

矩形宏单元B-I模型与板结构的影响面

王进忠 何长华

(天津大学) (北京 能源部电建所)
(孙焕纯推荐, 1991年5月13日收到)

摘 要

本文首次建立了矩形宏单元的B-I模型, 比现有模式更具实用价值及灵活性. 为建立薄板内力 R 的影响面, 文中定义了诸相应的广义分布荷载 q . 算例表明, 本文提出的模型及广义荷载公式具有计算精度高, 占用内存少等优点, 对承受移动荷载的板结构, 诸如双向连续桥面板, 高桩码头无梁板等效果尤为突出.

关键词 宏单元B-I模型 移动荷载 影响面 广义分布荷载

一、前 言

文献[1], [2]针对矩形板块所建立的单元模型不仅能自动满足薄板微分方程及边界条件, 而且, 由于所取位移函数是完备系, 在极限情况下, 能够描述单元可能产生的任意形式的变形, 特称其为“宏单元”, 以示其与一般非完备模式的区别. 对于简单的矩形板块结构, 看作是一个宏单元就可得到足够精确的解, 而无需进行单元剖分.

然而, 上述宏单元的基本未知量均位于单元外边界与角点处, 对于有内柱支承的无梁板结构, 由于柱支承的存在将无法发挥宏单元的长处. 为此, 本文建立了宏单元的B-I模型, 其基本未知量除位于边界、角点者外, 还将包括单元内部的柱支承反力、反弯矩. 将宏单元B-I模型与梁、柱单元相结合, 文中建立了板—梁—柱结构体系的静力分析公式. 最后, 为建立板结构的影响面, 根据Maxwell互易定理, 针对宏单元B-I模型, 文中推导并给出了相应广义分布荷载 q 的计算公式.

二、位 移 函 数

取边长为 a, b 的矩形简支板为宏单元, 如图1所示, 设其边界 $i-j$ 上的位移 w_{ij} 及弯矩 M_{ij} 分别为^[1]:

$$w_{ij} = w^i \left(1 - \frac{y}{b}\right) + w^j \frac{y}{b} + \sum_{n=1}^{N_w} w_{in} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ + \frac{b^2}{6D(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{y^3}{b^3} - 3 \frac{y^2}{b^2} + 2 \frac{y}{b} \right) (M_{ij}^i - \nu M_{ij}^j) \right]$$

$$+\left(-\frac{y^3}{b^3}+\frac{y}{b}\right)(M_y^j-\nu M_x^j) \quad (2.1)$$

$$M_{i,j}=M_x^i\left(1-\frac{y}{b}\right)+M_y^i\frac{y}{b}+\sum_{n=1}^{N_m}M_{sn}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (2.2)$$

式中: $D=Ek^3/12(1-\nu^2)$, ν 为泊松比, h 为板厚.

对边界 $s=1, 2$ 有 $i=1, 3 \quad j=2, 4$,

对边界 $s=3, 4$ 有 $i=1, 2 \quad j=3, 4$;

但应将 M_x 与 M_y 互换, 并以 x/a 代替 y/b .

式(2.1), (2.2)采用富氏级数加补充项的形式, 目的是改善级数的收敛性.

从上述边界条件出发, 并考虑到内柱支承反力的作用, 取宏单元B-I模型的位移函数为:

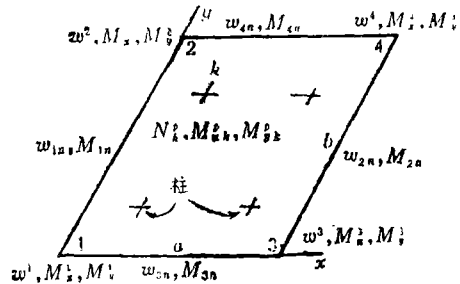


图1 单元模型与基本未知量

$$w = \sum_{n=1}^{N_w} [G_n(x,y)][T_n]\{w_s\} + \sum_{n=1}^{N_m} [G_n(x,y)][S_n]\{M_s\} + [C(x,y)]\{w^c\} + [A(x,y)]\{M^c\} + w_0 + \sum_m \sum_n [B_m^t]\{N^p\} + \sum_m \sum_n [E_m^t]\{M^p\} \quad (2.3)$$

