

# 无限样条边界元及其在结构— 地基耦合中的应用\*

王有成 王章虎

(合肥工业大学土木系, 1991年9月19日收到)

## 摘 要

本文基于三维弹性力学问题的Kelvin解在无穷远处的性态, 构造了一种无限样条边界元. 用半空间地表圆域受均压下的解析解, 验证了这类单元良好的计算精度; 以它与三维样条边界元相结合, 分析了弹性半空间地基板. 结果表明, 这种模型在分析结构与地基耦合问题上不仅具有普适性而且自由度少, 计算精度高.

**关键词** 无限样条边界元 结构与地基耦合问题

## 一、引 言

在结构与地基耦合分析及地下结构分析中, 地基的数值模拟占有重要的地位. 边界元法由于边界积分方程的核函数能自动满足无限远处的辐射条件, 使其在模拟无限域、半无限域地基上具有独特优越性. 然而, 对于工程中常见的曲折表面半无限域问题, 要想在边界元法中寻求一补解, 以满足自由表面零应力条件, 即使不说不可能, 也将是不现实的, 即使对平面地表半无限地基, 要用 Mindlin 解进行地下结构分析也很繁杂; 如果采用截断边界法则既繁琐又不够精确. 而文[1]提出了无穷边界元巧妙地解决了这一难题, 也取得了较好的结果<sup>[1][2]</sup>; 但文[1]所构造的位移插值函数, 不能很好地反映无穷远处的零位移条件, 可能不尽合理. 本文对照 Kelvin 解在无穷远处的性态, 构造一种无限样条边界元, 它在有限方向采用B样条插值, 而沿无穷方向则采用无限边界元插值, 使能自动满足无穷远处的零位移、零应力条件, 当采用虚结点后, 仍可用刚体位移法、常应力场法推求系数阵主子块, 概念清晰、运算简便. 我们用半空间地表圆域受均压问题验证了这一模型的计算精度, 并与三维样条边界元相结合分析了弹性半空间地基板. 结果表明, 这种模型具有自由度少计算精度高的优点, 是分析大型结构和水坝与地基耦合问题的有效工具.

\* 薛大为推荐. 国家自然科学基金资助课题.

## 二、无限边界元插值函数构造规则

对于图 1 示半无限域,  $\Gamma = \Gamma_c + \Gamma_n + \Gamma_f$ , 其中  $\Gamma_c$  为荷载作用边界或耦合边界,

$\Gamma_n$  为边载作用边界或过渡边界,

$\Gamma_f$  为无限边界元模拟边界.

$\Gamma_\rho(\rho \rightarrow \infty)$  为无限远处虚拟边界

边界积分方程为 (不计体力)

$$\begin{aligned} c_{ij}u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\rho} (u_{ij}^* p_j \\ - p_{ij}^* u_j) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.1)$$

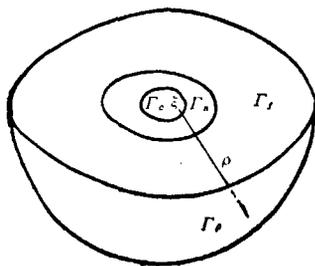


图 1

其中  $u_{ij}^*$ ,  $p_{ij}^*$  为 Kelvin 基本解, 且  $u_{ij}^* \propto O(r^{-1})$ ,  $p_{ij}^* \propto O(r^{-2})$ . 在求解的实际问题中, 由于荷载作用为一有限域内, 其位移与面力分布可由基本解迭加而求出, 它们和基本解具有同阶衰减速度, 即:

$$u_j \propto O(r^{-1}), \quad p_j \propto O(r^{-2}) \quad (2.2)$$

可以证明<sup>[1]</sup>,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\rho} (u_{ij}^* p_j - p_{ij}^* u_j) d\Gamma = 0$$

且积分  $\int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma$ ,  $\int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma$  收敛.

于是边界积分方程为:

$$c_{ij}u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (2.3)$$

为了计算  $\Gamma_f$  上的积分, 需构造无限边界单元.

由于在延向无穷远区域上, 位移、面力具有上述衰减性质, 无限边界元插值模式应

(1) 满足 0, 1 特性, 这是结点参数条件,

(2) 满足  $\sum_q N_q = 1$ , 这是常量场条件,

(3) 满足  $u_j = o(r^{-1})$ ,  $p_j = o(r^{-2})$ ,  $x_j = o(r)$ , ( $j=1, 2, 3$ ) 这是客观物理量条件.

