应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

复合材料力学的Hamilton体系和辛几何方法(Ⅲ)——弯曲问题和板的振动*

欧阳华江　　钟万勰

(大连理工大学工程力学研究所，1991年 9 月13日收到)

摘　要

把本文第一部分建立的方法用于求解各向异性板的弯曲问题和振动问题.

关键词　Hamilton 体系　辛几何　各向异性　弯曲　振动/板

一、弯曲问题的Hamilton列式

考虑各向异性板的弯曲问题的控制方程[1]

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}$$
$$+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=p$$

其总势能[2]为

$$\Pi=\iint\Big[\frac{D_{11}}{2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)^2+D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{D_{22}}{2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^2+2D_{66}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big)^2$$
$$+2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-pw\Big]dxdy=0 \tag{1.2}$$

令$\theta=\dot w=\partial w/\partial x$，$M=M_x=-D_{11}\partial^2 w/\partial x^2-D_{12}\partial^2 w/\partial y^2-D_{16}\partial^2 w/\partial x\partial y$，并引入Lagrange乘子$Q$，构成新的泛函

$$\Pi=\iint\Big[-\frac{M^2}{2D_{11}}-M\dot\theta-\frac{D_{12}}{D_{11}}M\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{2D_{16}}{D_{11}}M\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^2$$
$$+\frac{\beta}{2}\Big(\frac{\partial\theta}{\partial y}\Big)^2+\gamma\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+Q\Big(\theta-\frac{\partial w}{\partial x}\Big)-pw\Big]dxdy \tag{1.3}$$

这里$\alpha=(D_{11}D_{22}-D_{12}^2)/D_{11}$，$\beta=4(D_{11}D_{66}-D_{16}^2)/D_{11}$，$\gamma=2(D_{11}D_{26}-D_{16}D_{12})/D_{11}$.

应该说明的是，可以象本文第Ⅰ部分所述，通过Legendre变换和Hamilton函数来构

---

* 国家博士后科学基金资助项目.

造进入Hamilton体系的泛函，因对各向异性板，那样做推导颇繁，所以采用代入物理关系和引入Lagrange乘子的方法构造进入 Hamilton 体系的泛函[3]，这种作法的缺点是要反复凑合泛函的形式和恰当地引进Lagrange乘子，否则不能进入Hamilton体系。

把w，θ，Q，M当作独立变量，令$\delta\Pi'=0$，经过一些推导得 Hamilton 微分算子矩阵

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & -\boldsymbol{G} \\ -\boldsymbol{Q} & -\boldsymbol{F}^T \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{D_{12}}{D_{11}}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & -\dfrac{2D_{16}}{D_{11}}\dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{F}^T=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{D_{12}}{D_{11}}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -1 & \dfrac{2D_{16}}{D_{11}}\dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix};\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{D_{11}} \end{bmatrix}=\boldsymbol{G}^T;$$

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} \alpha\dfrac{\partial^4}{\partial y^4} & \gamma\dfrac{\partial^3}{\partial y^3} \\ -\gamma\dfrac{\partial^3}{\partial y^3} & \beta\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}^T \tag{1.4}$$

注意，$\boldsymbol{H}^T$是由$\boldsymbol{H}$通过积分定义的，奇次偏导（对应奇次分部积分）的“转置”变号，而偶次偏导（对应偶次分部积分）的“转置”不变号。

二、横向本征函数向量

下面求解如下本征问题

$$\boldsymbol{H}\mathbf{Y}=\mu\mathbf{Y};\quad \mathbf{Y}(y)=\{\bar{w},\ \bar{\theta},\ \bar{Q},\ \bar{M}\}^T \tag{2.1}$$

把(2.1)展开并消去$\bar{\theta}$，$\bar{Q}$，$\bar{M}$，推出

$$(D_{22}\partial^4/\partial y^4+4D_{26}\mu\,\partial^3/\partial y^3+2(D_{12}+2D_{66})\mu^2\,\partial^2/\partial y^2$$
$$+4D_{16}\mu^3\partial/\partial y+\mu^4D_{11})\bar{w}=0 \tag{2.2}$$

(2.2)的特征方程有四个特征根 $\lambda_i(i=1,\ \cdots,\ 4)$，一般是复数，当 $D_{16}=D_{26}=0$时，即对正交异性板，λ_i 可能是两对（一正一负）纯虚数。在(2.1)中，若令 $\mu=0$，从中只能解出 $\mathbf{Y}=0$，说明 $\mu\neq0$，零不是原方程特征根，这点比起各向同性板要方便多了。对各向同性板，零是基本征值，会导致Jordan型矩阵，不易处理。在平面问题中，零本征值的研究见[4]。

