

求解平片裂纹问题的有限部 积分与边界元法*

秦太验 汤任基

(上海交通大学工程力学系, 1991年11月6日收到)

摘 要

本文利用位移的Somigliana公式和有限部积分的概念, 导出了求解三维弹性力学中的任意形状平片裂纹问题的超奇异积分方程组, 进而联合使用有限部积分法与边界元法对所得方程建立了数值法。为验证本文的方法, 计算了若干数值例子的裂纹面的位移间断及裂纹前沿的应力强度因子, 它们与理论值相比符合很好。

关键词 超奇异积分方程 三维断裂力学 有限部积分法

一、引 言

Ioakimidis (1982年) 首次将有限部积分的概念引入断裂力学, 并导出了受法向载荷作用的平片裂纹的超奇异积分方程^[1], 其中未知函数是裂纹面的位移间断。与主值型的奇异积分方程^[2,3]相比, Ioakimidis 的方程在数值计算方面更简单, 容易利用有限部积分的Gauss求积公式求解^[4,5]。因此, 近几年来, 超奇异积分方程被广泛用于求解裂纹问题^[6,7]。本文利用有限部积分的概念和Somigliana公式, 在工作[8]的基础上, 进一步导出了三维断裂力学中受任意载荷作用的平片裂纹的超奇异积分方程组, 进而推广文献[7]关于I型裂纹问题的数值方法, 联合使用有限部积分法与边界元法对所得方程组建立了数值法。最后利用本文介绍的方法计算了若干数值例子, 得到了裂纹面的位移间断和裂纹前沿的应力强度因子, 数值结果表明本文提出的方法是令人满意的。

二、位移场和应力场

考虑一个含一平片裂纹 S 的三维无限弹性体, 如图1(a)所示, 令 S^+ 和 S^- 分别表示 S 的上、下表面, 则利用Somigliana公式导出弹性体内任一点 p 的位移为^[8]:

$$u_k(p) = - \int_{S^+} T_{ki}^+(p, Q) \bar{u}_i(Q) dS(Q) \quad (i, k=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

式中 $\bar{u}_i = u_i^+ - u_i^-$ ($i=1, 2, 3$) 为裂纹 S 的位移间断, 积分核由以下公式给出:

* 国家教委博士点基金资助项目。

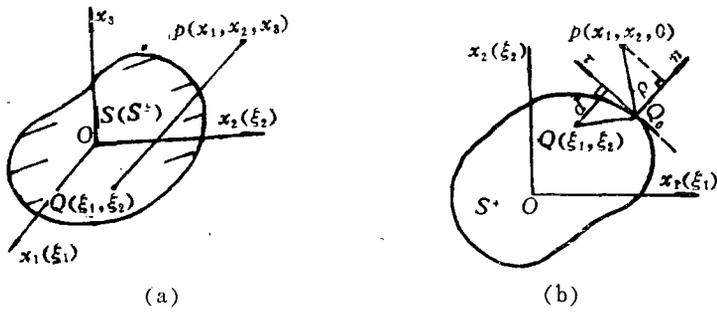


图 1

$$T_{ki}^+ p, Q = \{r_{,3} [(1-2\nu) \delta_{ki} + 3r_{,k} r_{,i}] - (1-2\nu) \cdot r_{,k} \delta_{3i} - r_{,i} \delta_{3k}\} / 8\pi (1-\nu) r \quad (i, k=1, 2, 3)$$

其中 ν 为泊松比, r 为 p 点与 Q 点之间的距离.

