

# 非协调曲边四边形十二自由度 平板弯曲单元\*

纪振义 叶开沅

(合肥 安徽建筑工业学院) (兰州大学力学系)  
(1991年5月21日收到)

## 摘 要

本文利用精确元法<sup>[1]</sup>, 给出一个十二自由度曲边四边形板弯曲单元, 该方法不需要变分原理, 适用于任意正定和非正定偏微分方程. 利用这个方法, 单元之间的协调条件很容易满足, 仅须位移和内力在单元节点上连续, 即可保证所得到的解收敛于精确解. 利用本文方法所获得的解, 无论是位移还是内力可同时有二阶收敛精度. 文末给出数值算例, 表明了本文所得到的单元有非常好的精度.

**关键词** 精确元法 薄板 曲边四边形单元

## 一、引 言

推导有限元单刚矩阵一般采用最小势能原理或虚功原理, 它仅适用于正定微分方程. 众所周知, 利用最小势能原理推导板弯曲的单元矩阵, 须在单元之间满足挠度的一阶法向导数连续的相容条件, 这一条件一般很难满足. 在[2~4]中采用高次插值得到了协调单元, 但由于有二阶导数作为节点的未知参数, 使用起来很不方便. Herrman在[5~6]中, 使用混合变分原理, 得到了同时以位移和内力作为未知参数的有限元模型. 它不需要挠度的一阶法向导数在单元之间连续, 但得到的刚度矩阵却不是正定的. Morler<sup>[7]</sup>给出六自由度, Zienkiewicz<sup>[8]</sup>给出九自由度非协调单元. [7~8]中的单元能通过分片检验<sup>[9]</sup>, 并收敛于精确解.

在[1]中给出精确元法, 用于求解任意正定和非正定偏微分方程. 利用这个方法, 单元之间的相容性能很容易地处理. 对于板弯曲问题, 仅需位移和内力在单元节点处连续. 该方法不用变分原理可直接从偏微分方程出发推导有限元单刚矩阵. 文[10]利用该方法, 成功地推导了一个6自由度板弯曲单元. 本文在[1]和[10]的基础上, 给出一个12自由度非协调曲边四边形单元. 和一般有限元相比, 给出单刚矩阵时, 不需在单元上进行面积分, 节点载荷具有明显的物理意义. 位移和内力在单元节点上有高的收敛精度, 曲边单元相当容易构造.

文末给出算例, 表明利用本文的方法, 无论是内力还是位移均可获得满意的结果.

\* 国家教委“优教”基金、博士点基金和国家自然科学基金资助的课题.

## 二、十二自由度非协调曲边四边形单元

对一个弹性薄板，它的平衡方程为

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y) \quad \text{在 } \Omega \text{ 上} \quad (2.1)$$

内力和位移的关系为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中记号

$w$  为板弯曲时的挠度；抗弯刚度  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ，这里  $E$  是板的弹性模量， $h$  是板的厚度， $\nu$  是泊松比； $M_x$ 、 $M_y$  和  $M_{xy}$  分别是  $x$  和  $y$  方向的弯矩和扭矩； $Q_x$ 、 $Q_y$  为横向剪力； $q(x, y)$  为板的横向分布载荷密度； $\Omega$  为板所占的平面空间。

利用精确元法，把平板分成  $N$  个单元，假设第  $e$  个单元所占的空间为  $\Omega_e$ ，在  $\Omega_e$  上，我们需要找到一个解使其满足方程 (2.1)，这个解有以下形式

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{12} C_j w_j(x, y) + w^0(x, y) \quad (2.3)$$

式中  $w_j$  和  $w^0$  分别是方程 (2.1) 的齐次解和特解。 $C_j$  是待定常数，它可以由单元节点之间的连续条件和边界条件而定。

我们构造一个曲边四边形单元如图1所示。在单元的每个边上有一个边节点，它位于单元边界的中点。图1中的节点位移参数和内力参数为

$$V_i = [w]_i, \quad F_i = [R]_i, \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$V_j = \begin{bmatrix} w \\ w_{,n} \end{bmatrix}_j, \quad F_j = \begin{bmatrix} V_n \\ M_n \end{bmatrix}_j, \quad (j=5, 6, 7, 8)$$

式中， $w_{,n}$  表示单元边界上的法向转角， $R$  是角点集中反力， $V_n$  和  $M_n$  是单元边界上的横向等效剪力和法向弯矩。下标  $i$  和  $j$  表示单元节点的局部编码。