而文[1]中构造的一维无穷元的位移插值形函数为:

$$N_1^*(\xi) = -\xi, \quad N_2^*(\xi) = 1 + \xi \quad (2.4)$$

且位移插值模式为  $u = N_1^*(\xi)u_1 + N_2^*(\xi)u_2$ , 不能很好地反映无穷远处零位移条件, 因为, 当  $\xi=1$  时代表无穷远处, 而  $u_\infty = u|_{\xi=1} = 2u_2 - u_1$ , 表明无穷远处的位移与  $u_2$ ,  $u_1$  有关, 这是不合实际的.

另外, 文[1]中构造的一维无穷元的面力插值形函数:

$$N_1^*(\xi) = -\frac{1}{4}\xi(1-\xi)^2, \quad N_2^*(\xi) = (1+\xi)(1-\xi)^2 \quad (2.5)$$

也不能保证  $\sum_{i=1}^2 N_i^*(\xi) = 1$ , 因而不能利用常应力场条件, 这就限制了它的应用范围.

### 三、无限样条边界元

针对文[1]情况,我们根据无限边界元形函数构造法则,在有限方向( $\eta$ 向)用  $B$ 样条插值,在无穷方向( $\xi$ 方)用无限边界元插值,导出一种无限样条边界元。

如图 2 示,首先利用几何插值函数,将整体坐标系中无限边界子单元变换到局部系中的正则母单元上。

$\xi$ 向无限边界元插值函数  $F_k(\xi)$  如表 1

**表 1**

$F_k(\xi)$	$x_k(\xi)$	$u_k(\xi)$	$p_k(\xi)$
$0$	$2(1-\xi)/(2-\xi)$	$\frac{1}{2}(1-\xi)(2-\xi)$	$\frac{1}{2}(1-\xi)(2-\xi)^2$
$k$	$1$	$\xi(2-\xi)$	$\xi(2-\xi)^2$
$2$	$0$	$\frac{1}{2}\xi(\xi-1)$	$\frac{1}{4}\xi(\xi-1)(8-3\xi)$

其中  $\xi=2$  处对应于无穷远处的虚结点, 受载态时其上  $u_j = p_j = 0$ 。  $F_k(\xi)$  泛指  $x_k(\xi)$ ,  $u_k(\xi)$  或

$p_k(\xi)$ , 采用虚结点后有  $\sum_{k=0}^2 F_k(\xi) = 1$ ,  $F_k(l) = \delta_{kl}$ ,  $k, l = 0, 1, 2$ , 且对于  $k=0, 1$  时当  $\xi \rightarrow 2$  有:

$$\begin{aligned} x_k(\xi) &= O(1/(2-\xi)) \rightarrow \infty, \\ u_k(\xi) &= O(2-\xi) \rightarrow 0, \\ p_k(\xi) &= O((2-\xi)^2) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

就是说,  $F_k(\xi)$  符合无限边界元的插值要求。

$\eta$ 方向采用  $B$ 样条插值<sup>[3]</sup>:

$$f(\eta) = [\psi(\eta)] [A]^{-1} \{f_l\} \quad (3.1)$$

引入克罗耐克积, 即可导出二维边界的无限样条边界元插值格式:

$$x_j = \sum_{q=1}^M x_j(q) N_q^*(\xi, \eta), \quad u_j = \sum_{q=1}^M u_j(q) N_q^*(\xi, \eta), \quad p_j = \sum_{q=1}^M p_j(q) N_q^*(\xi, \eta) \quad (3.2)$$

而

$$\begin{aligned} N_q^*(\xi, \eta) &= [x_k(\xi)] \otimes ([\psi(\eta)] \mathbf{B}) \\ N_q^*(\xi, \eta) &= [u_k(\xi)] \otimes ([\psi(\eta)] \mathbf{B}) \\ N_q^*(\xi, \eta) &= [p_k(\xi)] \otimes ([\psi(\eta)] \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

且有

$$\sum_{q=1}^M N_q^l = 1, \quad N_q^l(\xi_i, \eta_i) = \delta_{qi} \quad (q, l = 1, 2, \dots, M)$$

其中  $f$  泛指  $x, u, p$ ,  $M$  为单元结点数, 包括实结点和虚结点。  $\psi(\eta)$  是  $B$ 样条基函数<sup>[4]</sup>,

