应用数学和力学，第14卷第1期（1993年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

KKM技巧及其应用*

张石生　　马意海

（四川大学数学系）（徐州师范学院）

（1991年11月6日收到）

摘　　要

本文介绍KKM技巧，并用以建立了新的抉择定理和重合定理，它们是[2，10，11，15，16]等近期文献中一些重要结果的推广．

关键词　H-空间　KKM映象　抉择定理　重合定理

一、引　　言

对于平面上一块三角形△，分别以其顶点x_0，x_1，x_2为中心作三个圆面M_0，M_1，M_2，使得△的边$x_ix_j\subset M_i\cup M_j(i,\ j=0,\ 1,\ 2;\ i<j)$，且$\triangle\subset M_0\cup M_1\cup M_2$，则易证$\bigcap\limits_{i=0}^{2}M_i$至少含有△的一点，如图1所示．

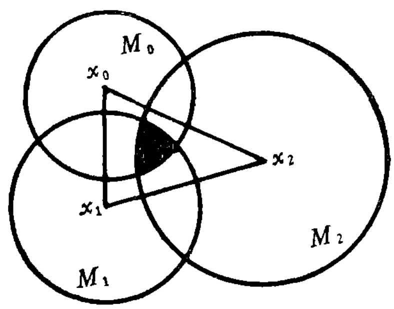

图　1

这个简单的几何问题，实际上包含着关于单形的一个深刻性质．这一性质在1929年由Knaster，Kuratowski和Mazurkiewicz所揭示[12]，这就是后来称之为KKM定理的著名结果．

KKM定理　设$\triangle_n=[x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n]$是$n$维欧氏空间$R^n$中的一个$n$维单形，$M_0,M_1$，…，$M_n$都是$R^n$中的闭集．若对任一子集$I\subset\{0,\ 1,\ \cdots,\ n\}$，均有

$$\mathrm{co}\{x_i:i\in I\}\subset\bigcup_{i\in I}M_i,$$

则$\triangle_n\cap\bigcap\limits_{i=0}^{n}M_i\neq\phi$．

---

* 本文是在中国科学院数学研究所访问期间完成的，作者对数学所的支持表示感谢．

KKM 定理的证明基于 Brouwer 不动点定理或组合论中的 Sperner 引理，例如见[5]，也可见[1].

利用可缩集来代替凸包，Horvath[10]将KKM定理推广到了H-空间[2]. 所谓H-空间，乃是一序对$(X, \{\Gamma_A\})$，其中X是拓扑空间，$\{\Gamma_A\}$是给定的一族X中的非空可缩子集，用X中的一切有限子集A来编号，且$A\subset A'$蕴涵$\Gamma_A\subset\Gamma_{A'}$.在H-空间$(X, \{\Gamma_A\})$中，集$D\subset X$称为关于集$C\subset X$是H-凸的，如果对任一有限集$A\subset C$，有$\Gamma_A\subset D$；特别，当$C=D$时，简称$D$是H-凸的. 显然，若$D\subset X$是H-凸的，则$(D, \{\Gamma_{A\cap D}\})$也是一个H-空间. 集$L\subset X$称为是H-紧的，如果对任一有限集$A\subset X$，存在紧的H-凸集$D\subset X$，使得$L\cup A\subset D$.集$M\subset X$称为是紧闭的（紧开的），如果$M$相对于$X$的每一紧子集是闭的（开的）.

若X是 Hausdorff 线性拓扑空间，对任何有限集$A\subset X$，置$\Gamma_A=\mathrm{co}A$，则$(X, \{\Gamma_A\})$便是一H-空间，且X的任何凸子集是H-凸的，任何紧凸子集是H-紧的. 同样，H-空间及H-紧性也包括了凸空间及c-紧性[13]为特殊情形.