知道了(2.2)的特征根λ（与μ成正比），考虑一般情况，本征函数可设为

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} A_w & B_w & C_w & D_w \\ A_\theta & B_\theta & C_\theta & D_\theta \\ A_Q & B_Q & C_Q & D_Q \\ A_M & B_M & C_M & D_M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \exp[\lambda_1 y] \\ \exp[\lambda_2 y] \\ \exp[\lambda_3 y] \\ \exp[\lambda_4 y] \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

把 $\mathbf{Y}$ 代回(2.1)并利用y方向两端的边界条件进行推导，发现(2.3)中的系数只有一个是独立的，并可导出一个关于μ的超越方程。

以正交异性板来详细说明。这时(2.2)退化为

$$(D_{22}\partial^4/\partial y^4+2\mu^2(D_{12}+2D_{66})\partial^2/\partial y^2+D_{11}\mu^4)\bar{w}=0$$

若$(D_{12}+2D_{66})^2>D_{11}D_{22}$，则特征值$\lambda$是两对纯虚数

$$\lambda=\pm si,\ \pm ti;\ s=\sqrt{(D_{12}+2D_{66}-\sqrt{(D_{12}+2D_{66})^2-D_{11}D_{22}})/D_{22}}\cdot\mu,$$
$$t=\sqrt{(D_{12}+2D_{66}+\sqrt{(D_{12}+2D_{66})^2-D_{11}D_{22}})/D_{22}}\cdot\mu \tag{2.4}$$

这时

$$\bar{w}=A_w\cos s\mu y+B_w\sin s\mu y+C_w\cos t\mu y+D_w\sin t\mu y \tag{2.5}$$

考虑在$y=\pm b$的两边板是夹支的，Hamilton方程

$$\mathbf{r}(x,\ y)=\boldsymbol{H}(\partial/\partial y)\mathbf{r}(x,\ y)+\mathbf{f} \tag{2.6}$$

的特解为

$$\mathbf{r}'=\{-p(b^2-y^2)^2/24D_{22},\ 0,\ 0,\ pD_{12}(3y^2-b^2)/6D_{22}\}^T \tag{2.7}$$

由对称性条件知$B_w=D_w=0$，再由夹支条件得

$$\begin{vmatrix}\cos t\mu b & \cos\mu b\\ t\mu\sin t\mu b & s\mu\sin s\mu b\end{vmatrix}=0 \tag{2.8}$$

本征值的超越方程为

$$s\sin s\mu b\cos t\mu b-t\sin t\mu b\cos s\mu b=0 \tag{2.9}$$

还可解出

$$C_w=-A_w\cos t\mu b/\cos s\mu b \tag{2.10}$$

横向本征函数向量

$$\mathbf{Y}_{ai}=\begin{Bmatrix}\cos t\mu y-\xi\cos s\mu y\\ \mu(\cos t\mu y-\xi\cos s\mu y)\\ \mu^3[(D_{12}t^2-4D_{66}t^2-D_{11})\cos t\mu y-\xi[D_{12}s^2-4D_{66}s^2-D_{11})\cos s\mu y]\\ \mu^2[(D_{12}t^2-D_{11})\cos t\mu y-\xi(D_{12}s^2-D_{11})\cos s\mu y]\end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

其中$\xi=\cos t\mu b/\cos s\mu b$.

三、辛正交关系和级数解

正交关系保证了基底函数之间是线性无关的，是分离变量法的基础．已建立了辛正交关系，$\langle\mathbf{Y}^T,\ \boldsymbol{J},\ \mathbf{Y}\rangle=(\mathbf{Y},\ \mathbf{Y})_s=0$，在辛几何空间中，对全状态向量$\mathbf{r}=\{w,\ \theta,\ Q,\ M\}^T$可以分离变量，其级数解为

$$\mathbf{r}(x,\ y)=r'(y)+\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\exp[\mu_i x]\mathbf{Y}a_i(y)+b_i\exp[-\mu_i x]\mathbf{Y}_{bi}(y)) \tag{3.1}$$

通过x方向两端的边界条件可确定a_i和b_i．因为这是一个两点边值问题，宜用能量法或虚功原理[4]求解．

对于各向同性板，按照传统解法，只有简支边界条件才能求出横向本征函数，出现固支边和自由边就必须用叠加法．叠加法对于简支、夹支和自由边界组合起来的板，如对悬臂板，求解过程十分复杂．鉴于此，一些学者寻找所谓广义正交条件[5]．该文作者，对于各向同性板，增元$\theta_x=\partial w/\partial x$，$\theta_y=\partial w/\ y$，以及剪力$Q_x$，$Q_y$，弯矩$M_x$和$M_y$，推出一种广义正交关系，对板的三类边界及其组合都适用．这种巧妙作法其实已写成了Hamilton列式，遗憾的是，他们并没意识到这一点，也就没能利用Hamilton体系的数学工具，所以只能处理各向同性板．按此思路，推导完全各向异性板的广义正交关系，即使成功，也是非常繁琐的，

还未摆脱Euclid几何空间束缚.

