应用数学和力学，第13卷第11期（1992年11月）
Applied Mathematics anMd echanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

弹性动力学中的牵引力问题

谷　安　海

（中国长城铝业公司，郑州）

（叶开沅推荐，1990年3月6日收到）

摘　要

在连续介质力学中不仅Cauchy六方程

$$e_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x^i} \text{ 及 } e_{jk}=\frac{\partial u_j}{\partial x^k}+\frac{\partial u_k}{\partial x^j}$$

$$(1\leqslant i,j,k\leqslant 3,\ i\neq j\neq k)$$

是不完善的[1]，而且著名的Cauchy运动定律

$$\rho\ddot{\boldsymbol{x}}=\mathrm{div}\boldsymbol{T}+\rho\boldsymbol{b} \quad \text{及} \boldsymbol{T}^T=\boldsymbol{T}$$

（式中，$\rho\ddot{\boldsymbol{x}}$，$\rho\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{T}$及$\mathrm{div}\boldsymbol{T}$是连续的）也是不完善的[2]．前六个方程的不完善是由于在空间给定点上变形的几何表示方法至今尚非完全[3]，而后两个定律的不完善则Cauchy自已解释说$\rho\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{T}$及$\mathrm{div}\boldsymbol{T}$是标架无关的，但$\rho\ddot{\boldsymbol{x}}$则不是，且$\boldsymbol{T}$是对称的[2]．因此我们说后两个定律不可能满足广义标架上的非对称张量．

本文的目的是在三维牵引力域的影响下用广义标架上的非对称张量来完善Cauchy运动定律．

关键词　牵引力　失重　非对称　张量

一、问题的提出

设$\mathscr{B}$是一个体、$\mathscr{P}$是$\mathscr{B}$的一部分，$\chi(\mathscr{P},t)\equiv\chi(\mathscr{P})$是在时间为$t$时$\mathscr{P}$的形状，而一切$\mathscr{B}$或$\mathscr{P}$以及其外部$\mathscr{B}^c$或$\mathscr{P}^c$都在全域$\Omega$之中．

令$\boldsymbol{b}$对于$\chi(\mathscr{P})$的质量来说是体力，τ是在$\partial\chi(\mathscr{P})$上单位面积的牵引力域，$\ddot{\boldsymbol{x}}$是对于$\chi(\mathscr{P})$的惯性标架上的加速度域．那么，连续介质的基本定律就是[2]

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\chi(P)}\rho\ddot{\boldsymbol{x}}dV=\int_{\partial\chi(P)}\tau d\boldsymbol{A}+\int_{\chi(P)}\rho\boldsymbol{b}dV\\&\int_{\chi(P)}\boldsymbol{U}\wedge\rho\ddot{\boldsymbol{x}}dV=\int_{\partial\chi(P)}\boldsymbol{U}\wedge\tau d\boldsymbol{A}+\int_{\chi(P)}\boldsymbol{U}\wedge\rho\boldsymbol{b}dV\end{aligned}\right\}\tag{1.1*}$$

式中$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$，而$\boldsymbol{x}_0$是不动点．

假如把$\ddot{\boldsymbol{x}}$用标架无关的$\boldsymbol{a}_\varphi$替换以后、则(1.1)可写成

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\chi(P)}\rho(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}_\varphi)dV+\int_{\partial\chi(P)}\tau d\boldsymbol{A}=0\\&\int_{\chi(P)}\boldsymbol{U}\wedge\rho(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}_\varphi)dV+\int_{\partial\chi(P)}\boldsymbol{U}\wedge\tau d\boldsymbol{A}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

* 积分号下应为$\chi(\mathscr{P})$，但工厂无下角花体$\mathscr{P}$，故用$\chi(P)$代之．

注1 $a_\varphi=\ddot{x}^*-\ddot{x}_0^*-2A(\dot{x}^*-\dot{x}_0^*)-(\dot{A}-A^2)(x^*-x_0^*)$[2]

因(1.2)的前项是体积$\chi(\mathscr{P})$上的绝对连续函数、它是在$\mathscr{P}$上质量的积分的实加法函数、而后项是在边界面$\partial\chi(\mathscr{P})$上的绝对连续函数. 因此又可以说对于$\Omega$上的一切$\mathscr{B}$中的一切$\mathscr{P}$来说(1.2)较(1.1)更具有一般性，因为所有$\boldsymbol{b}$，$\tau$及$\boldsymbol{a}_\varphi$都是标架无关的.