体内 p 点相应的应力为:

$$\sigma_{ij} p_i = - \int_{S^+} S_{kij}^+(p, Q) \bar{u}_k Q \cdot dS Q \quad i, j, k=1, 2, 3 \quad (2.2)$$

式中积分核为:

$$S_{kij}^+(p, Q) = \frac{E}{8\pi(1-\nu^2)} r^3 \{-3r_{,3} [(1-2\nu) r_{,k} \delta_{ij} + \nu r_{,i} \delta_{jk} + r_{,j} \delta_{ik}] - 5r_{,i} r_{,j} r_{,k} - 3\nu r_{,j} \delta_{3i} + r_{,i} \delta_{3j}\} r_{,k} - (1-2\nu) (3r_{,i} r_{,j} \delta_{3k} + \delta_{3i} \delta_{jk} + \delta_{3j} \delta_{ik} + (1-4\nu) \delta_{3k} \delta_{ij}) \quad (k, i, j=1, 2, 3)$$

其中 E 为弹性模量.

三、积分方程组

利用有限部积分的概念, 在应力表达式 2.2 式中, 令内点 p 趋向裂纹面 S^+ , 则裂纹面 S^+ 上的应力的边界值由以下超奇异积分表示为:

$$\sigma_{\alpha 3}^+ = \frac{E}{8\pi(1-\nu^2)} \int_{S^+} \frac{1}{r^3} [(1-2\nu) \delta_{\alpha\beta} + 3\nu r_{,\alpha} r_{,\beta}] \bar{u}_\beta d\xi_1 d\xi_2 \quad (\alpha, \beta=1, 2) \quad (3.1)$$

$$\sigma_{33}^+ = \frac{E}{8\pi(1-\nu^2)} \int_{S^+} \frac{1}{r^3} \bar{u}_3 d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.2)$$

其中符号 \int 表示积分须按有限部积分计算^[9].

设裂纹表面 S^+, S^- 上作用的外应力分量为 (p_1, p_2, p_3) , 令它们与 (3.1) ~ (3.2) 中的相应的边界应力相等, 则得到一组超奇异积分方程如下:

$$\begin{aligned} & \int_{S^+} \frac{1}{r^3} [(1-2\nu) \delta_{\alpha\beta} + 3\nu r_{,\alpha} r_{,\beta}] \bar{u}_\beta(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ & = - \frac{8\pi(1-\nu^2)}{E} p_\alpha(x_1, x_2) \quad (\alpha, \beta=1, 2) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\int_{S^+} \frac{1}{r^3} \bar{u}_3(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = - \frac{8\pi(1-\nu^2)}{E} p_3(x_1, x_2) \quad (x_1, x_2) \in S^+ \quad (3.4)$$

注意到方程 (3.3) ~ (3.4) 中的未知函数 $\bar{u}_i (i=1, 2, 3)$ 比相应的主值型奇异积分方程^[2,9]中的未知函数 $\bar{u}_{i,\alpha} (i=1, 2, 3; \alpha=1, 2)$ 更正规, 因而超奇异积分方程的数值法比主

值型的简单。通常可联合使用有限部积分法与边界元法求解方程 (3.3) ~ (3.4)。解这些方程，可得到所有的位移间断， $\bar{u}_i (i=1, 2, 3)$ ，于是问题解决。

四、数值方法

第三个超奇异积分方程 3.4 可联合使用有限部积分法与边界元法求解^[7]，故这里仅给出求解由未知函数 $\bar{u}_\alpha (\alpha=1, 2)$ 耦联的超奇异积分方程组 (3.3) 的数值法。考虑到相似性，以 (3.3 第一式 $\alpha=1$) 为例，说明其离散过程，对于 (3.3) 第二式可类似处理。将积分区域 S^+ 划分为若干三角形单元 (或其它有限单元，如图 2(a) 所示，节点总数为 N 。利用边界元法^[10]，

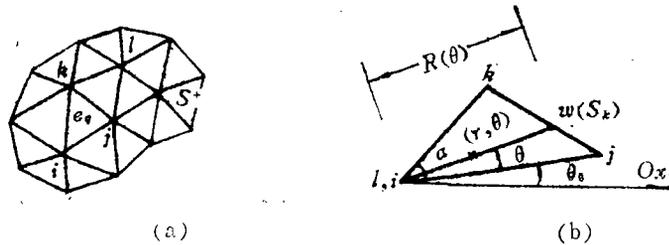


图 2

计算方程 (3.3) 左边对于每一个单元的所有积分，在常规单元的情形，(3.3) 第一式 ($\alpha=1$) 可化为以下线性代数方程组：

$$\sum_{m=1}^N A_{lm} \bar{u}_{1m} + \sum_{m=1}^N B_{lm} \bar{u}_{2m} = - \frac{8\pi(1-\nu^2)}{E} p_{1l} \quad (l=1, 2, \dots, N) \quad (4.1)$$