$w_{,n}$ 、 $M_n$ 、 $V_n$  和  $R_i$  可分别写为

$$\left. \begin{aligned} w_{,n} &= \partial w / \partial n, \quad M_n = M_x n_x^2 + 2M_{xy} n_x n_y + M_y n_y^2 \\ V_n &= Q_x n_x + Q_y n_y + \partial M_{ns} / \partial s \\ R_i &= M_{nsj} - M_{nsk} \quad (i, j \text{ 和 } k \text{ 是循环指标}) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

式中  $n_x$  和  $n_y$  为单元边界法线方向余弦，扭矩

$$M_{ns} = (n_x^2 - n_y^2) M_{xy} + n_x n_y (M_y - M_x) \quad (2.5)$$

以及

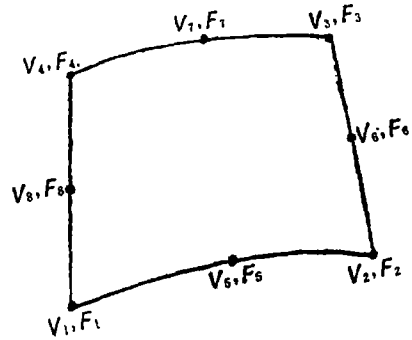


图1 12自由度曲边四边形板单元

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y, \quad \frac{\partial}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial x} n_y + \frac{\partial}{\partial y} n_x$$

我们能够容易地得到

$$\begin{Bmatrix} w \\ w, n \end{Bmatrix} = [\phi(x, y)]\{C\} + \{P(x, y)\}, \quad \{C\} = \{C_1 \ C_2 \ \dots \ C_{12}\}^T \quad (2.6)$$

(2.6)式满足方程(2.1), 在(2.6)中, 矩阵

$$[\phi(x, y)] = \begin{Bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y \\ 0 & n_x & n_y & 2xn_x & yn_x + xn_y & 2yn_y & 3xn_x & 2xyn_x + x^2n_y \\ & & & x^2 & y^3 & U_1(x, y) & U_1(y, x) & \\ & & & & & y^2n_x + 2xyn_y & 3y^2n_y & V_1 & V_1^* \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

式中  $V_1 = V_1(x, y, n_x, n_y)$ ,  $V_1^* = V_1(y, x, n_y, n_x)$

及  $U_1(x, y) = x^4 - 3x^2y^2$ ,  $V_1 = (5x^4 - 5y^4)n_x - 20xy^3n_y$

当载荷  $q$  是一个常量  $q_0$  时, 我们能够得到特解

$$\{P\} = \frac{q_0}{48D} \begin{Bmatrix} x^4 + y^4 \\ 4x^3n_x + 4y^3n_y \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

利用平衡方程的约束条件, (2.6)中的  $w$  的试探解有高的收敛精度。用(2.6)式作为位移的插值函数, 如果图1中的  $V_j$  和  $F_j$  ( $j=5, 6, 7, 8$ ) 在单元边中点,  $V_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 在单元角节点连续时, 并在单元节点上满足给定的边界条件, 则由本文方法获得的解收敛于精确解。

由上述连续条件, 可利用

$$\{F\} = [K]\{\delta\} + \{R\} \quad (2.9)$$

得到单元刚度矩阵  $[K]$  和载荷向量  $\{R\}$ 。在(2.9)中

$$\begin{Bmatrix} \{\delta\} = \{V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_5^T \ \dots \ V_8^T\}^T \\ \{F\} = \{F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5^T \ \dots \ F_8^T\}^T \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

现给出单刚矩阵  $[K]$  和载荷向量  $\{R\}$  的具体推导。把已知的节点坐标代入(2.6), 可得

$$\{\delta\} = [\phi_0]\{C\} + \{P_0\}$$

从而可求得

$$\{C\} = [\phi_0]^{-1}\{\delta\} - [\phi_0]^{-1}\{P_0\}$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ w, n \end{Bmatrix} = [\phi(x, y)][\phi_0]^{-1}\{\delta\} - [\phi(x, y)][\phi_0]^{-1}\{P_0\} + \{P(x, y)\} \quad (2.11)$$

由(2.4)和(2.5), 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = Z_1 = -D(1-\nu) & \left\{ \left( -\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} n_y + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} n_x \right) (n_x^2 - n_y^2) \right. \\ & \left. + n_x n_y \left[ -\left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) n_y + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) n_x \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

代入已知的节点坐标, 利用(2.4)~(2.6)和(2.12), 我们可以给出

$$\{F\} = \{\xi_0\}\{C\} + \{Q_0\} = [\xi_0][\phi_0]^{-1}\{\delta\} + \{Q_0\} - [\xi_0][\phi_0]^{-1}\{P_0\} \quad (2.13)$$