式中右端的第1至第5项同文献[1], [2], 第6, 7项为本文针对柱支承作用而新增加的补充项. 且有:

$$\left. \begin{aligned} \{w_s\} &= [w_{1n} \ w_{2n} \ w_{3n} \ w_{4n}]^T && \text{板边广义位移} \\ \{M_s\} &= [M_{1n} \ M_{2n} \ M_{3n} \ M_{4n}]^T && \text{板边广义弯矩} \\ \{w^c\} &= [w^1 \ w^2 \ w^3 \ w^4]^T && \text{角点位移} \\ \{M^c\} &= [M_x^1 \ M_y^1 \ M_x^2 \ \dots \ M_y^4]^T && \text{角点弯矩} \\ \{N^p\} &= [N_1^p \ N_2^p \ \dots \ N_{N_c}^p]^T && \text{内柱反力} \\ \{M^p\} &= [M_{x_1}^p \ M_{y_1}^p \ M_{x_2}^p \ \dots \ M_{y_{N_c}}^p]^T && \text{内柱反力矩} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

今后, 我们将用 $\{X\}^e$ 表示式(2.4)所示各未知参数组成的未知列向量, 不难看出, 它含有 $4(N_w+N_m)+3N_c+12$ 个元素, 其中 N_w, N_m 为级数项数, N_c 为内柱数目.

式(2.3)中的系数矩阵 $[G_n(x,y)], [T_n], [S_n]$...等详见附录, 其推导过程参见文献[4].

不难验证, 式(2.3)所示位移函数 w 将自动满足薄板理论基本方程^[3]及前述边界条件(2.1)与(2.2).

三、混合法基本方程

将式(2.3)所示位移函数 w 代入薄板理论有关公式^[3], 不难得到宏单元B-I模型的边界剪力 $\{V_s\}$ 、边界转角 $\{\theta_s\}$ 、角点反力 $\{R^c\}$ 、角点转角 $\{\theta^c\}$ 、内柱支点挠度 $\{w^p\}$ 及该处转角

$\{\phi^e\}$, 为简明起见, 将上述诸量的和向量用 $\{Y\}^e$ 表示, 经整理则有:

$$[A]^e \{X\}^e = \{Y\}^e - \{P\}^e \tag{3.1}$$

式中 $\{X\}^e$ 见式(2.4), 矩阵 $[A]^e$ 是 $4(N_w + N_m) + 3N_c + 12$ 阶的方阵, 由于 $\{X\}^e$ 及 $\{Y\}^e$ 均分别含有未知及已知的“力”及“位移”, 故称(3.1)式为混合法方程, 相应地, $[A]^e$ 为混合系数矩阵, $\{P\}^e$ 为非齐次项。

对板—梁—柱体系中的连续板, 在相邻宏单元之间及角点处有平衡及相容条件:

$$\left. \begin{aligned} \sum_e V_s + V_b = 0 \\ \theta_{s1}^e = \theta_{s2}^e \\ \sum_e R^c + R^p = 0 \\ \theta_{c1}^e = \theta_{c2}^e \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

在宏单元内, 有柱顶与板的变形相容条件:

$$w_i^e = \Delta_i = 0, \phi_i^e - \phi_i = 0 \tag{3.3}$$

式中 V_b 和 R^p 表示梁与角柱的支承反力, 可由下式求得:

$$\left. \begin{aligned} V_b = EI \sum_n \frac{n^4 \pi^4}{l^4} w_{sn} \sin \frac{n\pi x}{l} \\ R^p = \frac{EA}{H} w^c \end{aligned} \right\} \tag{3.4}$$

式中 w_{sn} , w^c 见式(2.4), EI 为梁的抗弯刚度, l 为跨长; EA 为柱的抗压刚度, H 为柱高, w_i^e 及 ϕ_i^e 表示柱顶竖向位移与转角, 可写作 $w_i^e = \delta_i N_i^e$, $\phi_i^e = \varphi_i M_i^e$; δ_i , φ_i 表示柱顶作用单位轴力、单位弯矩时该处产生的轴向位移与转角, 可由材料力学公式得到。

利用宏单元系数矩阵 $[A]^e$, 平衡相容条件(3.2), (3.3), 可组成整体结构的混合法基本方程:

$$[A]\{X\} = \{P_0\} \tag{3.5}$$

其中, $\{X\}$ 是由结构内、外边界上的广义位移、广义弯矩、内外角点位移、弯矩, 宏单元内柱支承反力、反弯矩组成的未知列向量;