式中 \bar{u}_{1m} 和 \bar{u}_{2m} 为第 m 个节点处的位移间断分量， p_{1l} 为在参考节点 l 上作用的沿 x_1 方向的载荷分量， A_{lm} 和 B_{lm} 为系数矩阵元素，它们由对参考节点 l 下列积分对 S^+ 上所有单元积分决定：

$$I_{e_q} = \int_{e_q} \frac{1}{r^3} [(1-2\nu)\delta_{1\beta} + 3\nu r_{,1} r_{,\beta}] \bar{u}_\beta(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (q=1, 2, \dots, M; \beta=1, 2) \quad (4.2)$$

式中 M 为单元总数。 $\bar{u}_\beta (\beta=1, 2)$ 设为可由单元 e_q 的面积坐标表示的线性函数。若参考节点 l 不与单元 e_q 的任一节点重合，则积分 I_{e_q} 可按普通边界元法直接计算。当参考节点 l 与单元 e_q 的某一节点 (不妨设为 i 节点) 重合，此时积分 I_{e_q} 是超奇异性的，因而须按有限部积分法^[1,7] 计算：

$$I_{e_q} = -2\Delta \cdot \int_0^1 \frac{(1-2\nu) + 3\nu \cos^2(\theta + \theta_0)}{R^3(\theta)} dS_k \cdot \bar{u}_{1i} - \Delta \cdot \int_0^1 \frac{3\nu \sin 2(\theta + \theta_0)}{R^3(\theta)} dS_k \cdot \bar{u}_{2i} \quad (4.3)$$

其中 S_k 为 jk 边上 w 点的面积坐标，如图 2(b) 所示， Δ 为单元 e_q 的面积， $R(\theta)$ 为点 $i(l)$ 与 w 之间的距离， θ 为 ij (或 lj) 边与 iw 连线之间的夹角，以逆时针方向为正。

使用以上数值方法，将超奇异积分方程组 (3.3) ~ (3.4) 化为如下矩阵形式表示的线性代数方程组：

$$A \cdot \{\bar{u}_1\} + B \cdot \{\bar{u}_2\} = \{P_1\} \quad (4.4)$$

$$C \cdot \{\bar{u}_1\} + D \cdot \{\bar{u}_2\} = \{P_2\} \quad (4.5)$$

$$G \cdot \{\bar{u}_3\} = \{P_3\} \quad (4.6)$$

其中 A, B, C, D, G 均为已知的系数矩阵, $\{P_1\}, \{P_2\}, \{P_3\}$ 为已知的节点载荷列向量, $\{\bar{u}_1\}, \{\bar{u}_2\}, \{\bar{u}_3\}$ 为未知的节点位移间断列向量。解方程组 (4.4) ~ (4.6), 即可得到裂纹面上所有节点处的位移间断 $\bar{u}_i (i=1, 2, 3)$ 。求得这些值之后, 利用 Somigliana 公式和有限部积分法, 可算出带裂纹体内任一内点的位移和应力, 由此问题得以解决。

五、应力强度因子计算公式

裂纹前沿 Q_0 点的各型应力强度因子定义如下:

$$K_I(Q_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{2\rho} \cdot \sigma_{33}(\rho) \quad (5.1)$$

$$K_{II}(Q_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{2\rho} \cdot \sigma_{3n}(\rho) \quad (5.2)$$

$$K_{III}(Q_0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{2\rho} \cdot \sigma_{3\tau}(\rho) \quad (5.3)$$

