应用数学和力学，第13卷第11期（1992年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非均匀弹性地基圆薄板大挠度问题的一般解*

纪振义　　叶开沅

（安徽建筑工业学院）（兰州大学）

摘　　要

本文在文[1]的基础上提出了一个新的方法，可用于求解任意变系数非线性常微分方程组．文中导出了任意轴对称载荷和不同边界条件下的非均匀弹性地基圆薄板大变形的一般解，并给出了收敛于精确解的证明．问题最后可归结为求解一个仅含有三个未知量的非线性代数方程组．该方法和其它方法比较，具有收敛范围大，计算简便迅速等特点．文末给出算例表明内力和位移均可得到满意的结果，验证了本文理论的正确性．

关键词　非均匀圆板　弹性地基　大挠度

一、引　　言

非均匀大变形薄板广泛地用于航空航天，化工和仪表等工业，对这一类问题的研究有着重大的实际意义．放置在砂子，水以及其他某些弹性介质上的周边受有约束的圆薄板在力作用下发生变形问题，可以抽象化为弹性地基上受载圆板的模型．地基一般可考虑为Winkler型的．

板的大挠度微分方程由 Kārmān 导出[2]．由于Kārman 板方程是一对偶合的非线性微分方程组，因此对它的理论研究仍是很困难的．[3～5] 中用摄动法研究了板的大挠度问题，[6]用迭代法求解这一相同的问题．[7～10] 用级数法给出圆板大挠度变形的精确解．[11～12]对弹性地基圆薄板进行了计算，[13]用级数法给出集合载荷作用下弹性地基圆薄板大挠度问题的精确解．由于以上方法均属解析法，仅能求解某一类问题，因此适用范围有一定的限制．用一般的数值方法和有限元法计算这一类问题，适用范围广，但计算量大，对些某些载荷等因素突变的情况，数值计算结果并不令人满意的[14]．

文[1]和[15]利用 Hilbert 逆算子定理给出求解一般变系数微分方程的一个普遍方法．本文在此基础上，把这一方法推广到求解非线性方程组．利用这一新的方法，给出在任意轴对称载荷和不同边界条件下非均匀弹性地基圆薄板大变形的一般解．这个解也适用于不带弹性地基圆薄板大挠度问题，具有统一性．问题最后可归结为求解三个未知变量的非线性代数方程．文中给出证明，位移和内力可一致收敛于精确解，并有二阶收敛精度．

* 国家自然科学基金资助的课题．1991年5月21日收到．

本文提出的方法可推广到求解一般变系数非线性微分方程组。文末算例表明，利用本文的方法，无论内力和位移均可得到满意的结果，并收敛于精确解，验证了本文理论的正确性。

二、非均匀变厚度弹性地基圆环板非线性弯曲的一般解

一个非均匀弹性地基圆薄板，我们考虑为 Winkler 型。它的平衡方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}(rN_r)-N_\theta=0\\
&\frac{d}{dr}(rQ_r)+\frac{d}{dr}\left(rN_r\frac{dw}{dr}\right)-k(r)\,r\,w+q(r)\,r=0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

式中

$$
rQ_r=M_\theta-\frac{d}{dr}(rM_r)
$$

内力和位移的关系为

$$
\begin{aligned}
&N_r=D_t(r)\left[\frac{du}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\nu(r)\frac{u}{r}\right]\\
&N_\theta=D_t(r)\left[\frac{u}{r}+\nu(r)\frac{du}{dr}+\frac{1}{2}\nu(r)\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right]\\
&M_r=-D(r)\left[\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu(r)}{r}\frac{dw}{dr}\right],\\
&M_\theta=-D(r)\left[\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\nu(r)\frac{d^2w}{dr^2}\right]
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

(2.1)和(2.2)式中记号：

u，w 为圆板的径向位移和挠度；N_r 和 N_θ 为径向和周向膜力；M_r，M_θ 为径向和周向弯矩；Q_r为径向剪力；$\nu(r)$和$k(r)$ 为圆板的油松比和地基模量；$D(r)$ 为圆板的抗弯刚度，等于$E(r)h^3(r)/12(1-\nu^2(r))$，这里$E(r)$和$h(r)$分别是板的弹性模量和厚度；$r$，$q(r)$为圆板的径向坐标和横向分布载荷；$D_t(r)$等于$Eh/(1-\nu^2)$。

利用本文的方法，我们把弹性地基板沿径向分布为N个单元。当N取足够大时，每个单元可以看作是均匀的，设第i个单元的区间为$[r_{i-1},r_i)$，方程(2.1)可以转化为

$$
\begin{aligned}
&D_i\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{d}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\}+k(r)w\\
&\qquad-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rN_r\frac{dw}{dr}\right)=q(r)\\
&N_\theta-\frac{d}{dr}(rN_r)=0\qquad\qquad (r\in[r_{i-1},r_i))
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