据[10]，可将H-空间中的KKM定理叙述为：

设$(X, \{\Gamma_A\})$是H-空间，$x_0, x_1, \cdots, x_n$是X中的$n+1$个点（未必相异），$M_0, M_1, \cdots, M_n$是X中的$n+1$个紧闭子集. 若对任何$I\subset\{0, 1, \cdots, n\}$，有

$$\Gamma\{x_i: i\in I\}\subset\bigcup_{i\in I}M_i,$$

则$\bigcap_{i=0}^{n}M_i\neq\phi$.

以KKM 定理为基础，可导出一种适用性很广的论证技巧——KKM 技巧. 本文的目的是介绍这种技巧，并用以建立起新的非线性抉择定理和重合定理，推广了近期文献中某些重要结果.

二、KKM 技巧

KKM定理之所以受到重视，是由于这一定理可以推广为无穷维形式. 这种推广首先是由Ky Fan[6]给出的，并需借助于KKM映象来表达，为更具一般性，我们在H-空间中将其叙述如下：

定义 设X是一非空集，$(Y, \{\Gamma_A\})$是H-空间，$F: X\to 2^Y$是集值映象. 若对任何有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，相应地存在有限集$\{y_1, \cdots, y_n\}\subset Y$，使得对任一子集$I\subset\{1,\cdots,n\}$，有

$$\Gamma\{y_i: i\in I\}\subset\bigcup_{i\in I}F(x_i),$$

则称F为广义KKM映象. 特别，当$X=Y$，且$y_i\equiv x_i$ $(i=1, \cdots, n)$时，称F为KKM映象.

F-**KKM定理** 对于上述广义 KKM 映象$F: X\to 2^Y$，若对每一$x\in X$，$F(x)$在Y中是紧闭的，则集族$\{F(x): x\in X\}$具有有限交性质；若还存在$x_0\in X$，使得$F(x_0)$为紧集，则

$$\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi.$$

证 对于任一有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，因$F$是广义 KKM 映象，故存在有限集$\{y_1, \cdots, y_n\}\subset Y$，使对任何$I\subset\{1, \cdots, n\}$，有

$$\Gamma\{y_i: i\in I\}\subset\bigcup_{i\in I}F(x_i).$$

于是，据 KKM定理得 $\bigcap_{i=1}^{n}F(x_i)\neq\phi$，这就表明集族$\{F(x):x\in X\}$具有有限交性质. 进而，若$F(x_0)$为紧集，则因这紧集中的闭子集族$\{F(x)\cap F(x_0):x\in X\}$具有有限交性质，故必

$$\bigcap_{x\in X}(F(x)\cap F(x_0))\neq\phi,$$

即 $\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$. 证毕.

F-KKM定理在处理许多非线性问题中起着重要的作用，而且逐渐形成为一种独具特色的KKM技巧. 这种技巧的要点是：根据所论问题的性质和条件，适当地引进一个映象$F:X\to 2^Y$，使得

（1） F是广义KKM映象，并满足F-KKM定理的条件. 于是，根据

$$\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$$

去求问题的解；或者

（2） 可证F不是广义 KKM 映象. 于是，存在有限集$\{x_1, \cdots, x_n\}\subset X$，具有某种匹配性质[7]：即对任何$\{y_1, \cdots, y_n\}\subset Y$，有子集$I\subset\{1, \cdots, n\}$，使得

$$\Gamma\{y_i: i\in I\}\cap\bigcap_{i\in I}(Y\backslash F(x_i))\neq\phi.$$

由此给出问题的解.

下面列举几个简单例子，说明这一技巧的应用.