$[A]$ 是结构的广义混合系数矩阵;

$\{P_0\}$ 是载荷作用于基本结构——四边简支矩形板上时, 由式(2.3)中的非齐次项 w_0 所得边界广义转角、广义剪力、角点转角、角点反力等构成的总体“载荷列阵”。

四、广义载荷与影响面

我们将借助Maxwell互易定理把板上任一定点 Q 的不同内力影响面问题转化为在相应广义分布荷载 q 作用下, 求动点 P 的挠度问题。

此外, 为得到内力影响面, 我们将首先建立与内力有关各量值

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2}, \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta}, \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}$$

的影响面。

1. 曲率 $K_\xi = \partial^2 w / \partial \xi^2$, $K_\eta = \partial^2 w / \partial \eta^2$ 的影响面及广义分布荷载

对图2(a)所示动点 P , 定点 Q 的荷载状况, 应用Maxwell互易定理, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时有:

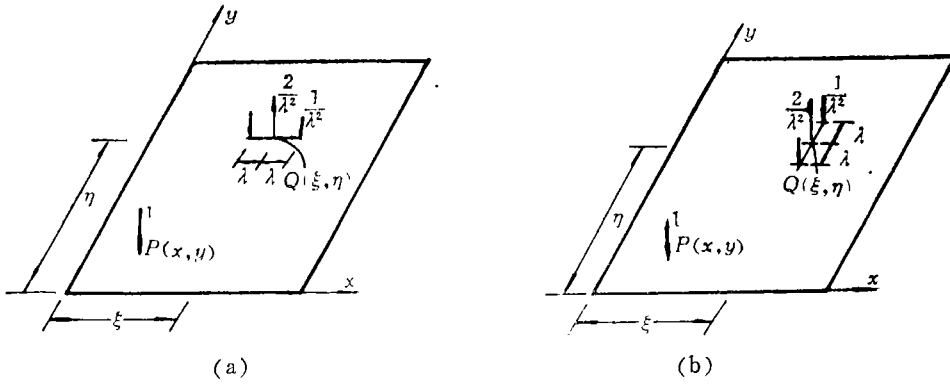


图 2

$$w(P, Q) = \frac{\partial^2 w(Q, P)}{\partial \xi^2}$$

即在动点P作用单位力时，在定点Q产生的曲率 $K_\xi = \partial^2 w(Q, P) / \partial \xi^2$ 等于在定点Q作用图示力系 ($\lambda \rightarrow 0$) 时在动点P产生的挠度 $w(P, Q)$ ，换句话说，即定点Q处作用的力系 ($\lambda \rightarrow 0$) 所产生的挠曲面 $w(P, Q)$ 就是该点曲率 K_ξ 的影响面。

由广义函数论可知，图2(a)Q点处作用的力系，当 $\lambda \rightarrow 0$ 时可表示为广义分布荷载

$$q_\xi^k = T(x - \xi) \delta(y - \eta)$$

其中T是双偶极函数， δ 是脉冲函数。展为级数形式则有^[5]

$$q_\xi^k \sim \frac{4\pi^2}{ab} \sum_m \sum_n \frac{n^2}{a^2} \sin \frac{n\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

同理，分析图2(b)所示荷载将有与曲率 $K_\eta = \partial^2 w(Q, P) / \eta^2$ 的影响面相对应的广义分布荷载：

$$q_\eta^k \sim \frac{4\pi^2}{ab} \sum_m \sum_n \frac{m^2}{b^2} \sin \frac{n\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

2. $\frac{Q_x}{D} = -\left(\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2}\right)$, $\frac{Q_y}{D} = -\left(\frac{\partial^3 w}{\eta^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta}\right)$ 的影响面及其广义分布荷载

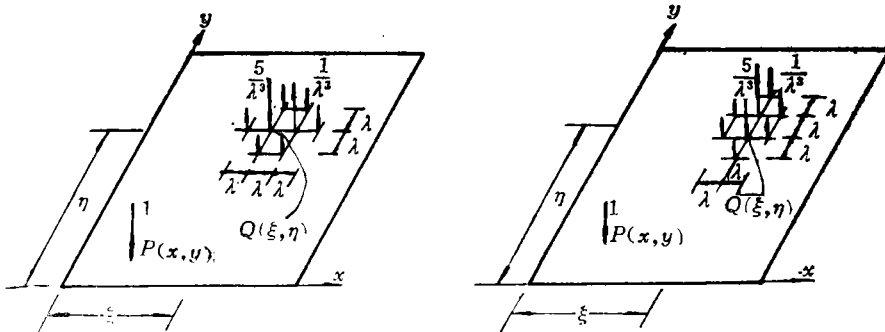


图 3

对图3(a)所示动点P，定点Q的荷载状况，根据Maxwell互易定理，当 $\lambda \rightarrow 0$ 时，有

$$w(P, Q) = \frac{\partial^3 w(Q, P)}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 w(Q, P)}{\partial \xi \partial \eta^2}$$

