

具有初挠度的柔韧圆板的振动问题*

王晋莹 陈科进

(西安公路学院, 1991年11月25日收到)

摘 要

本文推导出具有初挠度柔韧圆板的振动方程, 在相平面上讨论了运动稳定性. 用 Galerkin 法和 Lindstedt-Poincaré 摄动法求得具有初挠度圆板非线性振动的周期解, 讨论了初挠度对柔韧圆板的动力特性的影响.

关键词 柔韧圆板 初挠度 非线性振动 摄动法 轨线图

一、导 言

具有初挠度板的大变形问题, 由 И. Г. Бубнов^[1] 从造船实际出发最早提出并研究的. 以后 H. Nylander^[2] 作过进一步研究. 近年来, 随着高强度、轻重量材料的广泛使用, 仪器制造业、航空航天技术、海洋工程等领域都会碰到这类问题.

当柔韧板受到横向激扰产生大振幅振动时, 由于初挠度的存在, 这个附加动挠度就要与初挠度产生非线性耦合, 因而初挠度必然影响结构的动力特性. C. F. Shih 曾针对以往的航天器结构忽略重力效应的动力分析之不足, 研究了大跨径梁在由自重产生的静变形条件下的振动问题^[3]. 柔韧圆板在工程中有广泛的应用, 它的非线性振动问题已有许多研究, 可这些研究大都是针对没有初挠度的结构进行的. 为了研究初挠度对柔韧圆板动力特性和稳定性的影响, 本文首先导出具有微小初挠度圆板的非线性振动方程, 在相平面上讨论了解的稳定性, 用 Galerkin 法和 Lindstedt-Poincaré 摄动法^[4] 求出非线性振动的周期解, 讨论了初挠度对振动基频的影响. 结果表明, 在一定范围内, 初挠度对柔韧圆板动力特性的影响不可忽视.

二、动力学基本方程和边界条件

已知圆板大挠度方程为

$$DL(w) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r N_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + h \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q = 0 \quad (2.1)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 N_r) + \frac{Eh}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 = 0 \quad (2.2)$$

* 何福照推荐.

这里,
$$L = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$$

为微分算子, $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ 为板的抗弯刚度, E, μ 分别为板的弹性模量和泊松比, h 为板的厚度, ρ 为质量密度, N_r 为薄膜力, q 为外载荷, 圆板半径为 a . 设圆板在静载 q_0 作用下产生微小静挠度 w_0 , 受到扰动后, 动挠度为 w_1 , 则总挠度 w 可写为

$$w = w_0 + w_1 \quad (2.3)$$

对应有

$$q = q_0 + q_1 \quad (2.4)$$

$$N_r = N_0 + N_1 \quad (2.5)$$

将式(2.3)、(2.4)、(2.5)代入方程(2.1)、(2.2)中, 注意到具有微小初挠度的圆板 $N_0 = 0$, 便得出具有初挠度的柔韧圆板的动力学微分方程

$$R_1 = DL(w_1) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r N_1 \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \right] + h\rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - q_1 = 0 \quad (2.6)$$

$$R_2 = r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 N_1) + \frac{Eh}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 + Eh \frac{\partial w_0}{\partial r} \frac{\partial w_1}{\partial r} = 0 \quad (2.7)$$

其中 w_0 满足静态方程

$$DL(w_0) = q_0 \quad (2.8)$$

考虑以下支承边界条件

I. 夹支

$$\text{当 } r=a \text{ 时, } w=0, \partial w/\partial r=0$$

或写为

$$\text{当 } r=a \text{ 时, } w_0=0, \partial w_0/\partial r=0 \quad (2.9)$$

$$w_1=0, \partial w_1/\partial r=0 \quad (2.10)$$

II. 简支

$$\text{当 } r=a \text{ 时, } w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

或写为

$$\text{当 } r=a \text{ 时, } w_0=0, \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} = 0 \quad (2.11)$$

$$w_1=0, \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} = 0 \quad (2.12)$$