例1 极值问题[8]

关于极值存在性的最重要结果是 Weierstrass 定理，即紧集上的下半连续函数必有最小值. 但这一定理沉重地依赖于紧性条件，因此Mazur，Schauder 于1936年又给出下列结果[14]：

Mazur-Schauder 定理 设E是自反 Banach 空间，C是E中的闭凸集，φ是C上的下半连续、下有界的凸泛函，且是强制的(即 $\lim_{\|x\|\to+\infty}|\varphi(x)|=+\infty$)，则存在$x_0\in C$，使得

$$\inf_{x\in C}\varphi(x)=\varphi(x_0).$$

证 令$d=\inf_{x\in C}\varphi(x)$. 由$\varphi$的强制性，存在$\rho>0$，使得

$$\varphi(x)\geqslant d+1\qquad(\forall x\in C\backslash K)$$

其中$K=C\cap\{x\in E:\|x\|\leqslant\rho\}$. 故只需证存在$x_0\in K$，使$\varphi(x_0)\leqslant\varphi(x)(\forall x\in K)$即可. 令

$$F(x)=\{y\in K:\varphi(y)\leqslant\varphi(x)\},$$

则对任何有限集$A\subset K$，有 $\mathrm{co}A\subset\bigcup_{x\in A}F(x)$. 对于$\Gamma_A=\mathrm{co}A$及$E$的弱拓扑，$F:K\to 2^E$是KKM映象，且取紧值. 故据$F$-KKM 定理，$\bigcap_{x\in K}F(x)\neq\phi$. 取 $x_0\in\bigcap_{x\in K}F(x)$，即得所证.

例2 不动点问题

许多重要的不动点定理可以利用 KKM 技巧而得出，例如：

Browder **不动点定理**[3] 设$(X, \{\Gamma_A\})$是紧H-空间，$B:X\to 2^X$是集值映象，满足

（i） 对每一$x\in X$，$B(x)$是非空H-凸的；

（ii） 对每一$y\in X$，$B^{-1}(y)$是开的，

则存在$x_0\in X$，使得$x_0\in B(x_0)$。

证 令$F(y)=X\backslash B^{-1}(y)$，则$F:X\to 2^X$不是KKM映象；因若不然，则据$F$-KKM定理，存在$y_0\in\bigcap_{y\in X}F(y)\neq\phi$，从而$y\notin B(y_0)$，$\forall y\in X$，即$B(y_0)=\phi$，矛盾。因此，必存在有限集$A\subset X$，使得

$$\Gamma_A\cap\bigcap_{y\in A}B^{-1}(y)\neq\phi.$$

取$x_0\in\Gamma_A\cap\bigcap_{y\in A}B^{-1}(y)$，则$y\in B(x_0)$，$\forall y\in A$。因$B(x_0)$是H-凸的，故$\Gamma_A\subset B(x_0)$。因此得$x_0\in B(x_0)$。

例3 鞍点问题

设E是Hausdorff线性拓扑空间，X是E的紧凸子集，函数$\varphi:X\times X\to(-\infty,+\infty)$满足下列条件：

（i） $\varphi(x,y)$关于x下半连续，关于y是0-广义拟凹的[4]；

（ii） $\varphi(x,y)$关于y上半连续，关于x是0-广义拟凸的。

则存在φ的鞍点$(\tilde{x},\tilde{y})\in X\times X$，即有

$$\varphi(\tilde{x},y)\leqslant\varphi(\tilde{x},\tilde{y})\leqslant\varphi(x,\tilde{y}),\ \forall x,y\in X.$$

证 令

$F_1(y)=\{x\in X:\varphi(x,y)\leqslant 0\}$，$F_2(x)=\{y\in X:\varphi(x,y)\geqslant 0\}$，对任何有限集$A\subset X$，取$\Gamma_A=\mathrm{co}A$。据[4，命题2.1]，$F_1$，$F_2:X\to 2^X$都是广义KKM映象。又$F_1$，$F_2$都取紧值，故由$F$-KKM定理，

$$\bigcap_{y\in X}F_1(y)\neq\phi,\ \bigcap_{x\in X}F_2(x)\neq\phi.$$

取$\tilde{x}\in\bigcap_{y\in X}F_1(y)$，$\tilde{y}\in\bigcap_{x\in X}F_2(x)$，则$(\tilde{x},\tilde{y})$即是$\varphi$的鞍点。