特别，假如τ及$U\wedge\tau$在$\chi(\mathscr{P})$上是递次可微的. 并且在$\partial\chi(\mathscr{P})$上是连续的，那么由光滑变程上的格林变换就知

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\partial\kappa(P)}\tau d\boldsymbol{A}=\int_{\kappa(P)}\mathrm{div}\,\tau dV\\&\int_{\partial\kappa(P)}(\boldsymbol{U}\wedge\tau)d\boldsymbol{A}=2\int_{\kappa(P)}\mathrm{div}(\boldsymbol{U}\times\tau)dV\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

第一个等式是显然的，而第二个等式需要解释一下.

设$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\wedge\tau$是在点$\boldsymbol{x}$上、时间为$t$时对于不动点$\boldsymbol{x}_0$的矢矩，那么，至少存在一个叉积为

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\tau=\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\wedge\tau\tag{1.4}$$

如再注意到一切下标($1\leqslant i$、j、$k\leqslant 3$，$i\neq j\neq k$)的安排，则该矢矩

$$\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\times\tau\}_k=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_i\tau_j-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_j\tau_i\tag{1.5}$$

就定义为Gibbsion叉积群[2].

如上述无疑、再把(1.3)代入(1.2)我们就得到动载荷方程，也就是我们需要讨论的广义运动定律

$$\left.\begin{aligned}&\rho(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}_\varphi)+\mathrm{div}\,\tau=0\\&\rho\boldsymbol{U}\wedge(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}_\varphi)+2\mathrm{div}(\boldsymbol{U}\times\tau)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

特别，当$\boldsymbol{a}_\varphi\to 0$及$\boldsymbol{b}\to 0$或$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}_\varphi=0$（亦即失重状态）时，则产生

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{div}\ \tau=0\\&\tau\ \mathrm{rot}\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}\mathrm{rot}\ \tau=0\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

进而，若$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$为常矢量，知$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{U}=0$则必有$\boldsymbol{U}\perp\mathrm{rot}\ \tau$或$\mathrm{rot}\ \tau=0$. 但一般$\boldsymbol{U}$不一定垂直于$\mathrm{rot}\ \tau$，所以(1.7)就变为齐次线性方程组

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{div}\tau=0\\&\mathrm{rot}\tau=0\end{aligned}\right\}\tag{1.8}$$

因(1.6)或(1.8)为积分方程(1.2)的核，所以(1.8)包容$\chi(\mathscr{B})$内的每一个闭曲面φ.

二、定义及记号

定义1 若$(\boldsymbol{w},\sigma)$为一个数偶并简记为$(\cdot,\cdot)$，其中$\boldsymbol{w}$为域$\boldsymbol{F}$上的矢量空间，σ为$\boldsymbol{w}$上的$\boldsymbol{F}^n$双型，并有以下四种情形

(a) 若$\sigma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sigma(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{w}$，则$(\cdot,\cdot)$就叫做对称流型.

(b) 若$\sigma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-\sigma(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{w}$，则$(\cdot,\cdot)$就叫做斜对称流型.

(c) 若$\sigma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=0$，$\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{w}$，则$(\cdot,\cdot)$就叫做辛流型.

(d) 最一般情况，若$\sigma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\neq 0$或$\sigma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\neq\sigma(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$不失双线型或一个半线型[4]的一般意义$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{w}$，则$(\cdot,\cdot)$就叫做非对称流型[5].

定义2 设为$\boldsymbol{F}$其自身上的一维矢量空间. 若$\boldsymbol{V}^*$上的元素是$\boldsymbol{V}$上的线性型式，我们就记

$V^*=\mathcal{L}(V, F)$并称其为V的对偶空间.

定义3 若$(e^1, \cdots, e^n)$是$(a^1, \cdots, a^n)$的对偶基，则采用记号

$$a^i=e_i \tag{2.1}$$

定义4 线性变换$p: w\to w$称为投影，当且仅当

$$p^2=p \tag{2.2}$$

亦即$p(p(A))=p(A) \quad \forall A\in w$.