如果在单元交接处满足连续条件

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}w(x_{i-1}-\varepsilon)=w(x_{i-1})
$$

$$
\lim_{N\to\infty}r\frac{dw}{dr}(r_{i-1}-\varepsilon)=r\frac{dw}{dr}(r_{i-1})
$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M_r(r_{i-1}-\varepsilon)=M_r(r_{i-1})=-D_i\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu_i}{r}\frac{dw}{dr}\right)_{r=r_{i-1}}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} rQ_r(r_{i-1}-\varepsilon)=rQ_r(r_{i-1})=-rD_i\left[r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dw}{dr}\right)\right]_{r=r_{i-1}}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(r_{i-1}-\varepsilon)=u(r_{i-1}),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} N_r(r_{i-1}-\varepsilon)=N_r(r_{i-1})=D_{ti}\left[\frac{du}{dt}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\nu_i\frac{u_r}{r}\right]_{r=r_{i-1}} \tag{2.4}$$

不难证明[1]，由(2.3)和(2.4)所得到的u，w，dw/dr，rQ_r，M_r和N_r一致收敛于方程(2.1)的精确解。式中记号$(\cdots)_i$等于$(\cdots)_{r=(r_{i-1}+r_i)/2}$，即单元中点的值。可以看出(2.3)仍然是一个非线性变系数方程，很难求解。利用本文的方法，(2.3)可以转变为一个简单的线性方程

$$\bar{r}_iD_i\frac{d^4\bar{w}}{dr^4}=\bar{r}_iq(r)$$

$$\bar{r}_i\frac{d^2\bar{u}}{dr^2}-\frac{\bar{u}}{\bar{r}_i}-\frac{\nu_i}{2}\left(\frac{d\bar{w}}{dr}\right)_i^2=0 \qquad r\in[r_{i-1},r_i) \tag{2.5}$$

式中 $\bar{r}_i=(r_{i-1}+r_i)/2$为单元中点坐标，此外单元之间的连续条件需要满足，它可以写为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{w}(r_{i-1}-\varepsilon)=\bar{w}(r_{i-1}),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\bar{r}_{i-1}\frac{d\bar{w}}{dr}\right)_{r=r_{i-1}-\varepsilon}=\left(\bar{r}_i\frac{dw}{dr}\right)_{r=r_{i-1}}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{M}_r(r_{i-1}-\varepsilon)=\widetilde{M}_r(r_{i-1})$$

$$=\left(-D_i\frac{d^2\bar{w}}{dr^2}+\left[D_i\frac{\bar{r}_i}{r^2}(1-\nu_i)-(r-\bar{r}_i)\widetilde{N}_r(r)\right]\frac{dw}{dr}\right)_{r=r_{i-1}}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{r}_{i-1}\bar{V}_r(r_{i-1}-\varepsilon)=\bar{r}_i\bar{V}_r(r_{i-1})=\left[-D_i\bar{r}_i\frac{d^3\bar{w}}{dr^3}+(r-\bar{r}_i)rk(r)w\right]_{r=r_{i-1}}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{u}(r_{i-1}-\varepsilon)=\bar{u}(r_{i-1}),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{N}_r(r_{i-1}-\varepsilon)=N_r(r_{i-1})=D_{ti}\left[\frac{d\bar{u}}{dt}+\frac{\bar{u}}{r}\nu_i+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)_i^2\right]_{r=r_{i-1}} \tag{2.6}$$

如果所求得的解满足方程(2.5和单元之间连续条件(2.6)，以及满足给定的边界条件，我们得到的近似解$\bar{u}$，$\bar{w}$，$\bar{r}_i\dfrac{d\bar{w}}{dr}$，$\widetilde{N}_r$，$\widetilde{M}_r$和$\bar{r}_i\bar{V}_r$在区间$[r_{i-1},r_i)$内分别一致收敛于精确解$u$，$w$，$r\dfrac{dw}{dr}$，$N_r$,$M_r$和$r\left(Q_r+N_r\dfrac{dw}{dr}\right)$，并有二阶收敛精度。式中$\bar{V}_r$为总的等效剪力。

利用矩阵迁移法，我们不难得到满足于方程(2.5)和(2.6)的解

$$\{\delta_1(r)\}=[F_i(r-r_{i-1})]\{\delta_1(r_{i-1})\}+\{f_i(r)\}$$
$$\{\delta_2(r)\}=[G_i(r-r_{i-1})]\{\delta_2(r_{i-1})\}+\{g_i(r)\} \quad (r\in[r_{i-1},r_i)) \tag{2.7}$$

