应用数学和力学，第13卷第12期（1992年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

狭长矩形梁弯曲问题的多项式应力函数解法*

袁镒吾

（长沙 中南工业大学，1990年6月6日收到）

摘　要

本文给出了求双调和方程和脱里谷米方程的部分特解的一些公式；并得到了分布载荷的集度按纵向坐标的四次幂规律变化时，狭长矩形梁弯曲问题的有限项数形式的多项式精确解。

关键词　双调和方程　矩形梁　多项式解

一、前　言

应用应力函数解弹性力学的平面问题时，应力函数只需满足双调和方程和边界条件即可。但双调和方程的通解很难写成有限项数的形式，因此，具体求解问题时，常用逆解法，或半逆解法。

当外载和边界条件给定时，应力函数的形式往往很难确定。

文献[1]给出了分布载荷的集度按抛物线规律变化时平面问题的多项式解答，但未发表详细求解过程。当分布载荷的集度按照四次幂的规律变化时，作者尚未见到有多项式解答。如果用级数法求解，则因级数收敛不快，计算量很大。

本文首先给出双调和方程的一些特解，列出双调和方程的一些特解的表格，然后根据具体问题，选择适当的应力函数，得到了分布载荷的集度按照纵向坐标的四次幂规律变化时，狭长矩形梁弯曲问题的多项式解答。

二、几种数学物理方程求特解的公式

1. 双调和方程

定理2.1　双调和方程

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0 \tag{2.1}$$

的一些准确的多项式特解可由下列两组公式决定：

* 潘立宙推荐。

$$(1)\quad \varphi_N=\sum_{j=2}^{b} a_j x^{2j-1} y^{N-2j} \qquad (N>3) \tag{2.2}$$

式中

$$b=\frac{2N+(-1)^N-1}{4}=\begin{cases} N/2, & N\text{为偶数} \\ (N-1)/2, & N\text{为奇数} \end{cases} \tag{2.3}$$

系数a_j则由式(2.4)～(2.6)决定：

$$a_{j+2}=\frac{-1}{2j(2j+1)(2j+2)(2j+3)}[2a_{j+1}\cdot 2j(2j+1)(N-2j-2)(N-2j-3)$$
$$+a_j(N-2j)(N-2j-1)(N-2j-2)(N-2j-3)] \quad (j=3,4,\cdots,b-2) \tag{2.4}$$

$$a_3=-(N-4)(N-5)a_2/10 \tag{2.5}$$

$$a_4=(N-4)(N-5)(N-6)(N-7)a_2/280 \tag{2.6}$$

令$a_2=1$，求得部分解列于表1.

$$(2)\quad \varphi_N=\sum_{j=2}^{b} a_j x^{2j-2} y^{N-2j} \tag{2.7}$$

式中

$$b=\frac{2N+(-1)^N-1}{4}=\begin{cases} N/2, & N\text{为偶数} \\ (N-1)/2, & N\text{为奇数} \end{cases} (N>3) \tag{2.8}$$

系数a_j由式(2.9)～(2.11)决定：

$$a_{j+2}=\frac{-1}{(2j-1)2j(2j+1)(2j+2)}[2a_{j+1}(2j-1)2j(N-2j-2)(N-2j-3)$$
$$+a_j(N-2j)(N-2j-1)(N-2j-2)(N-2j-3)]$$
$$(j=3,4,\cdots,b-2) \tag{2.9}$$

$$a_3=-(N-4)(N-5)a_2/6 \tag{2.10}$$

$$a_4=(N-4)(N-5)(N-6)(N-7)a_2/120 \tag{2.11}$$

令$a_2=1$，求得部分解列于表2。

公式(2.2)～(2.6)的证明见附录1.