从而, 单元的刚度矩阵和载荷向量可以写为

$$[K] = [\xi_0][\phi_0]^{-1}, \quad \{R\} = \{Q_0\} - [\xi_0][\phi_0]^{-1}\{P_0\} \quad (2.14)$$

构造曲边单元也是比较容易的。注意(2.12)中的 $n_x$ 和 $n_y$ 在单元的曲边上是有变化的,因此(2.12)中的 $\partial M_{ns}/\partial s$ 应重新写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} &= Z_1 + M_{xy} \frac{\partial}{\partial s} (n_x^i - n_y^i) + (M_y - M_x) \frac{\partial}{\partial s} (n_x n_y) \\ &= Z_1 - \frac{4M_{xy}}{\rho} n_x n_y + (M_y - M_x) (n_x^i - n_y^i) / \rho \end{aligned} \quad (2.15)$$

式中 $\rho$ 是单元曲边的曲率半径。当曲边向外凸时 $\rho$ 取正,向内凹时 $\rho$ 应取负。把曲边节点处的坐标, $\rho$ 和法线方向余弦代入(2.4)~(2.6)和(2.13)~(2.15),曲边单元的刚度矩阵即可获得。

总刚和载荷的合成,边界条件的处理和求解代数方程组与一般有限元方法相同。

### 三、收敛性证明

我们把方程(2.1)写成偏微分算子形式

$$Bw = q(x, y), \quad B_e \bar{w} = q(x, y) \quad \Omega_e \text{ 中} \quad (3.1)$$

式中 $w$ 是精确解, $\bar{w}$ 表示用本文方法求得的近似解。因 $B$ 和 $B_e$ 均为线性算子,因此内积

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\phi, Bw - B\bar{w}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (\phi, Bw - \sum_e B_e \bar{w}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ (B^* \phi, w - \bar{w}) + \sum_e \int_{\partial \Omega_e} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} (M_n - \bar{M}_n) - M_n^* (\theta_n - \bar{\theta}_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \phi (\bar{V}_n - V_n) - V_n^* (\bar{w} - w) \right] ds \right] + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_e \sum_{i=1}^4 (\phi_i (R_i - \bar{R}_i) \\ &\quad + (w_i - \bar{w}_i) R_i^*) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

式中 $\phi \in W_2^{(2)}$ ,  $W_2^{(2)}$ 是Soblev空间; $M_n^*$ ,  $V_n^*$ 和 $R_i^*$ 分别是当 $w = \phi$ 时 $M_n$ ,  $V_n$ 和 $R_i$ 的值,并假设它们在单元之间是连续的;共轭算子 $B^* = B$ ,  $\partial \Omega_e$ 表示单元的边界,记号 $\theta_n = w, n$ 。

利用连续条件,已知边界条件和角点条件,并让未知边界条件对应的共轭边界条件为零,由(3.2)则可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (B^* \phi, w - \bar{w}) = 0 \quad (3.3)$$

根据Hilbert-伴随逆算子定理,当 $B$ 在给定的边界条件下有逆算子 $B^{-1}$ 存在时, $B^*$ 在零共轭边界条件下也有逆 $(B^*)^{-1}$ ,特别地当

$$B^* \phi = w - \bar{w}$$

时,有唯一解 $\phi \in W_2^{(2)}(\Omega)$ 使 $M_n^*$ 和 $V_n^*$ 在单元边界上是连续的。因此我们有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (w - \bar{w})^2 d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

在子空间 $\Omega - \Omega_e$ ,利用(3.4),连续条件,边界已知条件及未知边界条件对应的零共轭边界条件和内积 $(\phi, Bw - B\bar{w})_{\Omega - \Omega_e}$ ,我们能够在单元节点上得到<sup>[1]</sup>

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{w} &= w, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\theta}_n = \theta_n \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{V}_n &= V_n, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{M}_n = M_n, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{R}_i = R_i \end{aligned}$$

可以证明 $\bar{V}_n$ 和 $\bar{M}_n$ 在单元边界节点上有二阶收敛速率。

如果令 $\phi = w - \bar{w}$ ,因 $B$ 是一个正定算子,很容易证明

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|w - \bar{w}\|_{W_2^{(2)}(\Omega)} = 0$$