(2.7)中向量

$$\{\delta_1(r)\}=\left\{\tilde{w}(r) \quad r_i\frac{d\tilde{w}}{dr}(r) \quad \tilde{M}_r(r) \quad \bar{r}_i\tilde{V}_r(r)\right\}^T$$

$$\{\delta_2(r)\}=\{\tilde{u}(r) \quad \tilde{N}_r(r)\}^T$$

式中矩阵$[F_i]$和$[G_i]$是方程(2.5)的齐次解，$\{f_i(r)\}$和$\{g_i(r)\}$是(2.5)的特解。当$r\to r_{i-1}$时，我们必须使

$$[F_i(0)]=[I],\ [G_i(0)]=[I]$$

$$\{f_i(r_{i-1})\}=0,\ \{g_i(r_{i-1})\}=0 \tag{2.8}$$

由(2.5)和(2.8)，我们可以得到齐次解

$$[F_i(r-r_{i-1})]=\begin{bmatrix} 1+\frac{\xi(r_{i-1})\Delta r^3}{6D_i\bar{r}_i} & \frac{1}{\bar{r}_i}\left[\Delta r+\frac{1}{2D_i}\eta(r_{i-1})\Delta r^2\right] & -\Delta r^2 & -\frac{\Delta r^3}{6D_i\bar{r}_i} \\ \frac{\xi(r_{i-1})}{2D_i}\Delta r^2 & 1+\eta(r_{i-1})\Delta r/D_i & -\frac{\bar{r}_i}{D_i}\Delta r & -\frac{\Delta r^2}{6D_i} \\ \frac{\xi(r_{i-1})}{\bar{r}_i}\left(\frac{\eta(r)}{2D_i}\Delta r^2-\Delta r\right) & \frac{1}{\bar{r}_i}\left[\eta(r)-\left(1-\frac{1}{D_i}\eta(r)\Delta r\right)\cdot\eta(r_{i-1})\right] & 1-\frac{\eta(r)}{D_i}\Delta r & \frac{1}{\bar{r}_i}[\Delta r-\eta(r)\Delta r^2/2D_i] \\ -\xi(r_{i-1})+\xi(r)\left(1+\frac{\xi(r_{i-1})}{6D_i\bar{r}_i}\Delta r^3\right) & \frac{\xi(r)}{\bar{r}_i}\left(\Delta r+\frac{\eta(r_{i-1})}{2D_i}\Delta r^2\right) & \frac{\xi(r)}{\bar{r}_i}\left[\Delta r+\frac{\eta(r_{i-1})}{2D_i}\Delta r^2\right] & 1-\frac{\xi(r)}{6D_i\bar{r}_i}\Delta r^3 \end{bmatrix}$$

$$[G_i(r-r_{i-1})]=\begin{bmatrix} \frac{1}{2rr_{i-1}}[(\nu_i+1)r_{i-1}^2-(\nu_i-1)r^2] & \frac{1}{2D_{ii}r}(r^2-r_{i-1}^2) \\ \frac{D_{ii}}{2r^2r_{i-1}}(r^2-r_{i-1}^2)(1-\nu_i^2) & \frac{1}{2r^2}(1+\nu)r^2+(1-\nu)r_{i-1}^2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

和特解

$$\{f_i(r)\}=\int_{r_{i-1}}^{r}\begin{Bmatrix} \frac{q(\rho)}{6D_i}(r-\rho)^3d\rho \\ \frac{\bar{r}_iq(\rho)}{2D_i}(r-\rho)^2d\rho \\ q(\rho)\left[-(r-\rho)+\frac{\eta(r)}{2D_i}(r-\rho)^2\right]d\rho \\ -q(\rho)\bar{r}_i\left[1-\frac{\xi(r)}{6D_i\bar{r}_i}(r-\rho)^3\right]d\rho \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

$$\{g_i(r)\}=\begin{Bmatrix}-\frac{1-\nu_i}{4}\left(\frac{d^2w}{dr^2}\right)_i^2(r\ln r)\\ \left(\frac{dw}{dr}\right)_i^2 D_{ii}\left(\frac{\ln r(\nu_i^2-1)}{4}+\frac{\nu_i+1}{4}\right)\end{Bmatrix}$$

$$-[G_i(r-r_{i-1})]\begin{Bmatrix}-\frac{1-\nu}{4}\left(\frac{d\bar{w}}{dr}\right)_i^2(r\ln r)\\ D_{ii}\left(\frac{dw}{dr}\right)_i^2\left(\frac{\ln r(\nu_i^2-1)}{4}+\frac{\nu_i+1}{4}\right)\end{Bmatrix}_{r=r_{i-1}} \tag{2.11}$$