引理1 设w是n维矢量空间，而$S: w\to w$为投影（即使非正投影）. 那么至少存在一个w的基$\{A_1, \cdots, A_n\}$能满足

$$S(A_i)=\begin{cases}A_i & (1\leqslant i\leqslant r)\\ 0 & (r+1\leqslant i\leqslant n)\end{cases} \tag{2.3}$$

其中$r=\dim(I_m, S)$，而阵S对于基$\{A_1, \cdots, A_n\}$就是

$$\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

证 见[1]中引理4的证明.

现引入几何学的解释如图1所示. 假如选择平面R^2的子基为$\{e_i, e_j\}$，而空间R^3的基为$\{e_i, e_j, e_k\}$，那么由$\{e_i, e_j\}$所成的x_k就躺在R^2面上，于是就有

$$x_k=x^ie_i+x^je_j \tag{2.5}$$

假如R^3中的x的表达式为

$$x=x^ie_i+x^je_j+x^ke_k \tag{2.6}$$

且令Ox_k的单位矢量为$\{e^k\}$时，则该x又可写成

$$\left.\begin{aligned}x&=x^ke_k+x_ke^k\\ x_ke^k&=x^ie_i+x^je_j\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

因此x躺在另一个平面R'^2上，而该平面是由混合基$\{e_k, e^k\}$生成的.

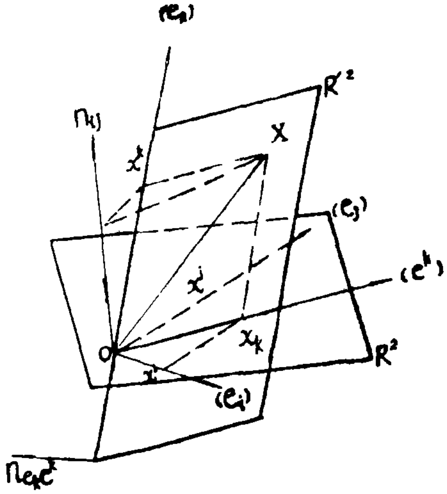

图 1

设$\mathcal{L}: R^3\to R^3$是线性变换，然后由(2.6)知

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x)&=x^i\mathcal{L}(e_i)+x^j\mathcal{L}(e^j)+x^k\mathcal{L}(e_k)\\ &=x^ie_i+x^je_j=x_ke^k=x_k.\end{aligned}$$

对于一切$\{e_i, e_j\}\in R^2$，$e_k\in\mathcal{L}(e_k)$，$e_k\notin R^2$也就是说$\mathcal{L}^2(x)=\mathcal{L}(\mathcal{L}(x))=x_k$.

一般若考虑到循环置换一切上、下标$\{1\leqslant i, j, k\leqslant 3\}$时，则显然$\mathcal{L}$就是一个投影群.

假如我们再引进曲线坐标$(\cdot,\cdot)$的法向单位矢量的记号：

$$\left.\begin{aligned}&n_{ij}=\frac{e_i\wedge e_j}{|e_i\wedge e_j|} \quad 及 \quad n_{e_ke^k}=\frac{e_k\wedge e^k}{|e_k\wedge e^k|}\\ &或 \quad n_{e_ke^i}=\frac{e_k\wedge e^i}{|e_k\wedge e^i|}\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

那么n_{ij}及$n_{e_ke^k}$分别就是平面R^2及R'^2的法向单位矢量（见图1）.

三、可 解 条 件

现在考察对偶空间的某弹性系统．设 $\boldsymbol{x}$ 对于$\{\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{e}_j,\ \boldsymbol{e}_k\}$的坐标是$\{\boldsymbol{x}^i,\ \boldsymbol{x}^j,\ \boldsymbol{x}^k\}$而其线性型对于$\{\boldsymbol{e}^i,\ \boldsymbol{e}^j,\ \boldsymbol{e}^k\}$的坐标为$\{\boldsymbol{x}_i,\ \boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{x}_k\}$．