表 1

φ_6	$x^3y^2-x^5/5$
φ_7	$x^3y^3-(3/5)x^5y$
φ_8	$x^3y^4-(6/5)x^5y^2+(3/35)x^7$
φ_9	$x^3y^5-2x^5y^3+(3/7)x^7y$
φ_{10}	$x^3y^6-3x^5y^4+(9/7)x^7y^2-x^9/21$
φ_{11}	$x^3y^7-(21/5)x^5y^5+3x^7y^3-x^9y/3$
φ_{12}	$x^3y^8-(28/5)x^5y^6+6x^7y^4-(4/3)x^9y^2+x^{11}/33$
φ_{13}	$x^3y^9-(36/5)x^5y^7+(54/5)x^7y^5-4x^9y^3+(3/11)x^{11}y$
φ_{14}	$x^3y^{10}-9x^5y^8+18x^7y^6-10x^9y^4+(15/11)x^{11}y^2-(3/143)x^{13}$

2. 脱里谷米方程

定理2.2 脱里谷米方程

表 2

φ_6	$x^2y^2-x^4/3$
φ_7	$x^2y^3-x^4y$
φ_8	$x^2y^4-2x^4y^2+x^6/5$
φ_9	$x^2y^5-(10/3)x^4y^3+x^6y$
φ_{10}	$x^2y^6-5x^4y^4+3x^6y^2-x^8/7$
φ_{11}	$x^2y^7-7x^4y^5+7x^6y^3-x^8y$
φ_{12}	$x^2y^8-(28/3)x^4y^6+14x^6y^4-4x^8y^2+x^{10}/9$
φ_{13}	$x^2y^9-12x^4y^7+(126/5)x^6y^5-12x^8y^3+x^{10}y$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{2.12}$$

的一些准确的多项式特解可由下列两组公式决定：

（1） $$\varphi=\sum_{j=1}^{b}a_jx^{3j-2}y^{N-2j} \tag{2.13}$$

式中

$$b=\frac{2N+(-1)^N-1}{4}=\begin{cases}N/2, & N\text{为偶数}\\(N-1)/2, & N\text{为奇数}\end{cases} \tag{2.14}$$

$$a_j=a_1\prod_{i=1}^{j-1}\left[\frac{(N-2i)(N-2i-1)}{3i(3i+1)}\right]\qquad(j=2,3,\cdots,b) \tag{2.15}$$

（2） $$\varphi=\sum_{j=1}^{b}a_jx^{3j-3}y^{N-2j} \tag{2.16}$$

式中

$$b=\frac{2N+(-1)^N-1}{4}=\begin{cases}N/2, & N\text{为偶数}\\(N-1)/2 & N\text{为奇数}\end{cases} \tag{2.17}$$

$$a_j=a_1\prod_{i=1}^{j-1}\left[\frac{(N-2i)(N-2i-1)}{3i(3i-1)}\right] \tag{2.18}$$

Π表示连乘积．式(2.13)～(2.15)的证明见附录2．

例如，取$N=4$，则由式(2.14)得$b=2$，由式(2.15)得 $a_2=a_1/6$．于是，由式 (2.13) 得 $\varphi_4=a_1xy^2+a_1x^4/6$．不难验证，所得$\varphi_4$是满足式(2.12)的．

