\bar{x}_{00}(0)=\alpha \tag{2.19}$$
$$\Pi x_{00}(\infty)=0 \tag{2.20}$$
$$\bar{x}_{ij}(0)=0 \tag{2.21}$$
$$\Pi x_{ij}(\infty)=0 \tag{2.22}$$
$$\Pi y_{00}(0)=\beta \tag{2.23}$$
$$\Pi y_{ij}(0)=-\bar{y}_{ij}(0) \tag{2.24}$$

由(2.3)、(2.4)、(2.11)、(2.12)和(2.19)得$\bar{x}_{00}=\bar{x}_0(t)$，$\bar{y}_{00}=\bar{y}_0(t)$。再由(2.13)、

(2.20)得$\Pi x_{00}=0$，因此，(2.14)式就成为

$$d\Pi y_{00}/d\tau=f(0,\bar{x}_{00}(0),\bar{y}_{00}(0)+\Pi y_{00}(\tau),0) \tag{2.25}$$

根据文[1]的引理3.1及假设Ⅲ和Ⅳ知(2.25)、(2.23)的解Πy_{00}存在，且有$\Pi y_{00}(\tau)=O(\exp(-k_1\tau))$，$k_1\in(0,k)$。

如果设z_{ij}代表$\bar{x}_{ij}$和$\bar{y}_{ij}$，Πz_{ij}代表Πx_{ij}和Πy_{ij}，则我们可按照顺序$\bar{z}_{00}$，Πz_{00}；$\bar{z}_{10}$，Πz_{10}；$\bar{z}_{01}$，Πz_{01}；$\bar{z}_{20}$，Πz_{20}；$\bar{z}_{11}$，Πz_{11}；$\bar{z}_{02}$，Πz_{02}，…，依次来确定z_{ij}和Πz_{ij}，并根据文[1]的引理3.2，对于$\bar{k}_1\in(0,k_1)$，有$\Pi x_{ij}=O(\exp[-\bar{k}_1\tau])$，$i,j=1,2,\cdots,N+1$。

令：

$$x_N=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^i\varepsilon^{rj}\bar{x}_{ij}+\psi(t)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N+1}\varepsilon^i\varepsilon^{rj}\Pi x_{ij} \tag{2.26}$$

$$y_N=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^i\varepsilon^{rj}\bar{y}_{ij}+\psi(t)\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N+1}\varepsilon^i\varepsilon^{rj}\Pi y_{ij} \tag{2.27}$$

其中$\psi(t)$是一无限次可微的函数：

$$\psi(t)=\begin{cases}1, & \text{当}0\leqslant t\leqslant\delta/3\\ 0, & \text{当}2\delta/3\leqslant t\leqslant\delta\end{cases}$$

则容易验证：

$$dx_N/dt=y_N+O(\varepsilon^{(N+1)H}) \tag{2.28}$$

$$\varepsilon^r dy_N/dt=f(t,x_N,y_N,\varepsilon)+O(\varepsilon^{(N+1)H}) \tag{2.29}$$

$$x_N(0,\varepsilon)=\alpha+O(\varepsilon^{(N+1)H}) \tag{2.30}$$

$$y_N(0,\varepsilon)=\beta+O(\varepsilon^{(N+1)H}) \tag{2.31}$$

其中$H=\min\{1,r\}$。

三、主要结果

在这一节我们将证明存在函数u和v使边值问题(2.1)、(2.2)的解可以表示成

$$x(t,\varepsilon)=x_N+u,\quad y(t,\varepsilon)=y_N+v \tag{3.1}$$

其中(x_N,y_N)是由(2.26)、(2.27)式定义的形式渐近式，$u=O(\varepsilon^{(N+1)H})$，$v=O(\varepsilon^{(N+1)H})$。为此作变量替换$u=x-x_N$，$v=y-y_N$，于是可把问题(2.1)，(2.2)化为

$$u'=v+G_1,\quad \varepsilon^r v'=B_1u+B_2v+F_1 \tag{3.2}$$

$$u(0,\varepsilon)=x(0,\varepsilon)-x_N(0,\varepsilon)\equiv\xi(\varepsilon),\quad v(0,\varepsilon)=y(0,\varepsilon)-y_N(0,\varepsilon)\equiv\eta(\varepsilon) \tag{3.3}$$