式中记号

$$\Delta r=r-r_{i-1},\quad \eta(r)=\frac{D_i\bar{r}_i}{r^2}(1-\nu_i)-(r-\bar{r}_i)\widetilde{N}_r(r)$$

$$\xi(r)=(r-\bar{r}_i)rk(r) \tag{2.12}$$

如果有轴对称线分布集中力作用于第i个单元的r_p处，注意它与分布荷载

$$q_p(r)=p\delta(r-r_p)$$

等价，代入(2.10)即可得对应的特解

$$\{f_i(r)\}_p=p\bar{r}_i\{r-r_p\}^\circ\begin{Bmatrix}\frac{1}{6D_i\bar{r}_i}(r-r_p)^3\\ \frac{1}{2D_i}(r-r_p)^2\\ -\frac{1}{\bar{r}_i}\left[(r-r_p)-\frac{\eta(r)}{2D_i}(r-r_p)^2\right]\\ -1+\frac{\xi(r)}{6D\bar{r}_i}(r-r_p)^3\end{Bmatrix} \tag{2.13}$$

这里记号

$$\{r-r_p\}^\circ=\begin{cases}0 & (r\geqslant r_p)\\ 1 & (r<r_p)\end{cases} \tag{2.14}$$

为 Heaviside 函数。

设环板的内半径为$r_0=a$，外径$r_N=b$。我们按$\{\delta_1\}$和$\{\delta_2\}$中的元素次序编上号，例如当w，M_r和N_r在边界上为已知时，则已知条件编号为(1,3,6)，未知条件编号为(2,4,5)。若在$r=r_0$处未知条件编号为(m_1，m_2，m_3)，在$r=r_N$处已知条件编号为(n_1,n_2,n_3)利用(2.7)可以得到有三个未知量的非线性代数方程组

$$\phi_1(\delta_{m_1}(r_0),\ \delta_{m_2}(r_0),\ \delta_{m_3}(r_0))=\delta_{m_1}(r_N)$$

$$\phi_2(\delta_{m_1}(r_0),\ \delta_{m_2}(r_0),\ \delta_{m_3}(r_0))=\delta_{n_2}(r_N)$$

$$\phi_3(\delta_{m_1}(r_0),\ \delta_{m_2}(r_0),\ \delta_{m_3}(r_0))=\delta_{n_3}(r_N) \tag{2.15}$$

式中δ_{m_i}表示$\{\boldsymbol{\delta}_1\ \ \boldsymbol{\delta}_2\}^T$中第$m_i$个元素，$\boldsymbol{\delta}_1=\{\delta_1\}$和$\boldsymbol{\delta}_2=\{\delta_2\}$。可用一般的牛顿增量法求解非线性代数方程组(2.15)，得到$\delta_{m_1}(r_0)$，$\delta_{m_2}(r_0)$和$\delta_{m_3}(r_0)$。求出板的未知参数$\delta_{m_1}(r_0)$,$\delta_{m_2}(r_0)$和$\delta_{m_3}(r_0)$后，由(2.7)即可求得在$[r_0,r_N]$上任一点的$\{\delta_1(r)\}$和$\{\delta_2(r)\}$。应当指出，在已知$\{\delta_1(r_{i-1})\}$和$\{\delta_2(r_{i-1})\}$求$\{\delta_1(r_i)\}$和$\{\delta_2(r_i)\}$时，在(2.7)中的矩阵$[F_i]$和向量$\{g_i\}$中还隐含

有$\widetilde{N}_r(r_i)$和$\left(\frac{d\bar{w}}{dr}\right)_i$，为保持二阶收敛精度。我们可以采用两步计算。步骤如下：

第一步：用$\widetilde{N}_r(r_{i-1})$和$\left(\frac{d\bar{w}}{dr}\right)_{r=r_{i-1}}$代替$[F_i]$和$\{g_i\}$中的$\widetilde{N}_r(r_i)$和$\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)_i$用(2.7)式算出$\widetilde{N}_r(r_i)$和$\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)_i$。

第二步：用第一步算出的$\widetilde{N}_r(r_i)$和$\left(\frac{d\bar{w}}{dx}\right)_i$代入$[F_i]$和$\{g_i\}$，从而可求出$\{\delta_1(r_i)\}$和$\{\delta_2(r_i)\}$。以此类推可求出$\{\delta_1(r_{i+1})\}$，$\{\delta_2(r_{i+1})\}$，……，$\{\delta_1(r)\}$和$\{\delta_2(r)\}$。

利用[1]的方法，我们可以求出

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_\theta=&-D_i v(r)\left[\frac{d^2\bar{w}}{dr^2}+\left(\frac{1}{D_i}(r-\bar{r}_i)\widetilde{N}_r(r)-(1+\nu_i)\frac{\bar{r}_i}{r^2}\right)\frac{d\bar{w}}{dr}\right]\\&-D(r)\frac{\bar{r}_i}{r^2}\frac{d\bar{w}}{dr}(1-\nu^2(r))\\\widetilde{N}_\theta=&D_i(1-\nu^2(r))\frac{\bar{u}_r}{r}+D_{ti}\nu(r)\left(\frac{d\bar{u}}{dt}+\nu_i\frac{\bar{u}_r}{r}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{w}}{dr}\right)_i^2\right)\end{aligned}\tag{2.16}$$