三、狭长矩形梁问题的多项式形式应力函数解法

简支狭长矩形梁受集度按照纵向坐标的幂次规律（$q=ax^n$）变化的分布载荷作用而弯曲，求其应力状态．

文献[1]得到了 $n=2$时的多项式解答，但未说明应力函数的形式是怎样选定的．本文研究$n=4$的情形．以下用实例说明本方法的大要．

例1 如图1所示狭长矩形简支梁，高度为$2C$，长度为$2l$，受集度为$q=ax^4$的连续分布载荷作用而弯曲，不计体力，求其应力状态。

解 本问题归结为求解双调和方程(2.1)。边界条件为

$$(\tau_{xy})_{y=\pm C}=0 \tag{3.1}$$

$$(\sigma_y)_{y=C}=0 \tag{3.2}$$

$$(\sigma_y)_{y=-C}=-ax^4 \tag{3.3}$$

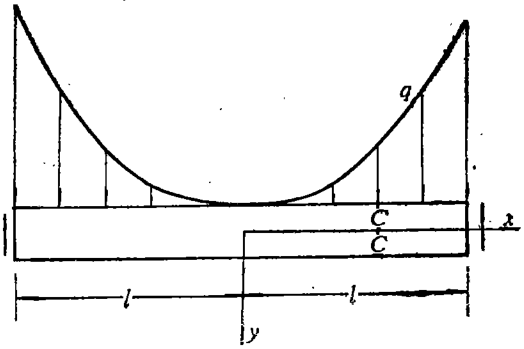

图 1

当$x=\pm l$时，

$$\int_{-C}^{C}\tau_{xy}dy=\mp\int_{0}^{l}ax^4dx \tag{3.4}$$

$$\int_{-C}^{C}\sigma_x dy=0 \tag{3.5}$$

$$\int_{-C}^{C}\sigma_x y dy=0 \tag{3.6}$$

首先，让我们估计本例的应力函数应该是几次多项式？按照材料力学的粗浅方法，我们有

$$\sigma_x=M_z y/J_z \tag{3.7}$$

式中M表示弯矩，J_z表示横截面的惯性矩，显然，本例的弯矩为

$$M_z(x)=-ax^6/30+al^6/30 \tag{3.8}$$

而$\sigma_x=\partial^2\varphi/\partial y^2$，故由式(3.7)、(3.8)知，应力函数$\varphi$应当是9次多项式。

由于式(3.1)～(3.3)诸式中的x均可以是任意的，因此，每一个方程，均实际上可能变为好几个方程。为了使边界条件的实际方程的数目尽可能的少，我们选择应力函数时应该十分审慎。

由式(3.3)知，σ_y中的x的最高幂次最好是4次。以后会说明理由，φ中的所有x的幂次最好均是偶数。

根据以上的分析，我们试探将表1中的φ_{10}中的x，y互换，即令

$$\varphi_{10}=x^6y^3-3x^4y^5+\frac{9}{7}x^2y^7-\frac{1}{21}y^9 \tag{3.9}$$

并假定应力函数φ由φ_{10}，φ_9，φ_8，…组合而成。我们称后者为子应力函数。φ_{10}，即式(3.9)选定后，继续选择其余的子应力函数时，我们遵循以下一些规定：

1． τ_{xy}中的x的幂次应只有5,3及1三种；σ_y中的x的幂次应只有4,2及0三种。

2． σ_x中的x的幂次均为偶数，这可使式(3.5)及(3.6)的方程的数目减少一半，即由4个减为2个。

3． τ_{xy}中的x的幂次均为奇数，这可使式(3.4)实际上是1个（而非2个）方程。

显然，如果选择φ中的x的幂次均为偶数，必能符合上述对x的幂次的要求。

4． 为了使τ_{xy}中的x^5前的系数为0；σ_y中的x^4前的系数为0或a（根据$y=C$或$y=-C$而定），我们需要含x^6的子应力函数4个。

5． 为了使τ_{xy}中的x^3前的系数及σ_y中的x^2前的系数均等于0，我们需要含x^4的子应力函数4个。

6. 为了使τ_{xy}中的x的系数及σ_y中x^0的系数为0，我们需要含x^2的子应力函数4个。

7. 为了满足式(3.4)～(3.6)，我们还需要其它两个子应力函数（以后会提到，式(3.4)不是独立方程）。

以下，我们按照上述7条规定去选择其余的子应力函数。

1. 表2中的φ_9

$$\varphi_9=x^2y^5-\frac{10}{3}x^4y^3+x^6y$$

2. 将表1中的φ_8的x,y互换，即令

$$\varphi_8'=x^4y^3-\frac{6}{5}x^2y^5+\frac{3}{35}y^7$$

3. 将表2中的φ_8中的x,y互换，即令

$$\varphi_8=x^4y^2-2x^2y^4+y^6/5$$

4. 新构造一个φ_8''

