应用数学和力学，第14卷第2期（1993年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

输送流体管道振动Housner方程的修正*

张悉德　杜　涛　张　文　沈文钧

（青岛化工学院）　（西安交通大学）

（钱伟长推荐，1990年3月23日收到）

摘　要

本文既考虑了流体速度对管道的诱发振动，又考虑了振动的管道对流体的反馈影响，推出输送流体管道振动微分方程的准确形式，并指出Housner方程是近似的.

关键词　诱发振动　反馈影响　速度场　势函数　Hamilton变分原理　耦合振动

一、引　言

输送流体管道振动与稳定性的研究，不仅有其理论上的意义，而且在工程实践中也是至关重要的．从50年代初，人们就开始进行研究，其中Housner的论文[1]具有代表性，他给出管道诱发振动微分方程式：

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+2\rho Av\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}+\rho Av^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(m_p+\rho A)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0 \tag{1.1}$$

其中：EI为管道横截面的抗弯刚度，A为管道的横截面积，m_p为空管子单位长度质量，ρ为流体密度，v为流体速度.

方程(1.1)通常称为Housner方程．后来的许多研究工作都以Housner方程为依据．方程(1.1)仅仅考虑了由于管内流体的速度对管道的诱发振动，它没有考虑振动的管道对流体的反馈影响．管道的真实振动是流固耦合振动．因此，Housner方程没有反映出输送流体管道振动的全貌，而是一个近似的方程式.

二、管道振动准确微分方程的建立

设流体以速度v在半径为a长度为l的直管内流动．管道的诱发振动假定为梁式弯曲振动．振动的管道引起管内流体的扰动假定是有势的．根据理想流体无旋运动的理论，扰动流速度场存在势函数，令这个势函数为$\Phi(r,\ \theta,\ x,\ t)$，则Φ应满足拉普拉斯(Laplace)方程.对于有确定约束条件的管道，可以求出势函数Φ的具体表达式.

假定势函数$\Phi(r,\theta,x,t)$已求出，则由理想流体动力学中的Cauchy-Lagrange积分，可得到管内任一点处的附加流体动压力为：

---

* 本文为《振动工程国际会议》论文(1990).

$$p=-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

由此不难得到沿管轴向单位长度上，作用在管壁上附加流体动压力的合力在y方向（垂直管轴方向）的投影为：

$$p|_{r=a}=-\rho\int_0^{2\pi}\frac{\Phi}{t}\Big|_{r=a}a\cos\theta d\theta \tag{2.1}$$

可见，管壁的振动对流体的反馈影响，相当于沿管子轴向有一个附加的分布压力p作用在管壁上.

在微幅振动情况下，有式$dy/dx\ll 1$成立，其中y为管道横向振动位移，x为沿管轴向坐标. 于是管内流体速度v的水平分量和垂直分量可分别表示为：

$$v_x=v,\qquad v_y=\frac{\partial y}{\partial t}+v\frac{\partial y}{\partial x}$$

这样，管道系统的动能和位能分别为：

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{m_p\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\rho A\left[v^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}+v\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\right\}dx$$

和

$$V=\frac{1}{2}\int_0^l\left\{EI\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2-p|_{r=a}\cdot y\right\}dx$$

由Hamilton变分原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V)dt=0$$

得

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left\{m_p\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2+\rho A\left[v^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}+v\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]-EI\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+p|_{r=a}\cdot y\right\}dxdt=0$$

利用分部积分法并考虑到边界条件，得

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l\left\{EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+2\rho Av\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}+\rho Av^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(m_p+\rho A)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+p|_{r=a}\right\}\delta y dxdt=0$$

因为δy任意，于是有

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+2\rho Av\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}+\rho Av^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(m_p+\rho A)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+p|_{r=a}=0 \tag{2.2}$$

把式(2.1)代入式(2.2)，则有

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+2\rho Av\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}+\rho Av^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(m_p+\rho A)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\rho\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{r=a}\cdot a\cos\theta d\theta=0 \tag{2.3}$$

式(2.2)或(2.3)就是输送流体管道振动准确微分方程式. 与Housner方程(1.1)相比较，式(2.1)或(2.3)的左端增加了第五项，这就是对Housner方程的修正式.

通常势函数$\Phi(r,\theta,x,t)$是管道振动位移y的函数，而且以积分的形式出现，因此，式(2.2)或(2.3)实际上是一个微分积分方程式.

参考文献

[1] Housner, G.W., Bending vibration of a pipe line containing flowing fluid. *J. Appl. Mech.*, June (1952), 205.

Correction for Housner's Equation of Bending Vibration of a Pipe Line Containing Flowing Fluid

Zhang Xi-de Du Tao Zhang Wen

(Qingdao Institute of Chemical Technology, Qingdao)

Shen Wen-jun

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an)

Abstract

This paper points out that Housner's equation of bending vibration of a pipe line containing flowing fluid is approximate and makes correction to it. An exact form of the vibration equation is given.

Key words induced vibration, feedback, velocity field, potential function, Hamilton's variance principle, couple vibration