及以下的应力边界条件

(a) 径向自由移动

$$\text{当 } r=a \text{ 时, } N_r=0$$

或

$$N_1=0 \quad (2.13)$$

(b) 径向不可移动

$$\text{当 } r=a \text{ 时, } u_r=0$$

或

$$(1-\mu)N_1 + rdN_1/dr = 0 \quad (2.14)$$

同时, 还须考虑在板的中心 N_r 有限的条件. 满足方程(2.8)和边界条件的解 w_0 可表示为

$$w_0 = f_0(1 + C_1 r^2/a^2 + C_2 r^4/a^4) \quad (2.15)$$

对于夹支边界有

$$f_0 = q_0 a^4 / 64D, C_1 = -2, C_2 = 1 \quad (2.16)$$

对于简支边界有

$$f_0 = \frac{q_0 a^4}{64D} \frac{5+\mu}{1+\mu}, C_1 = -\frac{6+2\mu}{5+\mu}, C_2 = \frac{1+\mu}{5+\mu} \quad (2.17)$$

这里 q_0 可以是自重, 也可以是其它均布静载荷.

这样, 我们的问题归结为已知初挠度 w_0 时, 求解满足方程 (2.6)、(2.7) 和边界条件 I (a), I (b), II (a), II (b) 的附加动挠度 w_1 的动力学问题.

三、方程的求解

设附加挠度 w_1 的解可表示为

$$w_1 = h\phi(t) \left(1 + C_1 \frac{r^2}{a^2} + C_2 \frac{r^4}{a^4} \right) \quad (3.1)$$

对于不同的边界条件, 式中系数 C_1, C_2 仍由 (2.16)、(2.17) 决定, 而且

$$[\phi(t)]_{\max} = (w_1)_{\max} / h$$

我们先来求薄膜力 N_1 . 将式 (2.15)、(3.1) 代入方程 (2.7) 中, 并设 N_1 为

$$N_1 = n_1 \phi^2(t) + n_2 \phi(t) \quad (3.2)$$

利用应力边界条件 (2.13)、(2.14) 以及有限值条件, 便解得系数 n_1, n_2 的表达式为

$$n_1 = -\frac{Eh^3}{a^2} \left[C_3 + \frac{C_1^2}{4} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{C_1 C_2}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \frac{C_2^2}{6} \left(\frac{r}{a} \right)^6 \right]$$

$$n_2 = -\frac{2Eh^2}{a^2 C_2} f_0 \left[C_3 + \frac{C_1^2}{4} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{C_1 C_2}{3} \left(\frac{r}{a} \right)^4 + \frac{C_2^2}{6} \left(\frac{r}{a} \right)^6 \right]$$

式中系数 C_3 在不同应力条件下的表达式为

$$(a) C_3 = -(3C_1^2 + 4C_1 C_2 + 2C_2^2) / 12$$

$$(b) C_3 = -[3C_1^2(3-\mu) + 4C_1 C_2(5-\mu) + 2C_2^2(7-\mu)] / 12(1-\mu)$$

而 f_0, C_1, C_2 则仍由式 (2.16)、(2.17) 决定.

将式 (2.15)、(3.1)、(3.2) 代入方程 (2.6) 中, 即得到残值 $R_1 = R_1(r, t)$, 应用 Galerkin 法

$$\int_0^a R_1 w_1 r dr = 0$$

最后解得 $\phi(t)$ 应满足的方程

$$A \frac{\rho a^4}{Eh^2} \ddot{\phi}(t) + B\phi(t) + C[\phi^3(t) + 3\xi_0 \phi^2(t) + 2\xi_0^2 \phi(t)] = q^*(t) \quad (3.3)$$

这里 $\xi_0 = f_0/h, q^*(t) = a^4 q_1(t)/Eh^4$

取 $\mu = 0.3$ 时, 系数 A, B, C 的值列在表 1 中.

表 1

边界条件	A	B	C	ξ_0^*
I (a)	0.6000	5.8608	0.8571	5.2298
I (b)	0.6000	5.8608	2.7619	2.9134
II (a)	0.6414	1.4376	0.3776	3.9024
II (b)	0.6414	1.4376	2.6604	1.4702

容易看出, 方程(3.3)是一个非线性振动方程. 为了说明这个方程, 考虑两种特例:

1. 当 $\dot{\phi}(t)=0$, $q_1(t)=\text{常数}$ 时, $q^*(t)=q_1 a^4/Eh^4=\text{常数}$, 方程变为

$$B\phi + C[\phi^3 + 3\xi_0\phi^2 + 2\xi_0^2\phi] = q^*$$

它描述了具有初挠度的柔韧圆板的静力学问题, 与文[2]的结果完全相同.