$$\varphi_8''=x^6-(15/2)x^4y^2+y^6/2$$

5. 表2中的φ_7

$$\varphi_7=x^2y^3-x^4y$$

6. 将表1中的φ_6中的x,y互换，即令

$$\varphi_7'=x^2y^3-y^5/5$$

7. 表2中的φ_6

$$\varphi_6=x^2y^2-x^4/3$$

8. 式(2.1)的明显解

$$\varphi_6'=x^4-y^4$$

9. 自然满足式(2.1)的一些解

$$x^2y,y^3,x^2,y^2$$

于是，我们设本例的应力函数为

$$\begin{aligned}\varphi=&A\left(x^6y^3-3x^4y^5+\frac{9}{7}x^2y^7-\frac{1}{21}y^9\right)+B\left(x^2y^5\right.\\&\left.-\frac{10}{3}x^4y^3+x^6y\right)+D\left(x^4y^3-\frac{6}{5}x^2y^5+\frac{3}{35}y^7\right)\\&+E\left(x^4y^2-2x^2y^4+\frac{1}{5}y^6\right)+F\left(x^6-\frac{15}{2}x^4y^2+\frac{1}{2}y^6\right)\\&+G(x^2y^3-x^4y)+H\left(x^2y^3-\frac{1}{5}y^5\right)+J\left(x^2y^2-\frac{1}{3}x^4\right)\\&+K(x^4-y^4)+Lx^2y+My^3+N_1x^2+Py^2\end{aligned}\tag{3.10}$$

试探性的选定了应力函数φ式(3.10)后，还需要对它进行复查：

1. 子应力函数的个数是否太多？本例的边界条件的方程只有15个，子应力函数的个数不应超过它。

2. 子应力函数的个数是否太少？为此，我们做如下的审查：

（1） 由于φ_{10}，φ_9中与x^6相乘的y的幂次均为奇数，而φ_8''中与x^6相乘的y的幂次为0，故

为了保证τ_{xy}中的x^5前的系数为0，只需1个（而非2个）方程。通过A，B，F的选取，可保证第4条规定得到满足。

（2） 通过任意常数E，G，D，K的选取，可保证第5条规定被满足。

（3） 通过任意常数H，J，L，N_1的选取，可使第6条规定得到满足。

（4） 剩下2个任意常数M及P使第7条规定得到满足。

于是，边界条件的独立方程的数目和待定常数的数目均是13个。

以下，我们来决定这些任意常数。

由式(3.10)得

$$\begin{aligned}\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=&-\frac{24}{7}Ay^7+y^5\left(54Ax^2+\frac{18}{5}D\right)+y^4(15F+6E)\\&+y^3(-60Ax^4+20Bx^2-24Dx^2-4H)\\&+y^2(-12K-24Ex^2)+y(6Ax^6-20Bx^4\\&+6Dx^4+6Gx^2+6Hx^2+6M)+(2Jx^2+2P-15Fx^4+2Ex^4)\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y=\partial^2\varphi/\partial x^2=&x^4(30Ay^3+30By+30F)\\&+2x^2(-18Ay^5-20By^3+6Dy^3-45Fy^2-6Gy-2J\\&+6K+6Ey^2)+2\left(\frac{9}{7}Ay^7+By^5-\frac{6}{5}Dy^5+Gy^3\right.\\&\left.+Hy^3+Jy^2+Ly+N_1-2Ey^4\right)\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}=-\partial^2\varphi/\partial x\partial y=&-[6x^5(3Ay^2+B)\\&+4x^3(-15Ay^4-10By^2+3Dy^2-15Fy-G+2Ey)\\&+2x(9Ay^6+5By^4-6Dy^4+3Gy^2+3Hy^2+2Jy+L-8Ey^3)]\end{aligned}\tag{3.13}$$