由(2.16)式求出的$\widetilde{M}_\theta(r)$和$\widetilde{N}_\theta(r)$可一致收敛于(2.2)中的精确解$M_\theta(r)$和$N_\theta(r)$，并有二阶收敛精度。

三、实心弹性地基圆薄板非线性弯曲问题的一般解

计算实心圆板时，由于第一个单元上的起始坐标$r_{i-1}=r_0=0$，(2.8)，(2.9)和(2.11)中的$[G_1]$、$[F_1]$和$\{g_1(r)\}$将出现奇异性。注意在圆心$r=0$处，由于对称我们有

$$\bar{u}=\bar{w}=\frac{d\bar{w}}{dr}=0$$

因此我们令$[F_1(r)]$中的元素

$$F_{12}=0,\ F_{22}=1,\ F_{32}=0,\ F_{42}=0$$

$[G_1(r)]$中的元素

$$G_{11}=1,\ G_{12}=0$$

和

$$\{g_1(r)\}=0\tag{3.1}$$

将不影响计算结果。式中F_{ij}和G_{ij}分别是$[F_1(r)]$和$[G_1(r)]$的第i行第j列元素。(3.1)式利用了圆心处的$d\bar{w}/dr$值代替(2.11)中的$(d\bar{w}/dr)_i$，它仅有一阶收敛精度。因此在计算中应使第一单元的尺寸比其它单元尺寸小得多，以保证整体有二阶收敛精度。

此外，经过修改后的$[F_1(r)]$和$[G_1(r)]$，当r趋近于0时，有极限

$$\lim_{r\to0}[F_i(r)]=[F_0]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1-\frac{1}{2}(1-\nu_1)&2-\frac{1}{2}(1-\nu_1)\\0&0&0&1\end{bmatrix}.\tag{3.2}$$

$$\lim_{r\to 0}[G_1(r)]=[G_0]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{1+\nu_i}{2}\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

为使(2.8)成立，我们应当重写矩阵

$$[F_1(r)]=[F_1(r)][F_0]^{-1},\ [G_1(r)]=[G_1(r)][G_0]^{-1} \tag{3.4}$$

以下计算方法均和圆环板求方法相同.

四、收 敛 性 证 明

我们把(2.3)和(2.5)写成算子形式

$$\mathbf{A}_i\mathbf{w}=\begin{Bmatrix} rq(r)\\ 0\end{Bmatrix},\ \bar{\mathbf{A}}_i\tilde{\mathbf{w}}=\begin{Bmatrix} \bar{r}_i q(r)\\ 0\end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

这里

$$\mathbf{w}=\begin{Bmatrix} w\\ u\end{Bmatrix},\ \tilde{\mathbf{w}}=\begin{Bmatrix} \tilde{w}\\ \tilde{u}\end{Bmatrix}$$

内积

$$\lim_{N\to\infty}(\boldsymbol{\varphi}_1\mathbf{A}\mathbf{w}-\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{w}})=\lim_{N\to\infty}\left(\boldsymbol{\varphi}_1\sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i\mathbf{w}-\bar{\mathbf{A}}_i\tilde{\mathbf{w}}\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(\varphi_1\sum_{i=1}^{N}(r-\bar{r}_i)q(r)\right)=0 \tag{4.2}$$

式中

$$\boldsymbol{\varphi}=\{\varphi_1\quad \varphi_2\}^T$$

其中　$\varphi_1\in W_2^{(2)}$，$\varphi_2\in W_2^{(1)}$，$W_2^{(1)}$和$W_2^{(2)}$为索伯列夫空间. 如果有

$$\lim_{N\to\infty}\bar{r}_i\frac{d\tilde{w}}{dr}=r\frac{dw}{dr}\qquad (i=1,\cdots,N)$$

$$r\in[r_{i-1},r_i)$$

$$\lim_{N\to\infty}\widetilde{N}_r=N_r\qquad (i=1,\cdots,N) \tag{4.3}$$

利用分部积分，当$N\to\infty$时，我们有

$$\lim_{N\to\infty}(\boldsymbol{\varphi}_1 A\mathbf{w}-\bar{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{w}})=\lim_{N\to\infty}(A^*\varphi_1\mathbf{w}-\mathbf{w})+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Big\{-\varphi(rV_i-\bar{r}_i\tilde{V}_r)$$

$$+r\frac{d\varphi_1}{dr}(M_r-\widetilde{M}_r)-M_r^*\left[r\frac{dw}{dr}-\bar{r}_i\frac{d\tilde{w}}{dr}\right]+rV_r^*(w-\tilde{w})$$

$$+\varphi_2(N_r-\widetilde{N}_r)-N_r^*(u-\tilde{u})\Big\}\Big|_{r_{i-1}}^{r_i}=0 \tag{4.4}$$