以下记$\xi(D,Y)$为所有D到Y内的连续（单值）映象的集，L_A为包含$L\cup A$的一切紧的H-凸集之交，特别A为单点集$\{x\}$时，记作L_x。在下面两节，我们分别应用KKM技巧来建立新的抉择定理和重合定理。

三、抉择定理

定理1 设$(X,\{\Gamma_A\})$是H-空间，Y是拓扑空间，$(E,\leqslant)$是Riesz空间，α，$\beta\in E$是二给定的元，$s\in\xi(X,Y)$，映象f，$g:X\times Y\to E$满足

（i） 对每一$y\in Y$，集$\{x\in X:g(x,y)\nleqslant\alpha\}$关于集$\{x\in X:f(x,y)\nleqslant\beta\}$是H-凸的；

（ii） 对每一$x\in X$，集$\{y\in Y:f(x,y)\leqslant\beta\}$在$Y$中是紧闭的；

（iii） 存在H-紧集$L\subset X$及紧集$K\subset Y$，使对任一$x\in X$，当$s(x)\in Y\backslash K$时，存在$\xi\in L_x$，使得

$$f(\xi,s(x))\nleqslant\beta.$$

则下列结论之一成立：

（1） 存在$\tilde{x}\in X$，使得$g(\tilde{x},s(\tilde{x}))\nleqslant\alpha$；

（2） 存在$\tilde{y}\in\overline{s(X)\cap K}$，使得

$$f(x,\ \tilde{y})\leqslant\beta,\ \forall x\in X.$$

证 令$F(x)=\{y\in Y:f(x,\ y)\leqslant\beta\}$，考察集值映象$s^{-1}F:X\to 2^X$.

如果$s^{-1}F$不是KKM映象，则存在有限集$A\subset X$，使得

$$\Gamma_A\cap\bigcap_{x\in A}(X\backslash s^{-1}F(x))\neq\phi.$$

于是有$\tilde{x}\in\Gamma_A$，使$\tilde{x}\in X\backslash s^{-1}F(x)$，$\forall x\in A$，即$x\notin F^{-1}s(\tilde{x})$，$\forall x\in A$，从而

$$A\subset\{x\in X:f(x,\ s(\tilde{x}))\nleqslant\beta\}.$$

据条件(i)，得

$$\tilde{x}\in\Gamma_A\subset\{x\in X:g(x,\ s(\tilde{x}))\nleqslant\alpha\}.$$

所以$g(\tilde{x},\ s(\tilde{x}))\nleqslant\alpha$，结论(1)成立.

如果$s^{-1}F$是KKM映象，则对每一有限集$B\subset X$，在 H-空间$(L_B,\ \{\Gamma_{A\cap L_B}\})$中，映象

$$\tilde{F}:L_B\to 2^{L_B},\ x\mapsto s^{-1}F(x)\cap L_B$$

也是KKM的. 由条件(ii)及L_B的紧性知，$\forall x\in L_B$，$\tilde{F}(x)$是紧的. 因此据 F-KKM 定理，得

$$\bigcap_{x\in L_B}\tilde{F}(x)=L_B\cap\bigcap_{x\in L_B}s^{-1}F(x)\neq\phi.$$

下证 $\overline{s(X)\cap K}\cap\bigcap_{x\in X}F(x)\neq\phi$:

设不然，则

$$\overline{s(X)\cap K}\subset\bigcup_{x\in X}(Y\backslash F(x)).$$

因 $\overline{s(X)\cap K}$ 是紧的，$Y\backslash F(x)$是紧开的，故存在有限集$B_1\subset X$，使得

$$\overline{s(X)\cap K}\subset\bigcup_{x\in B_1}(Y\backslash F(x)).$$

因此

$$s^{-1}(K)\subset s^{-1}\Big(\bigcup_{x\in B_1}(Y\backslash F(x))\Big)\subset X\backslash\bigcap_{x\in L_{B_1}}s^{-1}F(x).$$