即定点Q处作用的力系 ($\lambda \rightarrow 0$) 所产生的挠曲面 $w(P, Q)$ 就是该点 $-Q_x/D$ 的影响面。

由广义函数论可知, Q点的荷载力系($\lambda \rightarrow 0$)可表示为广义分布荷载

$$q_{\xi}^Q = -K(x-\xi)\delta(y-\eta) + T(y-\eta)B(x-\xi)$$

其中K为双T函数, B是偶极函数, 展为级数则有:

$$q_{\xi}^Q \sim \sum_m \sum_n \frac{4\pi^3}{ab} \left(\frac{n^3}{a^3} + \frac{m^2 n}{ab^2} \right) \cos \frac{n\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

同理, 分析图3(b)所示荷载状况, 将有与

$$-\frac{Q_y}{D} = \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta}$$

的影响面相对应的广义分布荷载:

$$q_{\eta}^Q \sim \sum_m \sum_n \frac{4\pi^3}{ab} \left(\frac{m^3}{b^3} + \frac{mn^2}{a^2 b} \right) \sin \frac{n\pi\xi}{a} \cos \frac{m\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

3. 扭率 $K_{\xi\eta} = \partial^2 w / \partial \xi \partial \eta$ 的影响面及其广义分布荷载

对图4所示动点P, 定点Q的荷载状况, 根据Maxwell互易定理, 当 $\lambda \rightarrow 0$, 有:

$$w(P, Q) = w(Q, P) / \xi \delta \eta$$

即定点Q处作用的力系($\lambda \rightarrow 0$)所产生的挠曲面 $w(P, Q)$ 就是该点扭率 $K_{\xi\eta}$ 的影响面。

同理, Q点的力系($\lambda \rightarrow 0$)可表示为广义分布荷载:

$$q_{\xi\eta}^m = B(x-\xi)B(y-\eta)$$

其级数展式为:

$$q_{\xi\eta}^m \sim \frac{4\pi^2}{ab} \sum_m \sum_n \frac{mn}{ab} \cos \frac{n\pi\xi}{a} \cos \frac{m\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

在上述诸广义分布荷载q的作用下, 求解方程(3.5), 进而得到式(2.3)所示挠曲面w, 即分别为 K_{ξ} , K_{η} , ... 诸量值的影响面, 内力R的影响面即不难得到。

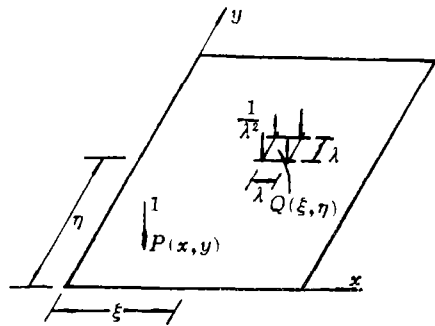


图 4

五、算 例

例1 图5所示悬臂方板, 泊松比 $\nu=0.3$, 边长为a, 承受均布荷载q. 令挠度 $w = \alpha q a^4 / D$, 弯矩 $M_y = \beta q a^2$, 计算结果见表1, 表2.

文献[6]中讨论弯矩级数取至24项, 而本文取10项即达到表中精度, 同时, 避免了角点弯矩为零的弊病.

例2 图6所示四柱支承无梁方板, $E A a^2 / D H = 2$, 建立中点C的弯矩 M_C^z 的影响面.