由式(3.1)及(3.13)得

$$3AC^2+B=0\tag{3.14}$$

$$\left\{\begin{aligned}&-15AC^4-10BC^2+3DC^2-15FC-G+2EC=0 &(3.15)\\&-15AC^4-10BC^2+3DC^2+15FC-G-2EC=0 &(3.16)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}&9AC^6+5BC^4-6DC^4+3GC^2+3HC^2+2JC+L-8EC^3=0 &(3.17)\\&9AC^6+5BC^4-6DC^4+3GC^2+3HC^2-2JC+L+8EC^3=0 &(3.18)\end{aligned}\right.$$

由式(3.2)，(3.3)及(3.12)得

$$\left\{\begin{aligned}&AC^3+BC+F=0 &(3.19)\\&-AC^3-BC+F=-a/30 &(3.20)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}&-18AC^5-20BC^3+6DC^3-45FC^2-6GC-2J+6K+6EC^2=0 &(3.21)\\&18AC^5+20BC^3-6DC^3-45FC^2+6GC-2J+6K+6EC^2=0 &(3.22)\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{9}{7}AC^7+BC^5-\frac{6}{5}DC^5+GC^3+HC^3+JC^2+LC+N_1-2EC^4=0 &(3.23)\\&-\frac{9}{7}AC^7-BC^5+\frac{6}{5}DC^5-GC^3-HC^3+JC^2-LC+N_1-2EC^4=0 &(3.24)\end{aligned}\right.$$

由式(3.13)及(3.4)得

$$A\left(\frac{36}{7}lC^7-24C^5l^3+12C^3l^5\right)+B\left(4C^5l-\frac{80}{3}C^3l^3\right.$$

$$+12Cl^5)+D(-\frac{24}{5}C^5l+8C^3l^3)+G(4C^3l-8Cl^3)$$

$$+4C^3lH+4ClL=al^6/5 \tag{3.25}$$

利用消去法，联立求解式(3.14)～(3.24)，经过很简单的代数运算，求得式(3.10)中除M及P以外的所有11个任意常数，它们是

$$\left.\begin{aligned}&A=-\frac{a}{120C^3}，\ B=\frac{a}{40C}，\ D=\frac{a}{30C}\\&E=-\frac{a}{8}，\ F=-\frac{a}{60}，\ G=-\frac{aC}{40}\\&H=\frac{61}{700}aC，\ J=-\frac{1}{2}aC^2，\ K=-\frac{aC^2}{6}\\&L=-\frac{51}{1400}aC^3，\ N_1=\frac{aC^4}{4}\end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

将式(3.26)中的A,B,D,G,H及L代入式(3.25)发现它们自动满足式(3.25)。这是因为式(3.4)[因而式(3.25)]实质上是平衡方程，而我们所选的应力函数φ及由此得出的σ_x，σ_y及τ_{xy}当然已经满足了平衡方程，即不再需要式(3.4)对σ_x，σ_y，τ_{xy}及φ进行约束。所以式(3.4)[因而式(3.25)]不是独立方程，仅供校核之用。

将式(3.26)及(3.11)代入式(3.5)及(3.6)最后求得

$$\left.\begin{aligned}&P=-\frac{7}{30}aC^4\\&M=\frac{a}{C^3}\cdot\frac{1}{30}\left(\frac{389}{525}C^6-\frac{1}{2}C^2l^4+\frac{1}{4}l^6\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

式(3.26)，(3.27)，(3.11)，(3.12)及(3.13)便构成了本例题的有限项数形式的多项式精确解。据作者所知，这个解答是作者首先得到的。

附录1 式(2.2)～(2.6)的证明

由式(2.2)得

$$\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial x^2}=\sum_{j=2}^{b}a_j(2j-1)(2j-2)x^{2j-3}y^{N-2j}$$

$$=\sum_{j=1}^{b-1}a_{j+1}(2j+1)2jx^{2j-1}y^{N-2j-2}$$

$$=\sum_{j=2}^{b-1}a_{j+1}(2j+1)2jx^{2j-1}y^{N-2j-2}+6a_2xy^{N-4}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial y^2}=\sum_{j=2}^{b-1}a_j(N-2j)(N-2j-1)x^{2j-1}y^{N-2j-2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial y^2}\right)=\sum_{j=2}^{b-2}[a_{j+2}(2j+3)(2j+2)$$