注意到$x\in L_{B_1}$蕴涵$L_x\subset L_{B_1}$，有

$$L_{B_1}\cap\bigcap_{\xi\in L_{B_1}}s^{-1}F(\xi)\subset\{x\in X:x\in\bigcap_{\xi\in L_x}s^{-1}F(\xi)\}$$

$$=\{x\in X:s(x)\in\bigcap_{\xi\in L_x}F(\xi)\}$$

$$\subset s^{-1}(K).$$

上式最后一个包含关系是根据条件(iii)；因为否则，将有$x'\in X$，使

$$s(x')\in\bigcap_{\xi\in L_{x'}}F(\xi),\ 且x'\notin s^{-1}(K),$$

即

$s(x')\notin K$，且$f(\xi,\ s(x'))\leqslant\beta$，$\forall\xi\in L_{x'}$，这与条件(iii)相矛盾. 于是得

$$L_{B_1}\cap\bigcap_{\xi\in L_{B_1}}s^{-1}F(\xi)\subset X\backslash\bigcap_{x\in L_{B_1}}s^{-1}F(x),$$

从而

$$L_{B_1}\cap\bigcap_{x\in L_{B_1}}s^{-1}F(x)=\phi.$$

这与已证的 $\bigcap_{x\in L_{B_1}}\tilde{F}(x)\neq\phi$ 相矛盾．

因此，存在 $\tilde{y}\in\overline{s(X)\cap K}\cap\bigcap_{x\in X}F(x)$，即 $\tilde{y}\in\overline{s(X)\cap K}$，且

$$f(x,\ \tilde{y})\leqslant\beta,\ \forall x\in X.$$

结论(2)成立．证毕．

注1　[10]中的一个主要结果即命题1，是定理1在下列情况下的一个特殊情形：

$E=R$（实数集），$\alpha=\beta=\lambda\in R$,

$L=K=X=Y$为紧拓扑空间，

$\Gamma_A=\bigcap_{X\times R}\{S(y,\ r):A\subset S(y,\ r)\}$（见[10]），

$s=I_X$（恒等映象）．

定理1也是[16，定理3]和[11，定理5.1]的推广．以外，在[2，定理2]中，令

$$f_1(x,\ y)=g_1(x,\ y)=f(x,\ y)-\varphi(x)+\varphi(y),$$

则对于f_1，$g_1:X\times X\to E$及$\alpha=\beta=0\in E$，$s=I_X$（恒等映象），由[2，命题1，7，8]易知[2，定理2]中诸条件已蕴涵了定理Ⅰ的条件，并对f_1，g_1引用定理1即得[2，定理2]的结论．类似地，在[2，定理3]中'令

$f_1(x,\ y)=-f(y,\ x,\ y)$，$g_1(x,\ y)=f(y,\ y,\ x)$，则在[2，定理3]的条件下，对$f_1, g_1:X\times X\to E$及$\alpha=\beta=0\in E$，$s=I_X$可引用定理1，并得[2,定理3]的结论．因此，定理1也包含了[2,定理2,3]为特例．

四、重合定理

定理2　设$(X,\ \{\Gamma_A\})$是H-空间，Y和Z都是拓扑空间，P，$Q:X\to 2^Y$都是集值映象，$T:X\to 2^Z$是上半连续集值映象，$s\in\zeta(X,\ Y)$．假设下列条件满足：

(i)　对每一$x\in X$，$P(x)$为Y中的开集；

(ii)　对每一$x\in X$，$s^{-1}P(x)\subset s^{-1}Q(x)$，且$Q^{-1}(sT(x))$关于$P^{-1}(sT(x))$是H-凸的；

