应用数学和力学，第14卷第1期（1993年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

线性离散大系统的稳定性*

胡朝阳

（江西师大，1990年6月27日收到）

摘　要

本文直接运用线性范数型 Liapunov 函数处理线性定常和时变离散大系统的稳定性，得到了渐近稳定若干判别准则。

关键词　离散大系统　稳定性　Liapunov函数

目前从文献所见到的，大都是先对弧立子系统构造二次型 Liapunov 函数，然后用向量或标量 Liapunov 函数方法处理线性离散大系统的稳定性，但随着系统阶数的升高，Liapunov函数的构造也就越复杂，因而一般都出现繁复的运算，且所得结果条件都较强。本文运用线性范数型Liapunov函数，给出的方法和结果较其他方法简便和实用，且包含了文[1]、[2]已有结果的运用范围。

一、线性定常离散大系统

引理[1]　设向量函数$X(k)$、$Y(k)$分别是离散系统

$$\begin{cases} X(k+1)=GX(k), \\ X(k_0)=X_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y(k+1)=GY(k), \\ Y(k_0)=Y_0 \end{cases}$$

的解，若 $X_0=Y_0$，且 G 的所有元素$g_{ij}>0$，则不等式$X(k)\leqslant Y(k)$ 对所有 $k\in I=\{0,1,\cdots\}$ 都成立。

考虑线性常系数差分方程组描述的离散大系统：

$$x_i(k+1)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(k) \qquad (i=1,\cdots,n)$$

即

$$X(k+1)=AX(k) \tag{1.1}$$

将系统(1.1)分成m个孤立子系统：

$$X_{n_r}(k+1)=A_{n_r}X_{n_r}(k) \qquad (r=1,\ \cdots,\ m;\ n_1+\cdots+n_m=n) \tag{1.2}$$

$$X_{n_r}=\begin{pmatrix} x_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1}(k) \\ \vdots \\ x_{n_1+\cdots+n_r}(k) \end{pmatrix}$$

* 李骊推荐。

$$A_{n_r}=\begin{pmatrix} a_{n_1+\cdots+n_{r-1}+1\ n_1+\cdots+n_{r-1}+1} & \cdots & a_{n_1+\cdots+n_r+1\ n_1+\cdots+n_r} \\ & \vdots & \\ a_{n_1+\cdots+n_r\ \ n_1+\cdots+n_{r-1}+1} & \cdots & a_{n_1+\cdots+n_r\ \ n_1+\cdots+n_r} \end{pmatrix}$$

定理1.1　如果矩阵$D=(d_{ij})$：

$$d_{ij}=\begin{cases} 1-|a_{ij}| & (i=j); \\ -|a_{ij}| & (i\neq j) \end{cases}$$

的所有逐次主子式均为正的，则系统(1.1)的平衡点为渐近稳定的。

证明　每对个孤立子系统(1.2)作Liapunov函数：

$$v_r(x,k)=\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i|x_i|\quad (r=1,\cdots,m).$$

其中　$\alpha^T=(\alpha_{n_{r-1}+1},\ \cdots,\ \alpha_{n_r})>0$为任一常向量．于是

$$\Delta v_{r(1.1)}(x,k)=\sum_{l=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(k)\right|-\sum_{i=n_k+1}^{n_r}\alpha_i|x_i(k)|$$

$$\leqslant\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i\left\{(|a_{ii}|-1)|x_i(k)|+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j(k)|\right\}$$

$$(r=1,\cdots,m).$$

对大系统(1.1)作Liapunov函数：

$$V(x,k)=\sum_{r=1}^{m}v_r(x,k).$$

显然V是正定的，且

$$\Delta V_{(1.1)}(x,k)=\sum_{r=1}^{m}\Delta v_{r(1.1)}(x,k)$$

$$\leqslant-\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i\left\{(1-|a_{ii}|)|x_i(k)|-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j(k)|\right\}$$

$$=-\alpha^TDW\triangleq-B^TW.$$

其中　$W^T=[|x_1|,\cdots,|x_n|]$，$\alpha^TD=B^T$．

由已知条件知D为M矩阵，于是$D^{-1}\geqslant0$，因而$\alpha=(D^{-1})^TB$．又因为D^{-1}的每行和每列至少必须包含一个非零元素（实际上D^{-1}的对角线元素都是正的），因此，总可以选择B，使得$B>0$从而$\alpha>0$．于是$\forall x\in R^n$和$k\in I$，$\Delta V_{(1.1)}(x,k)$是负定的．故定理得证．