其中

$$G_1=y_N-dx_N/dt$$

$$F_1=f(t,x_N+u,y_N+v,\varepsilon)-\varepsilon^r dy_N/dt-B_1u-B_2v$$

$$B_1=f_x(t,x_N,y_N,\varepsilon),\quad B_2=f_y(t,x_N,y_N,\varepsilon)$$

$$\xi(\varepsilon)=\eta(\varepsilon)=O(\varepsilon^{(N+1)H})$$

为了求误差估计u和v，下面我们将采用K.W.Chang的对角化技巧。仿照文[2]中引理的证明方法，我们可以证明：

引理1　存在$\varepsilon_1>0$，使当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时，下面两个矩阵微分方程的初值问题：

$$\varepsilon^r p'=B_2 p-\varepsilon^r p^2-B_1(t),\ p(0,\varepsilon)=0 \tag{3.4}$$

$$\varepsilon^r s'=-\varepsilon^r ps-s(B_2(t)+\varepsilon^r p)-I,\ s(0,\varepsilon)=0 \tag{3.5}$$

分别有解$p=p(t,\varepsilon)$，$s=s(t,\varepsilon)$，它们在$0\leqslant t\leqslant T$中是一致有界的，即存在常数$p_0>0, s_0>0$使得

$$\|p(t,\varepsilon)\|\leqslant p_0,\ \|s(t,\varepsilon)\|\leqslant s_0 \tag{3.6}$$

然后，我们作变量替换：

$$z=u+\varepsilon^r sw,\ w=v+pu \tag{3.7}$$

则由于(3.4)、(3.5)，可把问题(3.2)、(3.3)化为对角化系统：

$$z'=-pz+G \tag{3.8}$$

$$\varepsilon^r w'=(B_2+\varepsilon^r p)w+F \tag{3.9}$$

$$z(0,\varepsilon)=\xi(\varepsilon),\ w(0,\varepsilon)=\eta(\varepsilon) \tag{3.10}$$

其中

$$G(t,z,w,\varepsilon)=F_1+sG_1+\varepsilon^r spF_1,\ F(t,z,w,\varepsilon)=G_1+\varepsilon^r pF_1$$

根据(2.28)～(2.30)推知，存在某个正常数C_1，使得

$$\|G(t,z,w,\varepsilon)\|\leqslant C_1\varepsilon^{(N+1)H},\ \|F(t,z,w,\varepsilon)\|\leqslant C_1\varepsilon^{(N+1)H}$$

为了对F，G进一步做出估计，我们假设条件V)成立：存在常数$k_0>0$，使得

$$\|f_x(t,x_1,y,\varepsilon)-f_x(t,x_2,y,\varepsilon)\|\leqslant k_0\|x_1-x_2\|$$

$$\|f_x(t,x,y_1,\varepsilon)-f_x(t,x,y_2,\varepsilon)\|\leqslant k_0\|y_1-y_2\|$$

$$\|f_y(t,x,y_1,\varepsilon)-f_y(t,x,y_2,\varepsilon)\|\leqslant k_0\varepsilon^r\|y_1-y_2\|$$

前面的第一个不等式把f_x换成f_y也同样成立。类似的不等式对于$g(t,x,y,\varepsilon)\equiv y$也成立。由假设条件V)和中值定理，可推得存在常数$M>0$，使得（参见文[3]）：

$$\|F(t,z_1,w_1,\varepsilon)-F(t,z,w,\varepsilon)\|\leqslant M\Pi(z_1,w_1,z,w)$$

$$\|G(t,z_1,w_1,\varepsilon)-G(t,z,w,\varepsilon)\|\leqslant M\Pi(z_1,w_1,z,w)$$

其中
$$\Pi(z_1,w_1,z,w)=\max\{\|z\|,\|z_1\|,\varepsilon^r\|w\|,\varepsilon^r\|w_1\|\}\cdot\max\{\|z_1-z\|,\varepsilon^r\|w_1-w\|\}$$