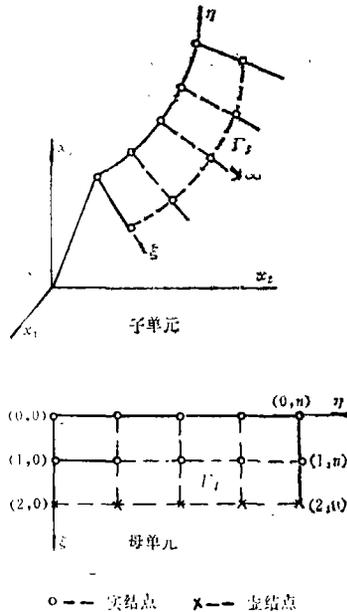


图 2

$L$  表示行阵,  $B$  是将插值阵  $[A]^{-1}$  去掉首末二列所得到的矩阵, 对于一般端导未知情况, 可采用拉格朗日插值表示端导端<sup>[3]</sup>, 效果很好。

在受载态下, 虚结点 ( $\xi=2$ ) 上  $u_j=0$ ,  $p_j=0$ , 对插值没有贡献, 可以不考虑。

在无限样条边界元插值公式中将  $[\psi(\eta)]B$  换为  $[\mathcal{L}_i(\eta)]$ , 而

$$\mathcal{L}_i(\eta) = \prod_{j=0, j \neq i}^2 \frac{\eta-j}{i-j} \quad (i=0, 1, 2)$$

就可得出 6 结点无限边界元 (如图 3 示) 的插值公式。如增加无穷远处三个虚结点, 则  $N_i^*(\xi, \eta)$  诸特性依然具备。

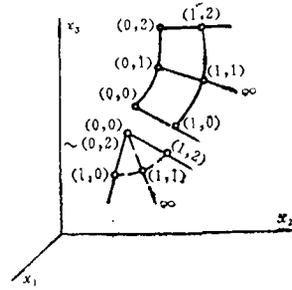


图 3

#### 四、奇异积分处理

考察内点位移及内点应力公式 (不计体力)

$$u_j(\xi) = \int_{\Gamma} (u_{ij}^* p_j - p_{ij}^* u_j) d\Gamma + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} (u_{ij}^* p_j - p_{ij}^* u_j) d\Gamma \quad (4.1)$$

$$\sigma_{jkl}(\xi) = \int_{\Gamma} (u_{ijk}^* p_l - p_{ijk}^* u_l) d\Gamma + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} (u_{ijk}^* p_l - p_{ijk}^* u_l) d\Gamma \quad (4.2)$$

其中  $u_{ij}^*$ ,  $p_{ij}^*$ ,  $u_{ijk}^*$ ,  $p_{ijk}^*$  为 Kelvin 基本解, 具体表达式见[6]。

当  $\xi$  为边界点时,  $u_{ij}^* = o(r^{-1})$ ,  $p_{ij}^* = o(r^{-2})$ ,  $u_{ijk}^* = o(r^{-2})$ ,  $p_{ijk}^* = o(r^{-3})$ , 使(4.1), (4.2)积分呈一阶、二阶、三阶奇性, 不能直接积分。一般是将奇异积分项划成 Cauchy 主值加上奇性修正自由项, 以奇性系数表征。于是(4.1)式变成(2.1)式, (4.2)式变成<sup>[6]</sup>:

$$c_{jklm} \sigma_{lm}(\xi) + h_{jkl} u_l(\xi) = \int_{\Gamma} (u_{ijk}^* p_l - p_{ijk}^* u_l) d\Gamma + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} (u_{ijk}^* p_l - p_{ijk}^* u_l) d\Gamma \quad (4.3)$$

当奇点位于某一复杂边界点 (侧棱点、拐点等), 要寻求奇性系数显式相当困难, 对此我们借助于特解场法解决这一难题<sup>[6]</sup>。并在奇点邻域采用极坐标变换、Kutt 积分等技术进一步消奇, 使得高阶奇性积分得以准确计算。

将边界积分方程(2.1)和应力方程(4.3)写成矩阵型:

$$HU = GP + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} (U^*P - P^*U) d\Gamma \quad (4.4)$$

$$C'\sigma(p) = -H'U + G'P + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} ('U^*P - 'P^*U) d\Gamma \quad (4.5)$$

这里已经把  $C_{ij}$  归并入  $H$  的主子块  $H_{pp}$ , 把  $\sum_l G_{pp}^l P(p^l)$  归并入  $C'\sigma(p)$ ,  $l$  是  $P$  点各侧面。