令 $M_C^z = \alpha P$, 所得 α 值列于表3, 其中上一行数字为用一个宏单元B-I模型, 级数取12项的计算结果, 下一行为用9个宏单元一般模型, 级数取6项的计算结果, 二者相当接近, 但前者只有120个自由度, 后者却有336个自由度. 微

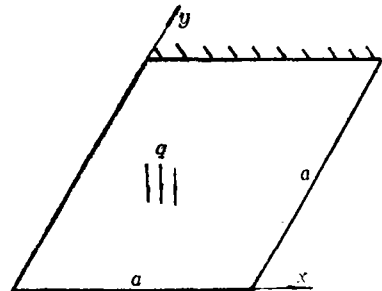


图 5

表 1 边界 $x=a$ 上的 α 值 $w = \alpha q a^4 / D$

y/a	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
文献[6]	0.12933	0.085046	0.044327	0.011949	0.0
有限元[6]	0.12708	0.083888	0.043221	0.011820	0.0
本 文	0.12837	0.084734	0.043618	0.011848	0.0

表 2 边界 $y=a$ 上的 β 值 $M_y = \beta q a^2$

x/a	0.0000	0.0625	0.1250	0.2500	0.3750	0.5000
文献[6]	0.00000	-0.47314	-0.51270	-0.53355	-0.53550	-0.53560
有限元[6]	-0.34571		-0.50399	-0.53260	-0.53508	-0.53092
本 文	-0.19208	-0.45685	-0.51212	-0.53165	-0.53464	-0.53517

机自动绘制的 M_x^C 影响面见图7。

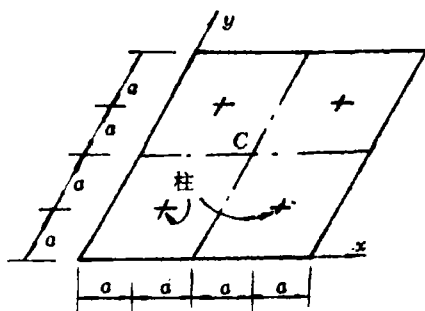


图 6

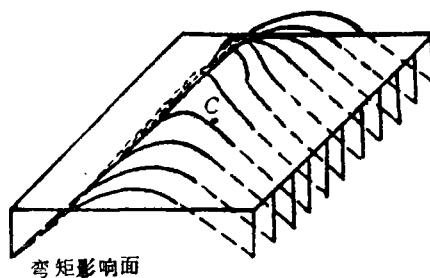


图 7

表 3

$M_x^C = \alpha P, EA a^2 / DH = 2$

x/a	y/a	0.0	1.0	1.5	2.0
0.0	α	-0.1222	-0.1326	-0.1403	-0.1438
		-0.1220	-0.1321	-0.1399	-0.1432
0.5	α	-0.06186	-0.06842	-0.07506	-0.08271
		-0.06098	-0.06770	-0.07412	-0.08136
1.0	α	-0.006411	-0.002709	-0.005683	-0.01896
		-0.006261	-0.002569	-0.005522	-0.01756
1.5	α	0.03320	0.05689	0.07415	0.06186
		0.03451	0.05831	0.07578	0.06333
2.0	α	0.04822	0.08540	0.1430	-
		0.04907	0.08684	0.1449	-

六、结 束 语

1. 对于在极限情况下 (级数取无穷项) 可得到精确解的宏单元, 用带补充项的富氏级

数作形函数以加速收敛, 用B-I模型以降低方程的阶数, 在提高计算精度, 节省内存与机时等方面均有良好的效果, 远优于一般有限元模型。

2. 利用本文引入的广义分布荷载及宏单元B-I模型建立各种板系结构的影响面, 概念清晰, 便于实施。

3. 对于简支或弹性支承连续板、柱支承无梁板, 不论受移动还是非移动荷载的作用, 本文提供的方法均方便、适用。

附 录

$$[G_n(x, y)] =$$

$$\begin{bmatrix} \text{sh}\beta_n\eta\text{sinn}\pi\xi & \text{ch}\beta_n\eta\text{sinn}\pi\xi & \beta_n\eta\text{sh}\beta_n\eta\text{sinn}\pi\xi & \beta_n\eta\text{ch}\beta_n\eta\text{sinn}\pi\xi \\ \text{sh}\alpha_n\xi\text{sinn}\pi\eta & \text{ch}\alpha_n\xi\text{sinn}\pi\eta & \alpha_n\xi\text{sh}\alpha_n\xi\text{sinn}\pi\eta & \alpha_n\xi\text{ch}\alpha_n\xi\text{sinn}\pi\eta \end{bmatrix}$$

$$[C(x, y)] = [(1-\xi)(1-\eta) \quad (1-\xi)\eta \quad \xi(1-\eta) \quad \xi\eta]$$