特别，对于二阶线性定常复合离散系统[1]：

$$\begin{cases} x_1(k+1)=a_{11}x_1(k)+a_{12}x_2(k) \\ x_2(k+1)=a_{21}x_1(k)+a_{22}x_2(k) \end{cases}\tag{1.3}$$

其孤立子系统为：

$$\begin{cases} x_1(k+1)=a_{11}x_1(k), \\ x_2(k+1)=a_{22}x_2(k). \end{cases}$$

由定理1.1知，系统(1.3)的零解为渐近稳定的充分条件是：

$$|a_{11}|<1,\ \prod_{i=1}^{2}(1-|a_{ii}|)>\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{2}|a_{ij}| \qquad (j=1,2) \tag{1.4}$$

例
$$\begin{cases} x_1(k+1)=\frac{1}{2}x_1(k)+\frac{1}{2}x_2(k) \\ x_2(k+1)=\frac{1}{3}x_1(k)+\frac{1}{2}x_2(k) \end{cases} \tag{1.5}$$

显然，系统(1.5)满足条件(1.4)，因而它的零解是渐近稳定的。但由文[1]的结论不能判定系统(1.5)的稳定性态，因按文[1]有$\Delta_1=1/2$，$E=1/2$，于是$E\nless\Delta_1$

此例说明，定理1.1放宽了对关联项的要求，实际上得到了比文[1]更强的结论。

定理1.2 如果存在$\alpha_i>0(i=1,\cdots,n)$使得矩阵$B=(b_{rs})_{m\times m}$的谱半径小于1，则线性离散大系统(1.1)的零解为渐近稳定的。其中

$$b_{rs}=\max_{n_{s-1}+1\leq j\leq n_s}\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i\alpha_j^{-1}|a_{ij}| \quad (r,s=1,\cdots,m).$$

证明 对每个孤立子系统(1.2)作Liapunov函数：

$$v_r=\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i|x_i| \quad (r=1,\cdots,m).$$

于是对大系统(1.1)作向量Liapunov函数V：$R^n\to R^m$，

$$V=[v_1,\cdots,v_m]^T.$$

显然$\|V\|$是正定的，而

$$\begin{aligned} v_r(k+1)_{(1.1)}&=\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(k)\right| \\ &\leqslant\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j(k)| \\ &=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i|a_{ij}||x_j(k)| \\ &=\left(\sum_{j=1}^{n_1}+\cdots+\sum_{j=n_{s-1}+1}^{n_s}+\cdots+\sum_{j=n_{m-1}+1}^{n}\right)\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i|a_{ij}||x_j(k)| \\ &=\left(\sum_{j=1}^{n_1}\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}+\cdots+\sum_{j=n_{s-1}+1}^{n_s}\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}+\cdots+\sum_{j=n_{m-1}+1}^{n}\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\right) \\ &\quad\cdot[\alpha_i|a_{ij}|\alpha_j^{-1}\alpha_j|x_j(k)|] \end{aligned} \tag{1.6}$$

令 $b_{rs}=\max\limits_{n_{s-1}+1\leq j\leq n_s}\sum\limits_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i\alpha_j^{-1}|a_{ij}| \quad (r,s=1,\cdots,m)$，则

$$v_r(k+1)_{(1.1)}\leqslant\sum_{s=1}^{m}b_{rs}(v_s(k)\quad(r=1,\cdots,m)$$

即

$$V_{(1.1)}(k+1)\leqslant BV(k)$$

考虑辅助系统

$$v_r^*(k+1)=\sum_{s=1}^{m}b_{rs}v_s^*(k)\quad(r=1,\cdots,m),$$

即

$$V^*(k+1)=BV^*(k)\tag{1.7}$$

由已知条件知，系统(1.7)的零解是渐近稳定的，于是

$$\lim_{k\to\infty}v_r^*(k;\ v_r^0,k_0)=0\quad(r=1,\cdots,m).$$

再由引理得到 $v_r(k;\ v_r^*,\ k_0)\leqslant v_r^*(k;v_r^0,\ k_0)(r=1,\cdots,m)$，于是 $\lim\limits_{k\to\infty}v_r(k;v_r^0,k_0)=0$ $(r=1,\cdots,m)$，故有

$$\lim_{k\to\infty}x_i(k)=0\quad(i=1,\cdots,n).$$

证毕.