对于一般载态, 上二式右端两个积分极限都是零。但是

1. 在刚体位移场  $U = I_3$  下,  $P = 0$ ,  $\sigma = 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} (U^*P - P^*U) d\Gamma = \frac{1}{2} I_3, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{\rho}} ('U^*P - 'P^*U) d\Gamma = 0$$

且  $\int_{\Gamma} (P^*U - U^*P) d\Gamma$ ,  $\int_{\Gamma} ('P^*U - 'U^*P) d\Gamma$  存在。

因而有:

$$H_{pp} = \frac{1}{2} I - \sum_{q=1, q \neq p}^N H_{pq}, \quad H'_{pp} = - \sum_{q=1, q \neq p}^N H'_{pq} \quad (4.6)$$

其中,  $N$ 是地表全部结点数, 包括普通元和无限边界元, 实结点和虚结点.

2. 在单位应力场  $\sigma = I_0$  下,  $P = \bar{p} = n$ ,  $U = \bar{U}$ , 其中

$$n = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & n_3 & n_2 \\ 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & n_3 & n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad n_i \text{ 是外法线方向余弦}$$

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{1+\nu} & \frac{-\nu r_1}{1+\nu} & \frac{-\nu r_1}{1+\nu} & 0 & r_3 & r_2 \\ \frac{-\nu r_2}{1+\nu} & \frac{r_2}{1+\nu} & \frac{-\nu r_2}{1+\nu} & r_3 & 0 & r_1 \\ \frac{-\nu r_3}{1+\nu} & \frac{-\nu r_3}{1+\nu} & \frac{r_3}{1+\nu} & r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_i = x_i(q) - x_i(p) \quad (i=1, 2, 3)$$

而

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_a} (\bar{U} * P - \bar{P} * U) d\Gamma = \frac{1}{2} I_0,$$

且  $\int_{\Gamma} (\bar{P} * U - \bar{U} * P) d\Gamma$  存在, 于是有:

$$C' = \frac{1}{2} I + \sum_{q=1, q \neq p}^N (G'_{pq} n(q) - H'_{pq} \bar{U}(q)) \quad (4.7)$$

这样做, 既避免了  $C'$  显式的烦琐推演, 又不必去计算  $P$  点各侧面的  $G'_{pq}$ , 经实践检验, 效果很好, 而且还可以扩展用来计算近边界点的应力.

从宏观看, 地表再曲折, 在半无限域中也可以当作平面, 所以上列子块关系无论对平面地表还是山高谷深的地表都是成立的.

### 五、计算例题

例1 半空间弹性地基面圆域  $\Gamma_c$  上受均压  $p$  作用, 地基  $E=10^2 \text{MPa}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $p=1.0 \text{MPa}$ . 利用对称性,  $1/4$  地表划分三个单元,  $\Gamma_c$ ,  $\Gamma_n$  为普通样条元,  $\Gamma_f$  为无限样条边界元. 尺寸及网格剖分如图 4 示.

为了验证, 我们还用文[1]所给的一维无穷元位移插值格式(式 4)与样条插值相结合所构成的无限样条边界元模拟  $\Gamma_f$  进行计算(称为方案 I). 竖向位移结果与精确解比较列于表 2 中.

表 2 中,  $c/a=2$  对应于  $u_2=u_1/2$  时的剖分表中结果表明, 文[1]构造的位移插值函数, 只有当  $u_2=u_1/2$  时, 才能反映无穷远零位移条件, 计算结果较好, 但工程实际中很难准确确定  $u_2=u_1/2$  时的剖分; 而本文构造的无限样条边界

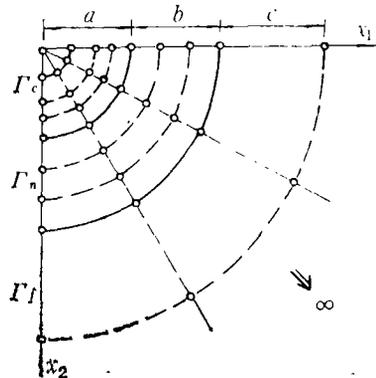


图 4

元插值格式能自动满足无穷远处零位移、零应力条件，在一般的剖分下都能获得很好的结果。

表 2 半空间地表圆域  $\Gamma_c$  上受均压下竖向位移(m)