式中, $\sigma_{33}(\rho), \sigma_{3n}(\rho), \sigma_{3\tau}(\rho)$ 分别为内点 ρ 处关于局部坐标系 (x_3, n, τ) 的法向和切向应力分量, 如图1(b)。根据文献[2], 在裂纹面上 Q_0 点附近, 位移间断可近似表示为:

$$\bar{u}_i(Q) = u_i^*(Q_0)(d/2)^{1/2}, \quad (i=1, 2, 3) \quad (5.4)$$

式中 d 为 Q 点与切线 $Q_0\tau$ 的距离, 如图1(b)所示。利用上述结果, 可以计算出裂纹边缘点 Q_0 附近渐近应力 $\sigma_{ij}(\rho)$, 再代入方程 (5.1) ~ (5.3), 则导出如下应力强度因子的等价表达式:

$$K_I(Q_0) = -\frac{E}{8(1-\nu^2)} \lim_{Q \rightarrow Q_0} \bar{u}_3(Q) \cdot \left(-\frac{2}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.5)$$

$$K_{II}(Q_0) = -\frac{E}{8(1-\nu^2)} \lim_{Q \rightarrow Q_0} \bar{u}_n(Q) \cdot \left(\frac{2}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

$$K_{III}(Q_0) = \frac{E}{8(1+\nu)} \lim_{Q \rightarrow Q_0} \bar{u}_\tau(Q) \cdot \left(-\frac{2}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

其中 $\bar{u}_n(Q)$ 和 $\bar{u}_\tau(Q)$ 分别为关于局部坐标系 (x_3, n, τ) 的法向和切向位移间断。

六、数值结果

为了验证前面介绍的方法, 并说明其应用, 本文作了若干数值例子的计算。

例1 受均布压应力作用的椭圆平片裂纹。无限体中椭圆平片裂纹的形状与几何参数见图3及图4。若裂纹上下表面受到均匀的压应力: $p_3(x, y) = p_0 = \text{const}$, 则裂纹的张开位移列于表1。由表1可见, 本文的结果与理论值^[11]符合较好。

表1 无量纲张开位移值

y/b		0.00	0.38	0.68	0.80	0.90
U_3^*	本文	1.02100	0.94250	0.73223	0.58442	0.43928
	理论值	1.00000	0.92499	0.73321	0.60000	0.43589

* $U_3^*(y/b) = \bar{w}_3(0, y) \cdot \lambda$; $\lambda = E \cdot E(k) / 4(1-\nu^2)p_0 b$; $E(k)$ 为椭圆函数; $k = [1 - (b/a)^2]^{1/2}$

为了比较相应的裂纹前沿的应力强度因子, 图3 给出了随参考角 φ 变化的无量纲应力强

度因子 $K_I^*(\varphi) = K_I(\varphi) / p_0 \sqrt{b}$, 图 4 给出了最大应力强度因子 $K_I(b)$ 随两半轴长比 a/b 变化的关系曲线. 由图 4 可见, 本文的结果与理论值^[11]十分接近, 比 Bui^[2]的结果好.