2. 当 $\xi_0=0$, $q_1(t)=q\cos\Omega t$ 时, 方程变为无初挠度的圆板非线性受迫振动的方程

$$\ddot{\phi}(t) + \frac{Eh^2}{\rho a^4} [D_1\phi(t) + D_2\phi^3(t)] = D_3 \frac{q}{\rho h^2} \cos\Omega t$$

这里 $D_1=B/A$, $D_2=C/A$, $D_3=1/A$, 将系数 D_1, D_2, D_3 与 N. Yamaki^[5] 的方程作比较结果完全一致.

这样, 我们看到求动挠度 $w_1(r, t)$ 的问题归结为求解 $\phi(t)$ 的问题. 方程(3.3)是一个含有参数 ξ_0 的非线性振动微分方程, 所以欲求解 w_1 , 首先要讨论解的稳定性问题.

四、运动稳定性

重写方程(3.3), 令其中 $q_1(t)=0$ 便得

$$\ddot{\phi}(t) + \alpha_1\phi(t) + \alpha_2\phi^2(t) + \alpha_3\phi^3(t) = 0 \quad (4.1)$$

或
$$\ddot{\phi}(t) + f(\phi) = 0 \quad (4.2)$$

这里
$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{Eh^2}{\rho a^4} \cdot \frac{1}{A} (B + 2C\xi_0^2) \\ \alpha_2 &= \frac{Eh^2}{\rho a^4} \cdot \frac{3C}{A} \xi_0 \\ \alpha_3 &= \frac{Eh^2}{\rho a^4} \cdot \frac{C}{A} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

因为我们没有考虑阻尼的影响, 所以方程(4.1)是一个保守系统的运动微分方程. 这里重新引入记号, 令

$$u = \phi, \quad v = \dot{u}$$

则(4.1)式可写为

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ v = -f(u) = -(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$v = -f(u) = -(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3) \quad (4.5)$$

势能
$$U(u) = \int_0^u f(u) du = \frac{1}{2} \alpha_1 u^2 + \frac{1}{3} \alpha_2 u^3 + \frac{1}{4} \alpha_3 u^4 \quad (4.6)$$

将式(4.5)分离变量并积分有

$$v^2/2 + U(u) = E \quad (4.7)$$

E 为系统的总能量.

对于二个一阶微分方程(4.4)、(4.5)所描述的系统, 容易知道, 当 $\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 < 0$, 或 $\xi_0 < \xi_0^*$ 时, 系统只有一个奇点 $A_1(0, 0)$, 由李亚普诺夫定理可判定: 这个奇点是稳定的中心奇点. 当 $\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 > 0$ 或 $\xi_0 > \xi_0^*$ 时, 系统有三个奇点, 分别是 $B_1(u_1, 0)$, $B_2(u_2, 0)$, $B_3(u_3, 0)$, 其中

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{1}{2\alpha_3} (-\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3}), \quad u_3 = \frac{1}{2\alpha_3} (-\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3})$$

同样, 还可以判定: B_2 为鞍点, 即不稳定奇点; B_1, B_3 是稳定的中心奇点. 这里 ξ^* 满足 $\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 = 0$.

由以上讨论可知, 方程(3.3)中的参数值 ξ^* 只要有微小的改变, 相图的基本结构就会发生变化, 所以 ξ^* 是参数 ξ_0 的分支值. 我们计算了不同边界条件下的 ξ^* 值列在表 1 中. 不难看出, 在 ω_0 为小挠度假定的前提下, 所有 ξ_0 的值始终小于分支值 ξ^* . 即本文所讨论的非线性振动, 只可能是围绕中心点 $A_1(0, 0)$ 的周期运动, 因而运动是中心稳定的.

为了清楚地了解大范围内的运动情况, 我们给出系统的相平面图. 图 1 给出了夹支不可移圆板在 $\xi_0 < \xi^*$ 情况下的轨线图. 由此图可见, 轨线是一族围绕奇点 A_1 的闭曲线, 这表明运动是周期的, 对应于不同的能量 E , 有不同的闭轨线. 当 E 取小值时, 即微幅振动 (如图 1, $E=1$ 时), 闭轨线基本是对称的, 运动将由单个谐波来描述. 随着 E 的增大振幅也增大 (图中 $E=5$ 时), 闭轨线对 v 轴明显地不对称, 可以预见, 非线性系统的振动将有高次谐波出现.