半径r(m)	0	2.5	5.0	7.5	10	13.3	16.7	20	40	50
精确值	0.1820	0.1791	0.1700	0.1528	0.1159	0.07453	0.05747	0.04708	0.02293	0.01522
本文值	0.1821	0.1792	0.1701	0.1528	0.1160	0.07471	0.05754	0.04738		0.01523
方案 I	$c/a=4$	0.1827	0.1798	0.1708	0.1534	0.1167	0.07542	0.05826	0.04817	
	$c/a=2$	0.1821	0.1792	0.1702	0.1528	0.1160	0.07476	0.05757	0.04735	0.02310

我们还用本文无限样条边界元法计算了竖轴  $x_3$  上的应力，对于边界点  $O$  点，则采用了文[5]方法。结果列如表3。

表 3 竖轴  $x_3$  上点的应力(MPa)

$x_3$ 坐标(m)		0.0	2.0	5.0	10.0
$\sigma_z$	精确解	-1.0000	-0.9925	-0.9106	-0.6464
	本文解	-1.0030	-0.9908	-0.9084	-0.6444
$\sigma_r$	精确解	-0.8000	-0.5488	-0.2633	-0.05754
	本文解	-0.8023	-0.5471	-0.2626	-0.05812

可见，地基应力的计算精度相当高。这表明，用本文方法分析地下结构也是可取的，而基本解仍是 Kelvin 解，不是带有繁杂补解的 Mindlin 解，这特别有利于数值计算。

例 2 一弹性半空间地基方板，在板面上承受均布荷载  $p_0=1 \times 10^{-2}$  MPa。利用对称性，1/4板及地基网格剖分及坐标架如图 5 示。1/4地划分分为 5 个单元，其中  $\Gamma_c$ 、 $\Gamma_n$  用三个普通样条元， $\Gamma_f$  用两个无穷样条边界元模拟。而板则用三维样条边界元模拟。

1. 仅考虑耦合面  $\Gamma_c$  上竖向位移及反力协调条件。

板的弹性模量为  $E_p=2 \times 10^4$  MPa，泊桑比  $\nu_p=1/6$ ，地基  $E_s=20$  MPa， $\nu_s=0.35$ ，基础板面竖移及耦合面地基反力列于表 4 中。

2. 考虑在耦合面上结构与地基三个方向位移、面力协调条件。

对于地基  $E_s=E_p=2 \times 10^4$  MPa， $\nu_s=\nu_p=0.17$  情况，计算的竖向位移及地基反力结果列于表 5、6 中。我们也计算了地基  $E_s=20$  MPa 下的位移及地基反力，竖向位移及地基竖向

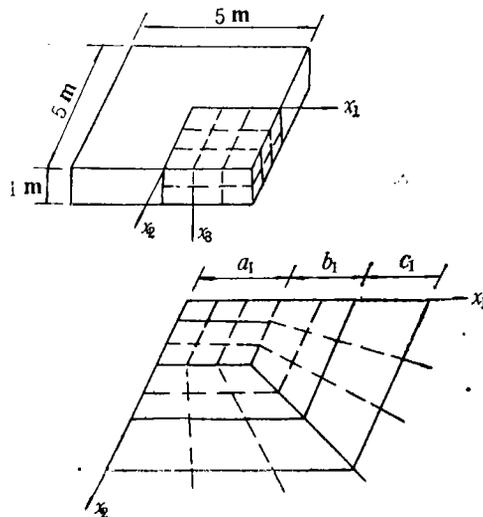


图 5

**表 4 基础板面竖移及耦合面地基竖向反力**

类 型		基础板面竖移 ( $10^{-2}m$ )				耦合面地基竖向反力 ( $10^{-2}MPa$ )			
$x_2(m)$	$x_1(m)$	0	5/6	5/3	5/2	0	5/6	5/6	5/2
	0	0	0.1827	0.1825	0.1821	0.1816	0.1019	0.2757	0.2024
	5/6	0.1825	0.1824	0.1819	0.1814	0.2776	0.4835	0.4209	2.783
	5/3	0.1821	0.1819	0.1815	0.1809	0.1947	0.4172	0.3275	2.626
	5/2	0.1816	0.1814	0.1809	0.1803	2.231	2.786	2.646	10.35
地基反力合力与上部竖载合力的相对误差						1.76%			