假如在 $\boldsymbol{R}^{2n}(n=3)$ 中的某处选择一个独立的参考标架 $\tilde{O}x^1x^2x^3$ 借助它可以确定两个矢点 $O(x^1,\ x^2,\ x^3)$ 及 $M(x^1+\Delta x^1,\ x^2+\Delta x^2,\ x^3+\Delta x^3)$ 在我们讨论的物体之中，并建立一个三斜的平行六面体 $OABCDEFM$(见图2)．它的棱$OA=\Delta x^1$，$OB=\Delta x^2$，$OC=\Delta x^3$分别平行于轴 Ox^1，Ox^2，Ox^3．而线段 $OD=\Delta x_1$，$OE=\Delta x_2$，$OF=\Delta x_3$ 分别平行于轴 Ox_1，Ox_2，Ox_3，其侧面积dA，例如对于第„k"侧面，就是„i"及„j"两棱的积、而其体积就是每个棱的混合积，所以就有

$$\left.\begin{aligned} dA&=\Delta x^i\wedge\Delta x^j \\ dV&=(\Delta x^i\wedge\Delta x^j)\cdot\Delta x^k \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

因为在弹性体系中(或固体中)由外力产生的应力在各点上是不同的，一般地说应力是该点坐标的函数：

$$\left.\begin{aligned} X^1&=F^1(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t) \\ X^2&=F^2(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) \\ X^3&=F^3(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot) \\ X_1&=F_1(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)^* \\ X_2&=F_2(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)^* \\ X_3&=F_3(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)^* \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

注2 X_1, X_2, X_3有时记为X^4, X^5, X^6，见文献[3]，[6]．

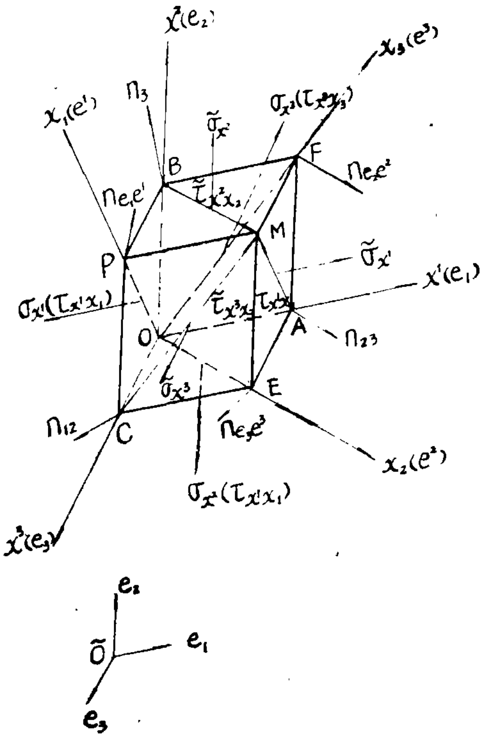

图 2

由于应力可以用在该体系中坐标轴上的投影来表示，所以我们将用它作一应变分析．

假如作用在上述平行六面体的每一个侧面（例如第„i"个侧面）上的总应力记为 X^i而不致于引起混乱时，则它的三个分量就是 X^{ii}，X^{ij}，X^{ik}．再令 $X^{ii}\equiv\sigma_{x^i}$ 为张应力，而 $X^{ij}\equiv\tau_{x^ix^j}$，$X^{ik}\equiv\tau_{x^ix^k}$ 为剪应力时，由(2.8)就知

$$\left.\begin{aligned} X^i&=\sigma_{x^i}+\tau_{x^ix_i} \\ \tau_{x^ix_i}&=\tau_{x^ix^j}+\tau_{x^ix^k} \end{aligned}\right\}(1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3,\ i\neq j\neq k) \qquad (3.3)$$

式中 $\tau_{x^ix_i}$ 是在„i"侧面上的合成剪应力．

假如作用在该平行六面体的$OBDC$面上的两个应力分量是 $\sigma_{x^1}=F^1(x^1,\cdot,\cdot)$及$\tau_{x^1x_1}=F_1(x^1,\cdot,\cdot)$，则作用在$AFEM$面上应力将是$\tilde{\sigma}_{x^1}=F^1(x^1+\Delta x^1,\cdot,\cdot)$及 $\tilde{\tau}_{x^1x_1}=F_1(x^1+\Delta x^1,\cdot,\cdot)$或者是它的线性近似值 $\tilde{\sigma}_{x^1}=\sigma_{x^1}+\dfrac{\partial\sigma_{x^1}}{\partial x^1}dx^1$ 及 $\tilde{\tau}_{x^1x_1}=\tau_{x^1x_1}+\dfrac{\partial\tau_{x^1x_1}}{\partial x^1}dx^1$．用同样的方法可知其他所有各侧面上的应力分量．(3.3)指出：假如应力对于所选择的坐标基是未知的，但该应力的未知量的数目将是六个

$$\sigma_{x^1},\ \sigma_{x^2},\ \sigma_{x^3},\ \tau_{x^1x_1},\ \tau_{x^2x_2},\ \tau_{x^3x_3} \tag{3.4}$$