这里$\mathbf{A}^*$是$\mathbf{A}$的共轭算子，M_r^*，rV_r^*和N_r^*是共轭边界条件，它们是φ_1和φ_2的函数，并假定在$[r_0,r_N]$上连续. 利用单元交接处的连续条件(2.6)和六个已知边界条件，同时令六个未知边界条件对应的共轭边界条件为零，则可得

$$\lim_{N\to\infty}(\mathbf{A}^*\boldsymbol{\varphi},\ \mathbf{w}-\bar{\mathbf{w}})=0 \tag{4.5}$$

根据 Hilbert-伴随算子逆定理，当$\mathbf{A}$在给定的边界条件下有逆算子A^{-1}存在时，A^*在零共扼边界条件下也有逆，特别，当

$$\mathbf{A}^*\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{w}-\bar{\mathbf{w}}$$

时有唯一解$\varphi_1\in W_2^{(2)}$，$\varphi_2\in W_2^{(2)}$使M_r^*，rQ_r^*，和N_r^*在区间$[r_0,r_N]$连续，并有零共扼边界条件．因此我们有

$$\lim_{N\to\infty}\int_{r_0}^{r_N}(\mathbf{w}-\bar{\mathbf{w}})^2dr=0 \tag{4.6}$$

利用(4.6)，单元之间的连续条件以及边界条件，我们在$[r_0,r_i]$区间上作内积得

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^{r}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A}\mathbf{w}-\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{w}})dr=&-(-\varphi_1(rV_r-\bar{r}_i\bar{V}_r)+r\frac{d\varphi_1}{dr}(M_r-\bar{M}_r)\\&-M_r^*\left[r\frac{dw}{dr}-\bar{r}_i\frac{d\bar{w}}{dr}\right]+rV_r^*(w-\bar{w})+\varphi_2(N_r-\bar{N}_r)\\&-N_r^*(u-\bar{u}))_{r=r_i}+O(\Delta r^2)\end{aligned} \tag{4.7}$$

由于φ_1，$d\varphi_1/dr$，φ_2，M_r^*，rV_r^*，N_r^*的任意性，从(4.7)我们可以得到

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\bar{w}=w,\quad \lim_{N\to\infty}\bar{r}_i\frac{d\bar{w}}{dr}=r\frac{dw}{dr}\\&\qquad\qquad\qquad\qquad(i=1,2,\cdots,N)\\&\lim_{N\to\infty}\bar{M}_r=M_r,\quad \lim_{N\to\infty}(\bar{r}_i\bar{V}_r)=rV_r\qquad(r\in[r_0,r))\\&\lim_{N\to\infty}\bar{u}=u,\quad \lim_{N\to\infty}\bar{N}_r=N_r\end{aligned} \tag{4.8}$$

并有二阶收敛精度，因$w-\bar{w}$，$\bar{r}_i\dfrac{d\bar{w}}{dr}-r\dfrac{dw}{dr}$，$M_r-\bar{M}_r$，$rV_r-\bar{r}_i\bar{V}_r$在$[r_0,r_N]$上连续，因此有界．通过(4.6)式可以证明$\bar{w}$，$\bar{r}_i\dfrac{d\bar{w}}{dr}$，$\bar{M}_r$，$\bar{r}_i\bar{V}_r$，$\bar{u}$和$\bar{N}_r$一致收敛于精确解．由(4.8)式可以得到，假定条件(4.3)是满足的．因此利用本文的方法所得到的解可一致收敛于精确解，并具有二阶收敛精度．

用类似的方法，可以证明(2.3)的解一致收敛于(2.1)的精确．解因此方程(2.5)所得到的解一致收敛于方程(2.1)的精确解，并有相同的收敛精度．

五、算　例

算例 1　一个均匀实心圆板，半径为a，厚度为h，弹性模量为E，泊松比$\nu=0.3$，受均匀载荷q作用，周边固支，它的边界条件可以写为

$$w=u=rV_r=0\qquad(r=0)$$

$$w=r\frac{dw}{dr}=u=0\qquad(r=a)$$

表1给出当$N=4$时，随载荷q增大计算的内力和位移，并和解析解作了比较．表1中的解析解是用级数法算出．表2给出随N增大时，$\dfrac{a^2q}{Eh^4}=9.27$时位移和内力收敛情况．应当指出，第