(iii)　存在H-紧集$L\subset X$及紧集$K\subset Y$，使得

(a)　$\overline{s(Z)\cap K}\subset P(X)$，

(b)　$X\backslash T^{-1}s^{-1}(K)\subset\{x\in X:x\in T^{-1}s^{-1}Q(L_x)\}$，

(c)　对任何有限集$A\subset X$，

$L_A\subset T^{-1}s^{-1}Q(L_A)$蕴涵$L_A\backslash T^{-1}s^{-1}(K)\subset T^{-1}s^{-1}P(L_A)$．则存在$x_0\in X$，使得

$$sT(x_0)\cap Q(x_0)\neq\phi.$$

证　对每一$x\in X$，令

$$F(x)=X\backslash T^{-1}s^{-1}P(x).$$

如果能够证明$F:X\to 2^X$不是KKM映象，则存在有限集$A\subset X$，使得

$$\Gamma_A\cap\bigcap_{x\in A}T^{-1}s^{-1}P(x)\neq\phi.$$

于是有$x_0\in\Gamma_A$，使$x_0\in T^{-1}s^{-1}P(x)$，$\forall x\in A$，即$A\subset P^{-1}(sT(x_0))$．由条件(ii)得

$$x_0\in\Gamma_A\subset Q^{-1}(sT(x_0)),$$

所以$Q(x_0)\cap sT(x_0)\neq\phi$，结论得证.

下证$F:X\to 2^X$不是 KKM 映象. 设相反，则对任何有限集$B\subset X$，映象

$$\tilde{F}:L_B\to 2^{L_B},\quad x\mapsto F(x)\cap L_B$$

在紧H-空间$(L_B,\ \{\Gamma_{A\cap L_B}\})$中也是 KKM 映象，且取闭值. 故由$F$-KKM 定理，得

$$\bigcap_{x\in L_B}\tilde{F}(x)=L_B\cap\bigcap_{x\in L_B}(X\backslash T^{-1}s^{-1}P(x))$$

$$=L_B\backslash T^{-1}s^{-1}P(L_B)\neq\phi,$$

即$L_B\not\subset T^{-1}s^{-1}P(L_B)$.

另一方面，由条件(i)及(iii)(a)知，存在某一有限集$B_1\subset X$，使得

$$\overline{s(Z)\cap K}\subset P(B_1).$$

因而$s^{-1}(K)\subset s^{-1}P(B_1)$，由此及条件(ii)得

$$T^{-1}s^{-1}(K)T\subset T^{-1}s^{-1}P(B_1)\subset T^{-1}s^{-1}P(L_{B_1})\subset T^{-1}s^{-1}Q(L_{B_1}).\qquad (*)$$

再注意到$x\in L_{B_1}$蕴涵$L_x\subset L_{B_1}$及条件(iii)(b)，得

$$L_{B_1}\backslash T^{-1}s^{-1}Q(L_{B_1})\subset\{x\in X: x\notin T^{-1}s^{-1}Q(L_x)\}$$

$$\subset T^{-1}s^{-1}(K)\subset T^{-1}s^{-1}Q(L_{B_1}).$$

这表明$L_{B_1}\subset T^{-1}s^{-1}Q(L_{B_1})$. 于是，由条件(iii)(c)有$L_{B_1}\backslash T^{-1}s^{-1}(K)\subset T^{-1}s^{-1}P(L_{B_1})$，并由(*)式得

$$L_{B_1}\subset T^{-1}s^{-1}P(L_{B_1}).$$

这与已证的$L_{B_1}\not\subset T^{-1}s^{-1}P(L_{B_1})$相矛盾. 所以$F:X\to 2^X$不是 KKM 映象. 证毕.

注意，若$Z=X$，且T是恒等映象I_X，则条件(i)可减弱为$P(x)$在Y中是紧开的，此时$\tilde{F}(x)$仍为闭集，以上证明仍能通过，故定理 2 仍成立. 于是有

推论1 设$(X,\ \{\Gamma_A\})$是H-空间，Y是拓扑空间，$P,\ Q:X\to 2^Y$，$s\in\zeta(X,\ Y)$，满足下列条件(i)$'$～(iii)$'$:

(i)$'$对每一$x\in X$，$P(x)$在Y中是紧开的;

(ii)$'$，(iii)$'$即定理 2 中的条件(ii)，(iii)，其中$T=I_X$.