即  $\bar{w}$  在  $W_2^{(2)}(\Omega)$  空间中收敛于精确解。

### 四、算 例

**算例1** 一个矩形薄板如图2所示，它的边长为  $a$ ，厚度为  $h$ ，弹性模量为  $E$ ，泊松比  $\nu = 0.3$ ，抗弯刚度  $D = Eh^3/12(1-\nu)$ ，受均布载荷  $q$  作用。由于对称，我们取  $1/4$  板进行计算。网格划分为  $1 \times 1$ ， $2 \times 2$  和  $3 \times 3$ 。在简支和固支边界条件下，受均布载荷和集中力作用的板中心

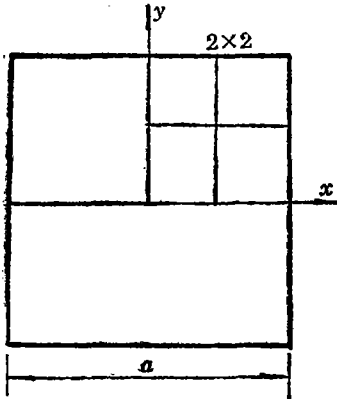


图2 一个方板及网格划分

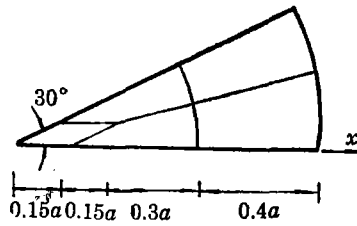


图3 简支圆板网格划分

表 1 均布载荷  $q$  下方板的中心挠度和内力

| 网 格 | 简 支 边 界   |            |          |               | 固 支 边 界   |            |               |
|-----|-----------|------------|----------|---------------|-----------|------------|---------------|
|     | $wD/qa^4$ | $M_x/qa^2$ | $Q_x/qa$ | $M_{xy}/qa^2$ | $wD/qa^4$ | $M_x/qa^2$ | $M_{xy}/qa^2$ |
| 1×1 | 0.4349    | 0.485      | 0.309    | 0.425         | 0.1737    | 0.2373     | -0.290        |
| 2×3 | 0.4130    | 0.485      | 0.319    | 0.365         | 0.1317    | 0.2339     | -0.4935       |
| 3×3 | 0.4092    | 0.482      | 0.330    | 0.347         | 0.1285    | 0.2317     | -0.5096       |
| 精确解 | 0.4062    | 0.479      | 0.338    | 0.325         | 0.1265    | 0.231      | -0.5133       |
| 乘子  | 100       | 10         | 1        | 10            | 100       | 10         | 10            |
| 坐标  | $x=0$     | $x=0$      | $x=a/2$  | $x=a/2$       | $x=0$     | $x=0$      | $x=a/2$       |
|     | $y=0$     | $y=0$      | $y=0$    | $y=a/2$       | $y=0$     | $y=0$      | $y=0$         |

表 2 固支边界受均布载荷时挠度和弯矩分布 ( $y=0$ )

| $x/a$      |            | 0        | 0.1      | 0.2       | 0.3       | 0.4       | 0.5       |
|------------|------------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $wD/qa^4$  | 1×1        | 0.001738 | 0.001597 | 0.001275  | 0.000825  | 0.000349  | 0         |
|            | 2×2        | 0.001318 | 0.001226 | 0.0009703 | 0.0005923 | 0.0002030 | 0         |
|            | 3×3        | 0.001285 | 0.001197 | 0.0009448 | 0.0005781 | 0.0001952 | 0         |
|            | 精确解        | 0.001265 | 0.001178 | 0.0009301 | 0.0005673 | 0.0001918 | 0         |
|            | $M_x/qa^2$ | 1×1      | 0.02373  | 0.02335   | 0.01789   | 0.007338  | -0.008305 |
|            | 2×2        | 0.02340  | 0.02185  | 0.01661   | 0.003554  | -0.01663  | -0.04935  |
|            | 3×3        | 0.02318  | 0.02156  | 0.01579   | 0.002434  | -0.01669  | -0.05096  |
|            | 精确解        | 0.0231   | 0.02127  | 0.01572   | 0.004307  | -0.01638  | -0.05134  |
| $M_y/qa^2$ | 1×1        | 0.02373  | 0.02226  | 0.01939   | 0.01510   | 0.00941   | 0.00230   |
|            | 2×2        | 0.02340  | 0.02189  | 0.01757   | 0.007591  | -0.002208 | -0.1423   |
|            | 3×3        | 0.02318  | 0.02159  | 0.01631   | 0.007829  | -0.02789  | -0.1520   |
|            | 精确解        | 0.0231   | 0.02124  | 0.01629   | 0.008178  | -0.02671  | -0.1540   |