因此又可知作用在该平行六面体所有侧面上的$3\times6=18$个应力分量，将简化为$2\times6=12$个分量．

现在让我们找出有关弹性应力问题的齐次线性方程组的可解条件．

首先，由(1.8)知$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0$，然后根据矢量域上散度的定义就知

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}(P)=\lim_{D(S)\to0}\frac{\oint_S \boldsymbol{F}d\boldsymbol{S}}{V\to0} \tag{3.5}$$

再令

$$\begin{aligned}\oint_S \boldsymbol{F}d\boldsymbol{S}&=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}=\iint_{OCDB}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}+\iint_{AFME}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}+\iint_{OAFC}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}+\iint_{BDMF}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}\\&+\iint_{OBFA}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}+\iint_{CEMD}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}=\left\langle\iint_{AFME}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}-\iint_{OBDC}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}\right\rangle+\left\langle\iint_{BDMF}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}\right.\\&\left.-\iint_{OAEC}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}\right\rangle+\left\langle\iint_{CEMD}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}-\iint_{OAFB}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{A}\right\rangle=\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3\end{aligned} \tag{3.6}$$

并且沿x^1轴积分应用Lagrange定理及积分中值定理可知

$$\begin{aligned}\Pi_1&=\iint_{AFME}\{[\sigma_{x^1}(x^1+\Delta x^1,\cdot,\cdot)-\sigma_{x^1}(x^1,\cdot,\cdot)]\cos\widehat{e_1n_{23}}\}dA\\&=\iint_{AFME}\left\{\frac{\partial\sigma_{x^1}}{\partial x^1}(x^1+\theta\Delta x^1,\cdot,\cdot)\cos\widehat{e_1n_{23}}\right\}dA\\&=\left\{\frac{\partial\sigma_{x^1}(P_1)}{\partial x^1}\cos\widehat{e_1n_{23}}\right\}\Delta x^1\cdot(\Delta x^2\wedge\Delta x^3)\end{aligned} \tag{3.7}$$

同理沿x^2及x^3轴积分又可分别写出

$$\Pi_2=\left\{\frac{\partial\sigma_{x^2}(P_2)}{\partial x^2}\cos\widehat{e_2n_{31}}\right\}\Delta x^2\cdot(\Delta x^3\wedge\Delta x^1) \tag{3.8}$$

$$\Pi_3=\left\{\frac{\partial\sigma_{x^3}(P_3)}{\partial x^3}\cos\widehat{e_3n_{12}}\right\}\Delta x^3\cdot(\Delta x^1\wedge\Delta x^2) \tag{3.9}$$

若$D(S)\to0$，则P_1，P_2及$P_3\to P$这就意味着Δx^1、Δx^2及$\Delta x^3\to0$．当记$\cos\widehat{\boldsymbol{e}\boldsymbol{n}}=(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})$时，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{F}(P)&=\lim_{D(S)\to0}\frac{\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3}{\Delta x^1\cdot(\Delta x^2\wedge\Delta x^3)}\\&=\frac{\partial\sigma_{x^1}(P)}{\partial x^1}(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{n}_{23})+\frac{\partial\sigma_{x^2}(P)}{\partial x^2}(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{n}_{31})\\&\quad+\frac{\partial\sigma_{x^3}(P)}{\partial x^3}(\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{n}_{12})\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中 P_1，P_2，P_3及P都是上述平行六面体$OABCDEFM$的内点．

若令$\mathrm{div}\boldsymbol{F}(P)=0$ 则其紧凑形式就是：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{n}_{23}&0&0\\0&\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{n}_{31}&0\\0&0&\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{n}_{12}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\partial\sigma_{x^1}\\\partial\sigma_{x^2}\\\partial\sigma_{x^3}\end{bmatrix}=0 \tag{3.11}$$