一单元区间为[0,0.001a]，其余单元均为均匀划分。

表 1 周边固支圆板非线性变形的位移和内力

$\frac{a^4q}{Eh^4}$		$\frac{w}{h}$ $(r=0)$	$\frac{6a^2M_r}{Eh^4}$ $(r=0)$	$\frac{a^2N_r}{Eh^3}$ $(r=a)$	$\frac{6a^2}{Eh^4}M_r(r=a)$
2.32	本文解	0.370	1.032	0.0651	1.673
	精确解	0.371	1.028	0.0566	1.660
4.63	本文解	0.645	1.725	0.2020	3.119
	精确解	0.646	1.720	0.1849	3.120
6.95	本文解	0.850	2.18	0.357	4.38
	精确解	0.849	2.17	0.341	4.36
9.27	本文解	1.011	2.49	0.512	5.51
	精确解	0.988	2.42	0.516	5.38

表 2 随N增大时，圆板的位移和内力收敛情况

$(a^2q/Eh^4=9.27)$

N	11	21	41	101	解析解
$\frac{w}{h}$ $(r=0)$	1.047	1.025	1.011	1.010	0.988
$\frac{6a^2M_r}{Eh^3}$ $(r=0)$	2.56	2.52	2.492	2.494	2.42
$\frac{aN_r}{Eh^3}$ $(r=a)$	0.501	0.498	0.512	0.507	0.156
$\frac{6M_ra^2}{Eh^4}$ $(r=a)$	5.625	5.547	5.514	5.512	5.38

算例 2 考虑一个弹性地基变厚度实心圆板。板的厚度和无量纲化的弹性地基常数分别为

$$h=h_0\exp[-\beta(r/a)^2/6],\quad K(r)=\frac{3a(1-\nu)}{4Eh_0^2}k(r)$$

式中h_0是板中心的厚度，a为半径。本文取$\beta=4$，其它参数和边界条件均与算例1相同。表3给出随荷载增大时板中心的挠度值，并和$k(r)=0$时的挠度作了比较。取21个单元进行计算。

表 3 弹性地基圆薄板随q增大时的中心挠度w_0/h_0 $(N=21)$

$\frac{a^4q}{Eh_0^4}$		0.01	2.32	4.63	6.95	9.27
$\frac{w_0}{h_0}$	$K(r)=5$	0.001105	0.251	0.478	0.673	0.841
	$K(r)=0$	0.004405 (0.00442)	0.684	0.992	1.197	1.356

表中圆括号中数值为精确解[16]。由表 3 看出，当载荷很小时，本文结果可收敛于精确解。与算例 1 相比，由于板边变薄，中心挠度值增大。表4给出随 N 增大时，中心挠度的收敛情况。

表 4　随N增大时，变厚度圆板挠度收敛情况　($a^4q/Eh^4=0.927$)

N		21	41	101
$\frac{w_0}{h_0}$	$K(r)=0.5$	0.8406	0.8339	0.8320
	$K(r)=0$	1.356	1.341	1.337

算例 3　考虑一个弹性地基圆板，它的边界为固支，在板中心受集中力P作用。板的半径$a=10$，厚度$h=1$，弹性模量$E=1000$，泊松比$\nu=0.3$，无量纲化弹性地基常数

$$K(r)=\frac{3a(1-\nu)}{4Eh^3}k(r)=5$$

我们有关系

$$\lim_{r\to 0} rV_r=P/2\pi$$

表5给出随载荷增大时，中心挠度和内力的计算结果。并和[17]中的级数解作了比较。这里取21个单元进行计算。

表 5　受集中力作用固支圆板中心挠度和内力值　($N=21$)

$P/2\pi$		2.217	4.434	6.651	8.868	11.08	13.30	17.74
$\frac{w}{h}(r=0)$	本文解	0.1809	0.3541	0.5153	0.6624	0.7965	0.9192	1.135
	[17]解	0.1890	0.3686	0.5347	0.6808	0.8140	0.9344	1.145
$N_r(r=0)$	本文解	0.5659	2.174	4.600	7.643	11.086	14.80	22.74
	[17]解	0.5267	1.984	4.202	6.886	9.886	13.09	19.83
$M_r(r=a)$	本文解	0.4191	0.8319	1.237	1.629	2.010	2.378	3.092
	[17]解	0.5549	0.9973	1.470	1.922	2.350	2.765	3.562
$N_r(r=a)$	本文解	0.0969	0.3722	0.7750	1.289	1.855	2.456	3.732
	[17]解	0.1156	0.4379	0.9122	1.484	2.112	2.772	4.135

算例 4　一个薄圆板，中心挠度为零，周边固支，泊松比$\nu=0.3$，受均布载荷作用边界条件可写为

$$w=u=r\frac{dw}{dr}=0\qquad (r=0)$$

$$w=r\frac{dw}{dr}=u=0\qquad (r=a)$$

式中a为圆板半径，我们取

$$Q=\frac{3}{4}(1-\nu^2)\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{a^2q}{Eh^4}=20$$