二、线性时变离散大系统

考虑线性时变离散大系统

$$x_i(k+1)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(k)x_j(k)\quad(i=1,\cdots,n)$$

即

$$X(k+1)=A(k)X(k)\tag{2.1}$$

假设矩阵函数 $A(k)(\forall k\in I)$ 都有界，且

$$a_{ij}\triangleq\sup_{k\in I}|a_{ij}(k)|\quad(i,j=1,\cdots,n)\tag{2.2}$$

定理2.1　如果系统(2.1)的系数矩阵 $A(k)$ 满足条件(2.2)，则仅当矩阵 $D=(d_{ij})$：

$$d_{ij}=\begin{cases}1-a_{ii} & (i=j);\\ -a_{ij} & (i\neq j)\end{cases}$$

的所有逐次主子式均为正时系统(2.1)的零解为渐近稳定的.

证明　对系统(2.1)作Liapunov函数 V：

$$V=\sum_{r=1}^{m}v_r:v_r=\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i|x_i|\quad(r=1,\cdots,m).$$

其中　$\alpha^T=(\alpha_{n_{r-1}+1},\ \cdots,\ \alpha_{n_r})>0$ 为任一常向量，于是

$$\Delta v_{r(2.1)}(x,k)=\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(k)x_j(k)\right|-\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r}\alpha_i|x_i(k)|$$

$$\leqslant \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j(k)| - \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} \alpha_i |x_i(k)|$$

$$\leqslant \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} \alpha_i \Big\{ (a_{ii}-1)|x_i(k)| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}|x_j(k)| \Big\}$$

$$(r=1,\cdots,m).$$

于是

$$\Delta V_{(2.1)}(x,k) \leqslant -\sum_{r=1}^{m} \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} \alpha_i \Big\{ (1-a_{ii})|x_i(k)| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}|x_j(k)| \Big\}.$$

由定理1.1证明知，$\Delta V_{(2.1)}(x,k)$是负定的($\forall x\in R^n, k\in I$)，故定理得证.

定理2.2 假设系统(2.1)的系数矩阵$A(k)$满足条件(2.2)；如果存在$\alpha_i>0(i=1,\cdots,n)$使得矩阵$B=(b_{rs})_{m\times m}$的谱半径小于1，则系统(2.1)的零解是渐近稳定的. 其中

$$b_{rs}=\max_{n_{s-1}+1\leqslant j\leqslant n_s} \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} \alpha_i \alpha_j^{-1} a_{ij} \quad (r,s=1,\cdots,m).$$

证明 对系统(3.1)作Liapunov函数V：$R^n \to R^m$

$$V=[v_1,\cdots,v_m]^T: v_r=\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} \alpha_i |x_i| \quad (r=1,\cdots,m).$$

于是

$$v_{r(2.1)}(k+1)=\sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} \alpha_i \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k) x_j(k) \Big|$$

$$\leqslant \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j(k)|$$

$$=\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} \alpha_i a_{ij}|x_j(k)|$$

$$=\Big(\sum_{j=1}^{n_1} \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} + \cdots + \sum_{j=n_{s-1}+1}^{n_s} \sum_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} \Big)$$

$$\cdot [\alpha_i a_{ij} \alpha_j^{-1} \alpha_j |x_j(k)|] \quad (r=1,\cdots,m),$$

令 $b_{rs}=\max\limits_{n_{s-1}+1\leqslant j\leqslant n_s} \sum\limits_{i=n_{r-1}+1}^{n_r} \alpha_i \alpha_j^{-1} a_{ij} \quad (r,s=1,\cdots, m)$，则

$$v_{t(2.1)}(k+1) \leqslant \sum_{s=1}^{m} b_{rs} v_s(k) \quad (r,s=1,\cdots,m),$$

即

$$V_{(2.1)}(k+1) \leqslant BV(k).$$

以下证明与定理1.2证明相同．证毕．

参 考 文 献

[1] 刘永清，大系统在稳定性理论中的分解问题(5)，数学研究与评论，2(2)(1982)．

[2] 刘永清、宋中昆，大型动力系统的理论与应用，华南工学院出版社 (1988)．

[3] Siljak, D. D., *Large-Scale Dynamics: Stability and Structure*, North-Holland, New York(1978).

The Asymptotic Stability of the Linear Discrete Large-Scale Systems

Hu Chao-yang

(Jiangxi Normal University, Nanchang)

Abstract

In this paper, we directly use the linear norm Liapunov function to investigate the stability of the linear discrete large-scale systems and obtain some criteria for the asymptotic stability of such a system.

Key words discrete large-scalc systems, Stability, Liapunov function