其次，方程(3.8)～(3.10)等价于下列积分方程：

$$z=Z(t)\xi(\varepsilon)+\int_0^t Z(t)Z^{-1}(s)G(s,z,w,\varepsilon)ds \tag{3.11}$$

$$\varepsilon^r w=W(t)\eta(\varepsilon)+\int_0^t W(t)W^{-1}(s)F(s,z,w,\varepsilon)ds \tag{3.12}$$

其中$Z(t)$是$z'=-pz$的基解矩阵，满足$Z(0,\varepsilon)=I$，$W(t)$是$\varepsilon^r w'=(B_2+\varepsilon^r p)w$的基解矩阵，满足$W(0,\varepsilon)=I$。由Gronwall不等式知，存在$\varepsilon_2>0$和常数$L>0$，使当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_2$时有

$$\|Z(t)Z^{-1}(s)\|\leqslant L,\qquad 0\leqslant s,\ t\leqslant T$$

$$\|W(t)W^{-1}(s)\|\leqslant L,\qquad 0\leqslant s,\ t\leqslant T$$

令$(z_0,w_0)=(0,0)$，且当$n=1,2,\cdots$时

$$z_n=Z(t)\cdot\xi(\varepsilon)+\int_0^t Z(t)Z^{-1}(s)G(s,z_{n-1},w_{n-1},\varepsilon)ds$$

$$\varepsilon^r w_n=W(t)\eta(\varepsilon)+\int_0^t W(t)W^{-1}(s)F(s,z_{n-1},w_{n-1},\varepsilon)ds$$

则容易用数学归纳法证明，当$\varepsilon=\min\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,(1/4LM)^{1/(N+1)}\}$时，存在某个正常数$C_2$，使得

$$\|z_n - z_{n-1}\| \leqslant LC_2(2LM\varepsilon^{(N+1)H})^{n-1}\varepsilon^{(N+1)H}$$

$$\varepsilon^r\|w_n - w_{n-1}\| \leqslant LC_2(2LM\varepsilon^{(N+1)H})^{n-1}\varepsilon^{(N+1)H+r}$$

$$\|z_n\| \leqslant 2LC_2\varepsilon^{(N+1)H}, \quad \varepsilon^r\|w_n\| \leqslant 2LC_2\varepsilon^{(N+1)H+r}$$

因此，z_n, w_n一致收敛于(3.11)、(3.12)的解 z 和w，且$z=O(\varepsilon^{(N+1)H})$，$\varepsilon^r w=O(\varepsilon^{(N+1)H+r})$，这样，我们就得到如下的主要结果：

定理1 若假设条件 I)～V)成立，则变换后的问题 (2.1)、(2.2)（亦即原摄动问题(1.1)、(1.2)）存在解x，y 满足

$$x=x(t,\varepsilon)=x_N+O(\varepsilon^{(N+1)H}), \quad x'=y=y(t,\varepsilon)=y_N+O(\varepsilon^{(N+1)H})$$

其中x_N, y_N分别由(2.26)和(2.27)给定.

参 考 文 献

[1] Васильева А. Б. и В. Ф. Бутузов, *Асимптотические Разложения Решений Сингулярно Возмущенных Уравнений*, Наука, Москва (1973).

[2] Chang, K. W., Singular perturbations of a general boundary value problem, *SIAM, J. Math. Anal.*, (3) (1972), 520—526.

[3] 林宗池，非线性系统边值问题的奇摄动，福建师大学报（自然科学版），5(4) (1989)，1—8.

Singular Perturbation of Initial Value Problem for a Nonlinear Second Order Systems

Lin Zong-chi

(Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou)

Lin Su-rong

(Fujian Broadcasting TV University, Fuzhou)

Abstract

In this paper, the singular perturbation of initial value problem for nonlinear second vector differential equations

$$\varepsilon^r x'' = f(t, x, x', \varepsilon)$$

$$x(0,\varepsilon)=\alpha, \ x'(0,\varepsilon)=\beta$$

is discussed, where $r>0$ is an arbitrary constant, $\varepsilon>0$ is a small parameter, x, f, α and $\beta \in R^n$. Under suitable assumptions, by using the method of many-parameter expansion and the technique of diagonalization, the existence of the solution of perturbation problem is proved and its uniformly valid asymptotic expansion of higher order is derived.

Key words nonlinear system, singular perturbation, many-parameter expansion, technique of diagonalization