本文作者建立了一种一般的正交关系——辛正交关系，适用于各向异性线弹性空间问题，具体用于构造平面矩形域和空间柱形域的解析解和半解析解.

四、振动问题

板的自由振动问题的控制方程为

$$L(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)w+\rho\partial^2 w/\partial t^2=0 \tag{4.1}$$

这里L是以弹性常数为系数的偏微分算子. 设其解答为

$$w(x,\ y,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos\omega_m t+B_m\sin\omega_m t)W_m(x,\ y) \tag{4.2}$$

振型$W_m(x,\ y)$所应满足的方程为

$$LW_m-\omega_m^2\rho W_m=0 \tag{4.3}$$

可这样构造(4.3)对应的泛函Π''：1.去掉式(1.3)中Π'中含有p的一项；2.在Π'中增加一项表示最大动能的量[6]

$$-K_{max}=\frac{\omega_m^2}{2}\iint\rho W_m^2 dxdy \tag{4.4}$$

令$\delta\Pi''=0$，推出Hamilton阵仍如(1.4)所示，只不过其中$\boldsymbol{Q}$变为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\alpha\,\partial^4/\partial y^4-\rho\omega_m^2 & \gamma\,\partial^3/\partial y^3\\ -\gamma\,\partial^3/\partial y^3 & \beta\,\partial^2/\partial y^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{Q}^T \tag{4.5}$$

以下过程都不变.

众所周知：1.对完全各向异性板，即使在四边简支的边界条件下也不能分离变量求出级数解[2]；2.对各向同性板，在对边简支，另一对边是任意的条件下，也是不能求得自由振动的完整解答的[6].

用本文所述的方法，有可能求出一些这样的问题的解析解来，这将留待以后解决.

本文方法，扩大了求解析解的范围，更重要的是，按此思路，构造半解析解法. 比如对于柱壳，若用有限元求解，需要划分大量的壳元，而且壳元的缺秩和自锁是很烦人的，这样做计算量大，精度未必高. 用半解析法，先在柱壳母线方向求出本征函数向量，环向划分线性元即可，计算量会明显减少，编程方便，精度很高：1.因沿母线方向选用本征函数向量，在边界处计算结果也很准确；2.计算结果是全状态向量，弯矩和剪力的计算结果与位移的计算结果有相同量级的计算精度.

对于具有复杂截面形状的空间柱体和厚板也有上述问题（甚至更为严重），用本文所述的半解析法也可望获得较好的结果.

感谢胡海昌教授提供宝贵资料和意见，还要感谢唐立民教授的热情帮助.

参考文献

[1] 列赫尼茨基, С. Г., 《各向异性板》, 胡海昌译, 北京科学出版社(1963).

[2] 琼斯, R. M., 《复合材料力学》, 朱颐龄等译, 上海科学技术出版社, (1981).

[3] 钟万勰，分离变量法与哈密尔顿体系，计算结构力学及其应用，8(3) (1991).
[4] 钟万勰，条形域平面弹性问题与哈密尔顿体系，大连理工大学学报，31(4) (1991).
[5] Rao, B. S. R. and B. G. Prakash, Generalized orthogonality relations for the flexure of rectangular plates and a cantilever problem for semi-infinite plates, *J. Struct. Mech.*, 9(1) (1981).
[6] 徐芝伦，《弹性力学》(下册，第二版)，北京：高等教育出版社 (1982).

Hamiltonian System and Simpletic Geometry in Mechanics of Materials (Ⅲ) ——Flexure and Free Vibration of Plates

Ouyang Hua-jiang Zhong Wan-xie

(Res. Iast. of Eng. Mech., Dalian Univ. of Tech., Dalian)

Abstract

The methodology presented in Part I is employed to deal with flexure and free vibration of anisotropic plates.

Key words Hamiltonian system, simpletic geometry, anisotropy, flexure, vibration/plate