$$+a_{j+1}(N-2j-2)(N-2j-3)](2j+1)2jx^{2j-1}y^{N-2j-4}$$

$$+[20a_3+(N-4)(N-5)a_2]\cdot 6xy^{N-6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial y^2}\right)=\sum_{j=2}^{b-2}[a_{j+1}(2j+1)2j+a_j(N-2j)$$
$$\cdot(N-2j-1)](N-2j-2)(N-2j-3)x^{2j-1}y^{N-2j-4}$$
$$+6a_2(N-4)(N-5)xy^{N-6}$$

由

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial y^2}\right)=0$$

可得

$$\sum_{j=2}^{b-2}\{[a_{j+2}(2j+3)(2j+2)+a_{j+1}(N-2j-2)(N-2j-3)]$$
$$\cdot 2j(2j+1)+[a_{j+1}(2j+1)2j+a_j(N-2j)(N-2j-1)]$$
$$\cdot(N-2j-2)(N-2j-3)\}=0 \tag{A.1.1}$$

及

$$10a_3+(N-4)(N-5)a_2=0 \tag{A.1.2}$$

由式(A.1.1)可得式(2.4)；由式(A.1.2)可得式(2.5)．在式(2.4)中令$j=2$，并联合式(2.5)即得式(2.6)．证毕．

附录2　式(2.13)～(2.15)的证明

由式(2.13)得

$$\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial x^2}=\sum_{j=1}^{b}a_j(3j-2)(3j-3)x^{3j-4}y^{N-2j}$$
$$=\sum_{j=0}^{b-1}a_{j+1}(3j+1)\cdot 3jx^{3j-1}y^{N-2j-2}$$
$$=\sum_{j=1}^{b-1}a_{j+1}(3j+1)\cdot 3jx^{3j-1}y^{N-2j-2} \tag{A.2.1}$$

$$x\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial y^2}=\sum_{j=1}^{b}a_j(N-2j)(N-2j-1)x^{3j-1}y^{N-2j-2}$$
$$=\sum_{j=1}^{b-1}a_j(N-2j)(N-2j-1)x^{3j-1}y^{N-2j-2}+a_b(N-2b)$$
$$\cdot(N-2b-1)x^{3b-1}y^{N-2b-2}$$

但由式(2.14)，我们有

$$(N-2b)(N-2b-1)=0$$

故得

$$x\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial y^2}=\sum_{j=1}^{b-1}a_j(N-2j)(N-2j-1)x^{3j-1}y^{N-2j-2} \tag{A.2.2}$$

由式(A.2.1)及(A.2.2)得

$$\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial y^2}=\sum_{j=1}^{b-1}[a_{j+1}(3j+1)\cdot 3j-a_j(N-2j)(N-2j-1)]x^{3j-1}y^{N-2j-2}$$

但由式(2.15)，我们有

$$a_{j+1}=a_j\cdot\frac{(N-2j)(N-2j-1)}{3j(3j+1)}$$

代入上式即得

$$\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial x^2}-x\frac{\partial^2\varphi_N}{\partial y^2}=0$$

证毕.

参 考 文 献

[1] 袁镒吾，平面问题多项式的一个例子，力学实践，4(3)(1982)，68.

The Polynomial Stress Function Solution for the Rectangular Strip Bending

Yuan Yi-wu

(Central South University of Technology, Changsha)

Abstract

In this paper, some formulas for seeking a part of the particular solutions of the heavy harmonics and Tricomi equations are proposed and we obtain the precise polynomial solutions of the number of finite items for the rectangular strip bending problem when the intensity of the distributed load varies with the fourth power of longitudinal coordinate.

Key words biharmonic equation, rectangular strips, polynomial solutions