则存在$x_0\in X$，使得$s(x_0)\in Q(x_0)$.

注2 推论 1 是[15，定理6]，[11，定理3.1及其推论]在H-空间的推广.

作为定理 2 的一个应用，我们再给出一个极小极大不等式:

推论2 设$(X,\ \{\Gamma_A\})$是H-空间，Y和Z都是拓扑空间，$T:X\to 2^Z$是取非空值的上半连续映象，$s\in\zeta(Z,\ Y)$，函数$\varphi,\ \psi:X\times Y\to(-\infty,\ +\infty]$满足下列条件:

1° $\varphi(x,\ y)\leqslant\psi(x,\ y)$，$\forall(x,\ y)\in X\times Y$;

2° 对每一$x\in X$，函数$y\mapsto\varphi(x,\ y)$在Y中是下半连续的;

3° 存在$\alpha\in(-\infty,\ +\infty]$，使对每一$x\in X$，集$Q^{-1}(sT(x))$关于$P^{-1}(sT(x))$是H-凸的，这里$P(x)=\{y\in Y:\varphi(x,\ y)>\alpha\}$，$Q(x)=\{y\in Y:\psi(x,\ y)>\alpha\}$;

4° 存在H-紧集$L\subset X$及紧集$K\subset Y$，使对任一有限集$A\subset X$，有

$$T(L_A)\cap\{z\in Z:\sup_{\xi\in L_A}\varphi(\xi,\ s(z))\leqslant\alpha\}\subset s^{-1}(K).$$

则下列结论之一成立:

(1) 存在$(x_0,\ z_0)\in G(T)$(T的图象)，使得

$$\psi(x_0,\ s(z_0))>\alpha;$$

（2） 存在$y_0\in\overline{s(Z)}\cap K$，使得

$$\sup_{x\in X}\varphi(x,\ y_0)\leqslant\alpha.$$

特别，当$\alpha=\sup\limits_{(x,\ z)\in G(T)}\psi(x,\ s(z))$满足条件4°时，有

$$\min_{y\in\overline{s(Z)}\cap K}\ \sup_{x\in X}\varphi(x,\ y)\leqslant\sup_{(x,\ z)\in G(T)}\psi(x,\ s(z)).$$

证 当$\alpha=+\infty$时，结论显然成立．下设$\alpha<+\infty$．对于$P,\ Q:\ X\to 2^Y$，考察定理2的条件：

i) 据2°，对每一$x\in X$，$P(x)$为Y中的开集．

ii) 据1°，3°，定理2的条件(ii)满足．

iii) 据4°，对任何有限集$A\subset X$有

$$T(L_A)\backslash s^{-1}P(L_A)=T(L_A)\backslash\bigcup_{x\in L_A}\{z\in Z:\varphi(x,\ s(z))>\alpha\}$$

$$=\bigcap_{x\in L_A}T(L_A)\cap\{z\in Z:\varphi(x,\ s(z))\leqslant\alpha\}$$

$$=T(L_A)\cap\{z\in Z:\ \sup_{x\in L_A}\varphi(x,\ s(z))\leqslant\alpha\}$$

$$\subset s^{-1}(K).$$

由此易得

$$L_A\backslash T^{-1}s^{-1}(K)\subset T^{-1}s^{-1}P(L_A).$$

即定理2的条件(iii)(c)满足．又$\forall x\in X\backslash T^{-1}s^{-1}(K)$有

$$x\in L_x\backslash T^{-1}s^{-1}(K)\subset T^{-1}s^{-1}P(L_x)\subset T^{-1}s^{-1}Q(L_x),$$

故$X\backslash T^{-1}s^{-1}(K)\subset\{x\in X:x\in T^{-1}s^{-1}Q(L_x)\}$，即定理2的条件(iii)(b)也满足．