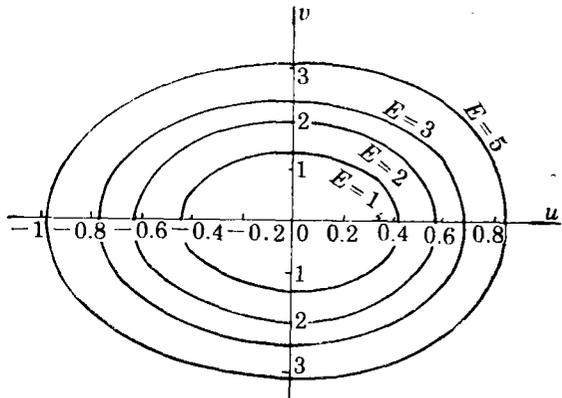


图1 夹支不可移圆板当 $\xi_0 = 0.2$ 时的轨线图

五、中心点附近的周期解

为了得到中心点附近的周期解, 可以有不同的方法. 本文采用 Lindstedt-Poincaré 摄动法^[4]求解.

不妨将方程(1.1)写成

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \left(\phi + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \phi^2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \phi^3 \right) = 0 \tag{5.1}$$

这里 $\omega_0^2 = \alpha_1$. 为了方便求解, 作变换 $\tau = \omega t$, 并设

$$\phi(\tau) = \varepsilon \phi_1(\tau) + \varepsilon^2 \phi_2(\tau) + \varepsilon^3 \phi_3(\tau) + \dots \tag{5.2}$$

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots \tag{5.3}$$

式中 ε 是一个与振幅有关的无量纲小量. 将式(5.2)、(5.3)代入(5.1)中, 令 ε 同次幂的系数为零, 得一系列的初值问题

$$\phi_1'' + \phi_1 = 0 \tag{5.4}$$

$$\omega_0^2 (\phi_2'' + \phi_2) = -2\omega_0 \omega_1 \phi_1'' - \alpha_2 \phi_1^2 \tag{5.5}$$

$$\omega_0^2 (\phi_3'' + \phi_3) = -2\omega_0 \omega_1 \phi_2'' - 2\alpha_2 \phi_1 \phi_2 - (\omega_1^2 + 2\omega_0 \omega_2) \phi_1'' - \alpha_3 \phi_1^3 \tag{5.6}$$

.....

这里 $\phi'' = d^2\phi/d\tau^2$. 求解(5.4)、(5.5)、(5.6); 并注意消除长期项, 将解得的结果代入式(5.2)、(5.3)得

$$\phi(t) = \varepsilon \phi_0 \cos(\omega t + \beta_0) - \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \varepsilon^2 \left[1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega t + 2\beta_0) \right]$$

$$+ \frac{1}{32} \left(\frac{2\alpha_2^2}{3\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right) \varepsilon^3 \phi_0^3 \cos(3\omega t + 3\beta_0) + O(\varepsilon^4) \quad (5.7)$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{9\alpha_1\alpha_3 - 10\alpha_2^2}{24\alpha_1^2} \varepsilon^2 \phi_0^2 \right) + O(\varepsilon^3) \quad (5.8)$$

这里 ϕ_0 和 β_0 是与初始条件有关的常数, 将式(4.3)代入式(5.7)、(5.8)得

$$\begin{aligned} \phi(t) = & \varepsilon \phi_0 \cos(\omega t + \beta_0) - \varepsilon^3 \phi_0^3 \frac{3C\xi_0}{2(B+2C\xi_0^2)} \left[1 - \frac{1}{3} \cos(2\omega t + 2\beta_0) \right] \\ & + \frac{1}{32} \varepsilon^3 \phi_0^3 \frac{8C^2\xi_0^2 + BC}{(B+2C\xi_0^2)^2} \cos(3\omega t + 3\beta_0) + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(B+2C\xi_0^2)}{A}} \frac{Eh^2}{\rho a^4} \left(1 + \frac{3BC - 24C^2\xi_0^2}{8(B+2C\xi_0^2)^2} \varepsilon^2 \phi_0^2 \right) + O(\varepsilon^3) \quad (5.10)$$

综合式(5.9)、(5.10)和(3.1), 便可得到本问题在中心点 A_1 附近的周期解 $w_1(r, t)$.