**表 5 基础板面竖向位移 ( $10^{-5}m$ )**

$x_2(m)$	$x_1(m)$	0	5/6	5/3	5/2
	0	0	0.2788	0.2756	0.2625
	5/6	0.2756	0.2725	0.2596	0.2428
	5/3	0.2625	0.2596	0.2473	0.2313
	5/2	0.2458	0.2428	0.2313	0.2156

**表 6 耦合面地基竖向反力  $p_3$  及切向反力  $p_1, p_2$  ( $10^{-2}MPa$ )**

$x_2(m)$	$x_1(m)$	0			5/6			5/3			5/2		
		$-p_1$	$-p_2$	$-p_3$	$-p_1$	$-p_2$	$-p_3$	$-p_1$	$-p_2$	$-p_3$	$-p_1$	$-p_2$	$-p_3$
0	0	0.000	0.000	0.8855	0.05368	0.000	0.8900	0.2801	0.000	0.8115	0.000	0.000	1.6810
	5/6	0.000	0.05363	0.8900	0.05311	0.05306	0.8942	0.2736	0.04340	0.8164	0.000	0.07456	1.654
	5/3	0.000	0.2801	0.8115	0.04344	0.2736	0.8164	0.2415	0.2415	0.7482	0.000	0.3291	1.565
	5/2	0.000	0.000	1.681	0.0746	0.000	1.653	0.3291	0.000	1.565	0.000	0.000	2.205

注 表 6 中地基竖向反力合力与上部竖载合力的相对误差为 0.25%。

反力的结果同仅考虑竖向耦合条件的结果相差较小，而地基切向反力相对于竖向反力小一量级，这表明，对于土基上的基础板可以略去切向反力而只考虑耦合面竖向位移及反力协调条件。

通过上面结果，比较文[3]、[7]的结果，地基板竖移有很好的吻合性，而地基竖向反力合力与上部荷载合力相对误差又很小，这表明，用无限样条边界元和三维样条边界元相配合计算基础和其他结构-地基耦合问题同样有效和可靠。

## 六、讨 论

(1) 本文构造的无限样条边界元既能满足刚体位移及常应变场要求，又能很好地反映了无穷远处零位移、零应力条件，对半无限域远场数值模拟比较合理。它将为解决大型结构例如水坝与地基耦合问题以及地下结构应力分析提供了有效工具。

(2) 对于不均匀地基或窄长结构地基，为改进求解方程组的条件数，为计入地基的片不均匀效应，可以将地基划分为若干子结构，这时就要用到向地基深处延展的无限边界

元, 相应的面力 $p_j$ 也要作无限边界元插值。

(3) 本法中, 由于在无穷远处 $u_j=p_j=0$ , 因而增用的虚结点无须建立方程, 加态点只在实结点上, 不增加计算量。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 张楚汉等, 用三维无穷边界元分析整体重力坝的应力, 第二届工程中的边界元法会议论文集, 南宁(1988), 867—875.
- [ 2 ] 张楚汉、王光纶, 无限域的数值模拟与无限单元, 《解析与数值结合法的理论及其工程应用》(李家宝主编), 湖南大学出版社(1989).
- [ 3 ] Wang, You-cheng, et al., 3-D spline boundary element method for the analysis of the sluice, *Proc. 13th. Int. Conf. of BEM*(1991).
- [ 4 ] 王有成, Kirchhoff 型板样条边界元, 计算结构力学及其应用, 3(1)(1986), 41—50.
- [ 5 ] 王有成等, 奇性校正特解场法计算边界应力, 《第三届工程中的边界元会议论文集》, 武汉(1991).
- [ 6 ] Brebbia, C. A., et al., *Boundary Element Technique*, Springer-Verlag (1984).
- [ 7 ] Wang You-cheng, et al., Spline boundary element method for Ressiner's plate and its application to foundation plates, *Boundary Elements*, IX(Ed. C. A. Brebbia, et al.), Vol. 2, Springer-Verlag (1987), 111—125.

## Infinite Spline Boundary Element Method and Its Application to Structure-Foundation Interaction

Wang You-cheng    Wang Zhang-hu

(Department of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei)

### Abstract

In view of the infinity behaviors of 3-D Kelvin solution, we constructed an infinite spline boundary element which has fine precision in the analysis of the half space foundation subjected to uniform pressure on the circular domain. We also analysed a square plate resting on elastic half space foundation. The results indicate that this model not only fits for the coupled analysis of foundation and structures but also has the advantage of fewer degrees of freedom and fine precision.

**Key words** infinite spline boundary element, structure-foundation interaction