$$[A(x, y)] = \begin{bmatrix} f(1-\xi, 1-\eta, a/b) & f(1-\eta, 1-\xi, b/a) & f(1-\xi, \eta, a/b) \\ f(\eta, 1-\xi, b/a) & f(\xi, 1-\eta, a/b) & f(1-\eta, \xi, b/a) \\ f(\xi, \eta, a/b) & f(\eta, \xi, b/a) & \end{bmatrix}$$

$$f(u, v, a/b) = \frac{ab}{8D(1-\nu^2)} \left[\frac{a}{b}v(-u^3+u) - \nu \frac{b}{a}u(-v^3+v) \right]$$

$$[T_n] = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\beta_n}{\text{sh}^2\beta_n} + \text{cth}\beta_n\right) & 0 & \frac{1}{\text{sh}\beta_n} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\beta_n\text{ch}\beta_n}{\text{sh}^2\beta_n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \text{cth}\beta_n & 0 & -\frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\text{sh}\beta_n} \\ -\left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\alpha_n}{\text{sh}^2\alpha_n} + \text{cth}\alpha_n\right) & 0 & \frac{1}{\text{sh}\alpha_n} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\alpha_n\text{ch}\alpha_n}{\text{sh}^2\alpha_n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \text{cth}\alpha_n & 0 & -\frac{1-\nu}{2} \frac{1}{\text{sh}\alpha_n} \end{bmatrix}$$

$$[S_n] = \frac{1}{2D} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b^2}{\beta_n\text{sh}^2\beta_n} & 0 & \frac{b^2\text{cth}\beta_n}{\beta_n\text{sh}\beta_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b^2}{\beta_n^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2\text{cth}\beta_n}{\beta_n^2} & 0 & -\frac{b^2}{\beta_n^2\text{sh}\beta_n} \\ -\frac{a^2}{\alpha_n\text{sh}^2\alpha_n} & 0 & \frac{a^2\text{cth}\alpha_n}{\alpha_n\text{sh}\alpha_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a^2}{\alpha_n^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^2\text{cth}\alpha_n}{\alpha_n^2} & 0 & -\frac{a^2}{\alpha_n^2\text{sh}\alpha_n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{mn}^i = \frac{4}{Dab\pi^4} \frac{\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \sin \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{n\pi y_i}{b}$$

$$\{E_{mn}^i\} = \frac{4}{Dab\pi^3} \frac{\sin m\pi\xi \sin n\pi\eta}{(m^2/a^2 + n^2/b^2)^2} \left[\frac{m}{a} \cos \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{n\pi y_i}{b} \quad \frac{n}{b} \sin \frac{m\pi x_i}{a} \cos \frac{n\pi y_i}{b} \right]^T$$

以上诸式中: $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $\alpha_n = n\pi a/b$, $\beta_n = n\pi b/a$

参 考 文 献

- [1] Golley, B. W., A rectangular variable degree of freedom plate bending panel element, *Proceedings of the Third International Conference in Australia on Finite Element Methods*, July (1979).
- [2] Yan Zong-da, A mixed method of finite panel and its applications, *Proceedings of the International Conference on Finite Element Methods*, Science-Press, Beijing, China (1982).
- [3] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York (1959).
- [4] 何长华, 有限板块法在矩形连续板内内影响面问题中的应用, 天津大学硕士学位论文 (1987).
- [5] 严宗达, 《结构力学中的富里叶级数解法》, 天津大学出版社 (1989).
- [6] 张福范, 均布荷载作用下悬臂矩形板的弯曲, *应用数学和力学*, 1(3) (1980), 349—362.

Model B-I for Macro Rectangular Element and Problems of Influence Surface for Plate Structures

Wang Jin-zhong

(Tianjin University, Tianjin)

He Chang-hua

(Electric Power Construction Institute, Beijing)

Abstract

Model B-I for macro rectangular element is presented for the first time in this paper. To establish the influence surface for resultant R of bending plates, a number of generalized distributive loads q are defined. It is shown by numerical examples that Model B-I and the formula for the generalized distributive loads advanced in this paper are featured by high accuracy, low memory space and flexibility in practical application, and that they are especially effective for plate structures subject to moving loads, such as the two-dimensional continuous plates of highway bridges and the flat slabs in piled jetty engineering.

Key words Model B-I for macro rectangular element, moving load, influence surface, generalized distributive load