因此知；张量$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{n}_{23}$，$\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{n}_{31}$，$\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{n}_{12}$或$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$及$\boldsymbol{n}_{12}$，$\boldsymbol{n}_{23}$，$\boldsymbol{n}_{31}$都是独立的．

其次，假如在点P上矢量域的旋度沿"$\boldsymbol{n}$"方向的投影等于该点沿该方向环量的密度，且记面积$dA=\Delta x_3\wedge\Delta x^3$的法向矢量为$\boldsymbol{n}_{e^3e_3}$时，再由矢量域上的旋度定义就知

$$\operatorname{Proj}_{\boldsymbol{n}_{e^3e_3}}-\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(P)=\lim_{D(S)\to 0}\frac{\oint_L \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{S}}\qquad \boldsymbol{S}\parallel \boldsymbol{n}_{e^3e_3} \tag{3.12}$$

若令

$$\oint_L \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}=\int_{OCMF}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}=\int_{\Sigma}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}=\int_{OC}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}+\int_{CM}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}+\int_{MF}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$$
$$+\int_{FO}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}=\left\langle\int_{CM}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}-\int_{OF}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}\right\rangle-\left\langle\int_{FM}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}-\int_{OC}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}\right\rangle$$
$$=\Gamma_1+\Gamma_2 \tag{3.13}$$

并且沿用Lagrange定理及积分中值定理，然后沿$\boldsymbol{n}_{e^3e_3}$方向计算所有的力矩则得Γ_2如下：

$$\Gamma_2=-\int_{FM}\Big\{\Big[\tau_{x^1x_1}(x^1+\Delta x^1,\cdot,\cdot)-\tau_{x^1x_1}(x^1,\cdot,\cdot)\Big]\cos\widehat{e^1\boldsymbol{e}_3}$$
$$+[\sigma_{x^1}(x^1+\Delta x^1,\cdot,\cdot)-\sigma_{x^1}(x^1,\cdot,\cdot)]\cos\widehat{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3}$$
$$+[\tau_{x^2x_2}(\cdot,x^2+\Delta x^2,\cdot)-\tau_{x^2x_2}(\cdot,x^2,\cdot)]\cos\widehat{\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}_3}$$
$$+[\sigma_{x^2}(\cdot,x^2+\Delta x^2,\cdot)-\sigma_{x^2}(\cdot,x^2+\Delta x^2,\cdot)]\cos\widehat{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}\}dx^3$$
$$=-\int_{x^3}^{x^3+\Delta x^3}\Big\{\Big[\frac{\partial\tau_{x^1x_1}}{\partial x^1}(x^1+\theta\Delta x^1,\cdot,\cdot)\cos\widehat{\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}_3}$$
$$+\frac{\partial\sigma_{x^1}}{\partial x^1}(x^1+\theta\Delta x^1,\cdot,\cdot)\cos\widehat{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3}\Big]\Delta x^1$$
$$+\Big[\frac{\partial\tau_{x^2x_2}}{\partial x^2}(\cdot,x^2+\theta\Delta x^2,\cdot)\cos\widehat{\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}_3}+\frac{\partial\sigma_{x^2}}{\partial x^2}(\cdot,x^2+\theta\Delta x^2,\cdot)$$
$$\cdot\cos\widehat{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}\Big]\Delta x^2\Big\}dx^3=-\Big\{\Big[\frac{\partial\tau_{x^1x_1}(P_1')}{\partial x^1}\cos\widehat{\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}_3}$$
$$+\frac{\partial\sigma_{x^1}(P_1')}{\partial x^1}\cos\widehat{\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3}\Big]\Delta x^1+\Big[\frac{\partial\tau_{x^2x_2}(P_2')}{\partial x^2}\cos\widehat{\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}_3}$$
$$+\frac{\partial\sigma_{x^2}(P_2')}{\partial x^2}\cos\widehat{\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}\Big]\Delta x^2\Big\}\Delta x^3 \tag{3.14}$$