如果定理2的条件(iii)(a)满足，则据定理2，存在$x_0\in X$，使得$sT(x_0)\cap Q(x_0)\neq\phi$．故存在$(x_0,\ z_0)\in G(T)$，使得$s(z_0)\in Q(x_0)$，即

$$\psi(x_0,\ s(z_0))>\alpha;$$

如果定理2的条件(iii)(a)不满足，则存在$y_0\in\overline{s(Z)}\cap K$，使得

$$y_0\in Y\backslash P(X)=\bigcap_{x\in X}\{y\in Y:\varphi(x,\ y)\leqslant\alpha\},$$

故$\sup\limits_{x\in X}\varphi(x,\ y_0)\leqslant\alpha$．

特别，当$\alpha=\sup\limits_{(x,y)\in G(T)}\psi(x,\ s(z))$满足条件4°时，结论(1)不能成立，故必结论(2)成立，且有

$$\min_{y\in\overline{s(Z)}\cap K}\ \sup_{x\in X}\varphi(x,y)\leqslant\sup_{x\in X}\varphi(x,\ y_0)\leqslant\sup_{(x,z)\in G(T)}\psi(x,\ s(z)).$$

证毕．

注3 [9, 定理1]是当$Y=Z=K$，$s=I_Y$（恒等映象），$\varphi(x,\ y)=\psi(x,\ y)=-f(x,y)$时的推论2的一个特殊情形．

参考文献

[1] Baiocchi, C. and A. Capelo, *Variational and Quasivariational Inequalities*, John Wiley and Sons (1984).

[2] Bardaro, C. and R. Ceppitelli, Applications of the generalized Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem to variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **137**(1989), 46—58.

[3] Browder, F. E., The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces, *Math. Ann.*, **177** (1968), 283—301.

[4] Chang Shih-sen and Yin Chang, Generalized KKM theorem and variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* (in print).

[5] Dugundji, J. and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Vol. I, Warszawa (1982).

[6] Fan, K., A generalization of Tychonoff's fixed point theorem, *Math. Ann.*, **142** (1961), 305—310.

[7] Fan, K., Some properties of convex sets related to fixed point theorems, *Math. Ann.*, **266** (1984), 519—537.

[8] Granas, A., KKM-maps and their applications to nonlinear problems, *The Scottish Book (Mathematics from Scottish Café)*, Edited by R. D. Mauldin, Birkhäuser, Boston (1982).

[9] Ha, C. W., On a minimax inequality of Ky Fan, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **99**(4) (1987), 680—682.

[10] Horvath, C., Some results on multivalued mappings and inequalities without convexity, *Nonlinear and Convex Analysis, Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, Series 107 (1987).

[11] Jiang, Jia-he, Coincidence theorems and minimax theorems, *Acta Mathematica Sinica*, New Series, **5** (4)(1989), 307—320.

[12] Knaster, B., K. Kuratowski and S. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, *Fund. Math.*, **14** (1929), 132—137.

[13] Lassonde, M., On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics, *J. Math. Anal. Appl.*, **97** (1983), 151—201.

[14] Mazur, S. and J. Schauder, Uber ein Prinzip in der Variationsrechnung, *Proc. Int. Congress Math.*, Oslo (1936), 65.

[15] Park, S., Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **141**(1989), 164—176.

[16] Shih, M. H. and K. K. Tan, A geometric property of convex sets with applications to minimax type inequalities and fixed point theorems, *J. Austral. Math. Soc.*, (Series A), **45** (1988), 169—183.

KKM Technique and Its Applications

Zhang Shi-sheng

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*)

Ma Yi-hai

(*Department of Mathematics, Xuzhou Teachers' College, Xuzhou*)

Abstract

In this paper, the Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz technique(KKM technique, in short) is presented. By using this technique a new alternative theorem and a new coincidence theorem are established. The results obtained in this paper unify and generalize the corresponding results in the recent works[2,10,11,15,16].

Key words H-space, KKM mapping, alternative theorem, coincidence theorem