位移和内力在表1中给出, 表2给出固支边界时, 沿 $y=0$ 边上的位移和弯矩分布。

算例2 一个简支方板, 受均布载荷 $q$ 作用, 它的半径为 $a$ 。由于对称, 我们仅计算板的 $1/12$ 。把板分成5个单元, 网格划分如图3所示。圆板的挠度 $w$ , 径向弯矩 $M_r$ , 周向弯矩 $M_\theta$ 和剪力 $Q_r$ , 计算结果在表3中给出, 并和精确解作了比较。表1和表2的精确解由文[11]给出。

表 3 均布载荷 $q$ 作用简支圆板挠度和内力分布( $\theta=0, \nu=0.25$ )

| $r$                  |     | 0        | 0.2      | 0.4     | 0.6     | 0.8    | 1.0     |
|----------------------|-----|----------|----------|---------|---------|--------|---------|
| $wEh^3$<br>$qa^4$    | 本文解 | 0.7384   | 0.7021   | 0.5966  | 0.4321  | 0.2253 | 0       |
|                      | 精确解 | 0.7383   | 0.7020   | 0.5965  | 0.4320  | 0.2253 | 0       |
| $M_r$<br>$qa^2$      | 本文解 | 0.2032   | 0.1950   | 0.1707  | 0.1300  | 0.0731 | 0       |
|                      | 精确解 | 0.2031   | 0.1950   | 0.1706  | 0.1300  | 0.0731 | 0       |
| $M_\theta$<br>$qa^2$ | 本文解 | 0.2032   | 0.1988   | 0.1857  | 0.1638  | 0.1331 | 0.09376 |
|                      | 精确解 | 0.2031   | 0.1988   | 0.1856  | 0.1638  | 0.1331 | 0.09375 |
| $Q_r$<br>$q$         | 本文解 | -0.00025 | -0.09999 | -0.2000 | -0.3001 | 0.4001 | -0.5001 |
|                      | 精确解 | 0        | -0.1     | -0.2    | -0.3    | -0.4   | -0.5    |

以上算例表明由本文方法获得的位移和内力收敛于精确解, 并至少有二阶收敛精度。证明了本文理论的正确性。

### 参 考 文 献

- [1] 叶开沅、纪振义, 精确有限元法, 应用数学和力学, 11(11) (1990), 937—946.
- [2] Mason, V., Rectangular elements for analysis of plate vibrations, *J. Sound Vib.*, 7(3) (1968), 437—448.
- [3] Gopalacharyulu, S., A higher order conforming, rectangular and triangular plate-bending elements, *J. Sound Vib.*, 19 (1971), 333—347.
- [4] Bogner, F.K., R.L. Fox and L.A. Schmit, Jr., The generation of inter-element compatible stiffness and mass matrices by use of interpolation formulas, *Proc. 1st Conf. on Matrix Methods in Structural Mech.*, Ohio (1965), 393—443.
- [5] Hermman, L.R., Finite element bending analysis for plates, *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, 93, EM5 (1967), 13.
- [6] Hermman, L.R., A bending analysis for plates, AD 646300 (1966), 557.
- [7] Morley, L.S.D., On the constant moment plate bending element, *Journal of Strain Analysis*, 6(1) (1971), 20.
- [8] Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method*, 3 Ed., McGraw-Hill Book Company (1977).
- [9] Irons, B. and S. Ahmad, *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horword, Ltd., Chichester, UK (1979).
- [10] Ji Zhen-yi and Yeh Kai-yuan, An exact element method for bending of nonhomogeneous thin plate, *Proceedings of the International Conference on Structural Engineering and Computation*, Beijing, APRIL (1990), 230—234.
- [11] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shell*, McGraw-Hill Book Company, Inc., 2nd Ed. (1959).

# Incompatible Curved Quadrilateral Plate Bending Element with 12 Degrees of Freedom

Ji Zhen-yi

(*Anhui Architectural Industry College, Hefei*)

Yeh Kai-yuan

(*Lanzhou University, Lanzhou*)

## Abstract

This paper presents a new curved quadrilateral plate element with 12 degrees of freedom by the exact element method<sup>[1]</sup>. The method can be used to arbitrary non-positive and positive definite partial differential equations without variation principle. Using this method, the compatibility conditions between elements can be treated very easily, if displacements and stress resultants are continuous at nodes between elements. The displacements and stress resultants obtained by the present method can converge to exact solution and have the second order convergence speed. Numerical examples are given at the end of this paper, which show the excellent precision and efficiency of the new element.

**Key words** exact element method, thin plate, curved quadrilateral element