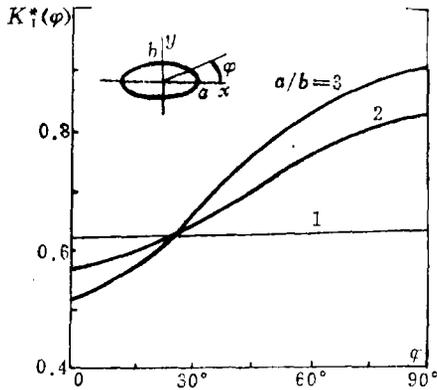


图 3

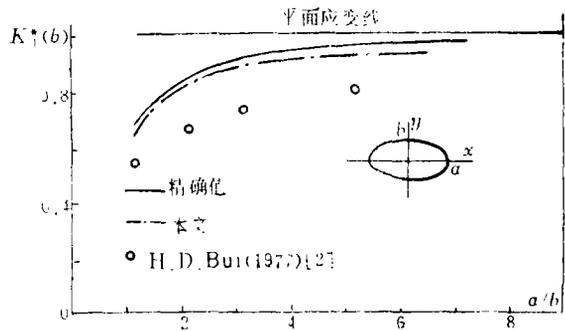


图 4

例2 I型矩形平片裂纹问题. 无限体中矩形平片裂纹的形状及几何参数见图 5 和图 6. 当裂纹表面受均布压应力 $p_3(x, y) = p_0 = \text{const}$ 作用时, 图 5 给出了最大应力强度因子 $K_I(b) = K_I^*(b) \cdot p_0 \sqrt{b}$ 随比值 a/b 变化的曲线. 由图 5 看出, 当比值 a/b 增大时, 应力强度因子基本上接近平面应变情形下的值.

显然, 当裂纹上下表面作用线性分布的压应力 $p_3(x, y) = p_0(1 + y/b)/2$ ($p_0 = \text{const}$) 时, 应力强度因子在裂纹边缘 AB , BC 和 CD 上不再保持不变, 各自为相应的坐标 x 或 y 的函数, 记 $K_{IAB}(x)$, $K_{IBC}(y)$ 和 $K_{ICD}(x)$ 分别表示边缘 AB , BC 和 CD 上的应力强度因子. 图 6 给出各边上的无量纲应力强度因子 $K_{IAB}^*(x/a) = K_{IAB}(x) / p_0 \sqrt{b}$, $K_{IBC}^*(y/b) = K_{IBC}(y) / p_0 \sqrt{b}$ 和 $K_{ICD}^*(x/a) = K_{ICD}(x) / p_0 \sqrt{b}$. 由于裂纹角点处的几何奇性, 在这些角点上不容

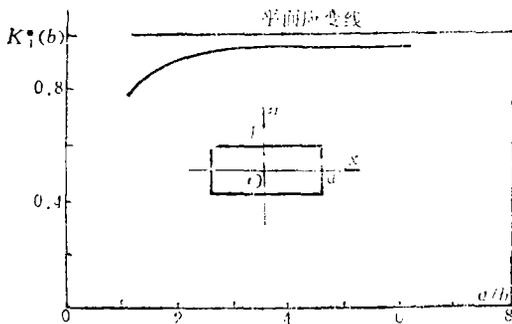


图 5

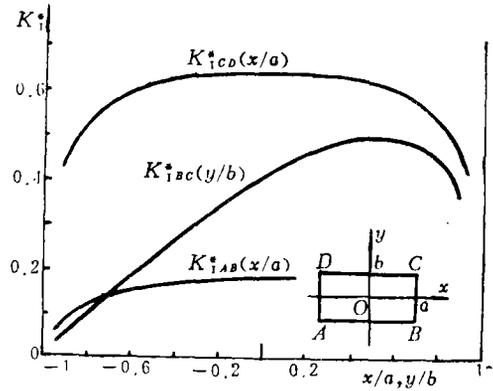


图 6

易得到应力强度因子的值, 故图 6 中的曲线去掉了角点上的值.

例3 受剪切作用的椭圆平片裂纹. 无限体中椭圆平片裂纹的形状与几何参数见图 7(b). 为简单起见, 我们仅讨论裂纹受均匀剪切载荷 q_0 作用的情形, 载荷的作用方向与 Ox 轴成 α 角, 如图 7(b) 所示. 显然, 此时的裂纹问题与前述两个例子不同, 在裂纹面 S 上有两种位移间断 $\bar{u}_1(x, y)$ 和 $\bar{u}_2(x, y)$, 裂纹前沿处于混合断裂状态, 即存在两种不同的应力强度因子 $K_I(\varphi)$ 和 $K_{II}(\varphi)$. 因此, 问题归结为求解一组超奇异积分方程组 (3.3 $\alpha=1, 2$). 利