计算的挠度沿r分布列于表6，并与[17]中的级数解作了比较。表中$W=\sqrt{3(1-\nu^2)}\,w/h$，我们定义

$$\bar{a}Q=\frac{3}{4}(1-\nu^2)\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{a^2P}{\pi Eh^4}$$

P是中心支座的反力。由[17]计算的$\bar{a}$值为0.24615。本文用$N=21$，41和101计算结果为

$$\bar{a}_{N=21}=0.2386,\quad \bar{a}_{N=41}=0.2438,\quad \bar{a}_N=0.2467$$

表 6 受均布载荷带有中心支座圆薄板的挠度分布

r/a		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
W	$N=21$	0.02981	0.05965	0.08240	0.0936	0.09212	0.07890	0.05708	0.03169	0.009652
	$N=41$	0.02416	0.05362	0.0770	0.0893	0.08891	0.07675	0.05586	0.03116	0.00955
	$N=101$	0.02122	0.05064	0.07442	0.08721	0.08734	0.07569	0.05523	0.03087	0.00948
	[17]解	0.01994	0.04894	0.06244	0.07240	0.08535	0.07407	0.05414	0.03232	0.00934

以上四个算例表明，本文提出的一般解可用于任意轴对称载荷和边界条件，并可计算弹性地基常数等于零的情况，内力和位移均可得到好的数值精度，证明了本文理论的正确性．

参 考 文 献

[1] 纪振义、叶开沅，任意变系数微分方程的精确解析法，应用数学和力学，10(10)(1989)，747—757.

[2] Von Kármán, Th., Festigkeitsproblem im Maschinenbau, *Encycl. der Math. Wiss*, 4(1910), 348—351.

[3] Chien Wei-zang Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, *Chinese J. Phys*.(7)(1942), 102—113.

[4] 黄黔，复合载荷下圆荷板大挠度问题，应用数学和力学，4(5)(1983)，771—720.

[5] 陈山林、光积昌，圆薄板大挠度问题的摄动参数，应用数学和力学，2(1)(1981)，131—144.

[6] Keller, H. B. and E. L. Reiss, Iterative solutions for the, nonlinear bending of circular plates, *Comm. Pure Appl. Math*., XI (1958), 273—293.

[7] Way, S., Bending of circular plate with large deflection, *ASME Trans. J. Appl. Mech*., 56 (1934), 627—636.

[8] 叶开沅、郑晓静、王新志，On some properties and calculation of the exact solution to Kármán's equations of circular plate under a concentrated load, *Proc.ICNM*, Science Press, Shanghai (1985), 379—385.

[9] 叶开沅、郑晓静、周又和，An analytical formula of exact solution to Kármán's equation of circular plate under a concentrated load, *Proc, ICNM*, Science Press, Shanghai (1985), 386—391.

[10] 郑晓静、周又和，复合载荷下圆薄板大挠度问题的精确解，中国科学，A辑(10)(1986) 1045—1056.

[11] Nath, Y., Large amplitude response of circular plates foundations, *Int. J. Nonlinear Mech*., 17 (4) (1982), 285—296.

[12] Bdton, R., Stress in circular plate on elastic foundation, *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, 98(EM3) (1972), 629—640.

[13] 郑晓静、周又和，集合载荷作用下弹性地基圆荷板大挠度问题的精确解，力学学报，20(2)(1988)，161—172.

[14] 陈至达，板壳有限变形分析，力学进展，13(2)(1983).

[15] Ji Zhen-yi and Yeh Kai-yuan, Genegal solution on nonlinear buckling of non-homogeneous axial symmetric ring- and stringer-stiffened cylindrical shell, *Computre & Structure*, 34(4) (1990), 585—591.

[16] Timoshenko, S., and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plate and Shell*, McGraw-Hill Book Company, Second Edition (1959).

[17] 郑晓静，《圆薄板大挠度理论及应用》，吉林科学出版社(1990).

General Solution for Large Deflection Problems of Nonhomogeneous Circular Plates on Elastic Foundation

Ji Zhen-yi

(*Anhui Architectural Industry College, Hefei*)

Yeh Kai-yuan

(*Lanzhou University, Lanzhou*)

Abstract

In this paper, a new method is presented based on [1]. It can be used to solve the arbitrary nonlinear system of differential equations with variable coefficients. By this method, the general solution for large deformation of nonhomogeneous circular plates resting on an elastic foundation is derived. The convergence of the solution is proved. Finally, it is only necessary to solve a set of nonlinear algebraic equations with three unknowns. The solution obtained by the present method has large convergence range and the computation is simpler and more rapid than other numerical methods. Numerical examples given at the end of this paper indicate that satisfactory results of stress resultants and displacements can be obtained by the present method. The correctness of the theory in this paper is confirmed.

Key words nonhomogeneous circular plate, elastic foundation, large deformation