式(5.10)描述周期振动的基频, 显然, 它与振动的振幅或初始总能量 E 有关. 若令 $\phi_0 \varepsilon = \phi_m$, 如前所述 $\phi_m = (\omega_1)_{\max}/h$, 这样式(5.10)变为

$$\omega = \sqrt{\frac{(B+2C\xi_0^2)}{A_1}} \frac{Eh^2}{\rho a^4} \left(1 + \frac{3BC - 24C^2\xi_0^2}{8(B+2C\xi_0^2)^2} \phi_m^2 \right) \quad (5.11)$$

在初挠度为零的情况下, 式(5.11)变为

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{Eh^2}{\rho a^4} \left(1 + \frac{3C}{8B} \phi_m^2 \right) \quad (5.12)$$

此式与文[5]的结果一致.

六、讨 论

由式(5.11)可知, 非线性振动基频与初挠度 ξ_0 有关, 与振幅 ϕ_m 有关, 可将式(5.11)写为

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{3BC - 24C^2\xi_0^2}{8(B+2C\xi_0^2)^2} \phi_m^2 \quad (6.1)$$

这里, $\omega_0 = \sqrt{\alpha_1} = \sqrt{\frac{(B+2C\xi_0^2)}{A}} \frac{Eh^2}{\rho a^4}$

是线性振动的基频. 从式(6.1)可看出, 当 $\xi_0 < \sqrt{B/8C}$ 时, 系统是硬弹簧系统, 而当 $\xi_0 > \sqrt{B/8C}$ 时, 系统变为软弹簧系统.

$\xi_0 = \sqrt{B/8C}$ 是一个分界线. 图2给出简支不可移圆板对应不同 ξ_0 值时的振幅—频率图. 我们有趣地发现, 当 ξ_0 从零逐渐增大时, 曲线由硬弹簧区域转向软弹簧区. 分界线则表明, 当 $\xi_0 = \xi_0$ 时圆板非线性振动的频率与振幅无关. 从物理上可以解释为, 随着初挠度的增加, 圆板的刚度随之降低. 当然, 考查 ξ_0 的值得知, 在我们讨论的范围内, 振动系统仍是硬弹簧系统. 由式(5.9)、(6.1)可以清楚地看出, 初挠度对柔韧圆板动力特性的影响程度. 这个结果对工程有实际意义. 例如汽车及其它机械零件空载实验和满载运行情况下振动基频会出现差别, 宇航飞行器地面实验资料和失重状况下动力参数间的差别, 都是由于初挠度所致.

2. 本文是在假定初挠度形式与动挠度振型一样的情况下进行讨论的, 对于其它形式的初挠度可以进行类似的计算和讨论.

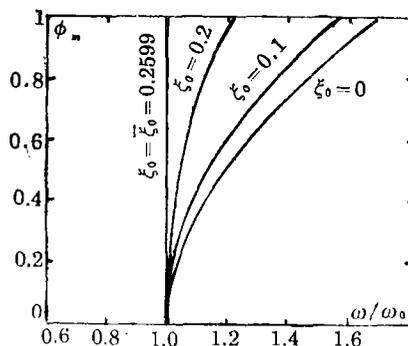


图2 简支不可移圆板对于不同 ξ_0 的振幅—频率图

参 考 文 献

- [1] Вольмир А. С., *Гибкие Пластинки и Оболочки*, Гостехиздат, Москва (1956).
- [2] Nylander, H., Die durchschlaglast von platten, Oesterr, *Ingenieur-Arch.*, 9(2-3) (1955), 181—196.
- [3] Shih, Choon-Foo, Jay C. Chen and John Garba, Vibration of a large space beam under gravity effect, *ATAA J.*, 24 (1986), 1213—1216.
- [4] Nayfeh, A.H. and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley-Interscience (1979).
- [5] Yamaki, N., Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates, *Z. Angew. Math. Mech.*, 41 (1961), 501—510.

Vibration Problems of Flexible Circular Plates with Initial Deflection

Wang Jin-ying Chen Ke-jin

(Xi'an Highway Institute, Xi'an)

Abstract

In this paper, the differential equations of flexible circular plates with initial deflection are derived. The stability of motion is investigated in phase plane. The periodical solutions of nonlinear vibration for circular plates with initial deflection are obtained by use of Galerkin method and Lindstedt-Poincaré perturbation method. The effect of initial deflection on the dynamic behavior of the flexible plates are also discussed.

Key words flexible circular plate, initial deflection, nonlinear vibration, perturbation method, trajectories