用有限部积分—边界元法求解方程组(3.3)。注意到应力强度因子的计算是基于前述公式(5.5 ~ (5.7)上的, 利用适合的外推完成其中的极限过程。图7 a 和图7 b 分别给出了裂纹前沿应力强度因子 $K_{II}(\varphi) = K_{II}^*(\varphi) \cdot q_0 \sqrt{b}$ 和 $K_{I}(\varphi) = K_{I}^*(\varphi) \cdot q_0 \sqrt{b}$ 对于不同的角度 α 随参考角 φ 变化的关系曲线。

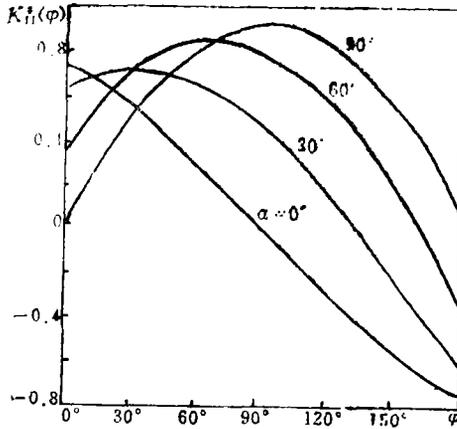


图 7(a)

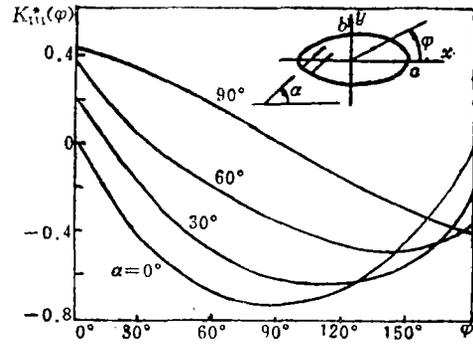


图 7(b)

参 考 文 献

- [1] Ioakimidis, N. I., Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity, *Acta Mechanica*, 45 (1982), 31—47.
- [2] Bui, H. D., An integral equations method for solving the problems of a plane crack of arbitrary shape, *J. Mech. Phys. Solids*, 25 (1977), 29.
- [3] Weaver, J., Three-dimensional crack analysis, *Internat. J. Solids and Structures*, 13 (1977), 321.
- [4] Ioakimidis, N. I., Remarks on the Gaussian quadrature rule for finite-part integrals with a second order singularity, *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, 69 (1988), 325.
- [5] Tsamasphyros, G. and G. Dimou, Gauss quadrature rule for finite part integrals, *Internat. J. Numer. Methods. Engrg.*, 30 (1990), 13—26.
- [6] Kaya, A. C. and F. Erdogan, On the solution of singular integral equations with strongly singular kernels, *Quart. Appl. Math.*, 45(1) (1987), 105.
- [7] Sohn, G. H. and C. S. Hong, Application of singular integral equations to embedded planar crack problems in finite body, *Boundary Element*, C. A. Brebbia and G. Maier, Ed., Vol.2 (1985), 8—57.
- [8] 汤任基, 断裂力学中的两类奇异积分方程, 上海交通大学学报, 24(5-6) (1990), 36.
- [9] Kutt, H. R., The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration, *Numer. Math.*, 24 (1975), 205.
- [10] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element in Engineering Science*, McGraw-Hill (1971).
- [11] Sneddon, I. N. and M. Lowengrub, *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, New York (1969).

Finite-Part Integral and Boundary Element Method to Solve Flat Crack Problems

Qin Tai-yan Tang Ren-ji

(*Shanghai Jiaotong University, Shanghai*)

Abstract

Using the Somigliana formula and the concepts of finite-part integral, a set of hypersingular integral equations to solve the arbitrary flat crack in three-dimensional elasticity is derived and its numerical method is then proposed by combining the finite-part integral method with the boundary element method. In order to verify the method, several numerical examples are carried out. The results of the displacement discontinuities of the crack surface and the stress intensity factors at the crack front are in good agreement with the theoretical solutions.

Key words hypersingular integral equations, three-dimensional fracture mechanics, finite-part integrals