同理知

$$\Gamma_1=\int_{CM}\Big\{\Big[\tau_{x^3x_3}(\cdot,\cdot,x^3+\Delta x^3)-\tau_{x^3x_3}(\cdot,\cdot x^3)\Big]$$
$$+[\sigma_{x^3}(\cdot,\cdot,x^3+\Delta x^3)-\sigma_{x^3}(\cdot,\cdot,x^3)]\cos\widehat{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}^3}\Big\}dx_3$$
$$=\int_{x_3}^{x_3+\Delta x_3}\Big\{\Big[\frac{\partial\tau_{x^3x_3}}{\partial x^3}(\cdot,\cdot,x^3+\theta\Delta x^3)$$
$$+\frac{\partial\sigma_{x^3}}{\partial x^3}(\cdot,\cdot,x^3+\theta\Delta x^3)\cos\widehat{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}^3}\Big]\Delta x^3\Big\}dx_3$$
$$=\Big[\frac{\partial\tau_{x^3x_3}(P_3')}{\partial x^3}+\frac{\partial\sigma_{x^3}(P_3')}{\partial x^3}\cos\widehat{\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}^3}\Big]\Delta x^3\cdot\Delta x_3 \tag{3.15}$$

若$D(S)\to 0$，即$\Delta r\to 0$，则P_1'，P_2'及$P_3'\to P'\in\square OCMF$，这就意味着$\Delta x^3$和$\Delta x_3\to 0$。所以

就有

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}_{e^3e_3}}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}(P')=\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{\Delta r}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x^3\to 0\\ \Delta x_3\to 0}}\frac{\left[\dfrac{\partial\tau_{x^3x_3}(P')}{\partial x^3}+\dfrac{\partial\sigma_{x^3}(P')}{\partial x^3}\cos\widehat{e_3e^3}\right]\Delta x^3\cdot\Delta x_3}{\Delta x^3\cdot\Delta x_3}$$

$$-\lim_{\substack{\Delta x^2\to 0\\ \Delta x^3\to 0}}\frac{\left[\dfrac{\partial\tau_{x^2x_2}(P')}{\partial x^2}\cos\widehat{e^2e_3}+\dfrac{\partial\sigma_{x^2}(P')}{\partial x^2}\cos\widehat{e_2e_3}\right]\Delta x^2\cdot\Delta x^3}{\Delta x^2\cdot\Delta x^3}$$

$$-\lim_{\substack{\Delta x^1\to 0\\ \Delta x^3\to 0}}\frac{\left[\dfrac{\partial\tau_{x^1x_1}(P')}{\partial x^1}\cos\widehat{e^1e_3}+\dfrac{\partial\sigma_{x^3}}{\partial x^3}\cos\widehat{e_1e_3}\right]\Delta x^1\cdot\Delta x^3}{\Delta x^1\cdot\Delta x^3}$$

$$=\frac{\partial\tau_{x^3x_3}(P')}{\partial x^3}+\frac{\partial\sigma_{x^3}(P')}{\partial x^3}\cos\widehat{e_3e^3}-\frac{\tau_{x^2x_2}(P')}{\partial x^2}\cos\widehat{e^2e_3}$$

$$-\frac{\partial\sigma_{x^2}(P')}{\partial x^2}\cos\widehat{e_2e_3}-\frac{\partial\tau_{x^1x_1}(P')}{\partial x^1}\cos\widehat{e^1e_3}-\frac{\partial\sigma_{x^1}(P')}{\partial x^1}\cos\widehat{e_1e_3} \tag{3.16}$$

同理沿$\boldsymbol{n}_{e^2e_2}$及$\boldsymbol{n}_{e^1e_1}$方向可分别写出

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}_{e^2e_2}}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}(P'')=\frac{\partial\tau_{x^2x_2}(P'')}{\partial x^2}+\frac{\partial\sigma_{x^2}(P'')}{\partial x^2}\cos\widehat{e_2e^2}$$

$$-\frac{\partial\tau_{x^1x_1}(P'')}{\partial x^1}\cos\widehat{e^1e_2}-\frac{\partial\sigma_{x^1}(P'')}{\partial x^1}\cos\widehat{e_1e_2}$$

$$-\frac{\partial\tau_{x^3x_3}(P'')}{\partial x^3}\cos\widehat{e^3e_2}-\frac{\partial\sigma_{x^3}(P'')}{\partial x^3}\cos\widehat{e_3e_2} \tag{3.17}$$

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}_{e^1e_1}}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}(P''')=\frac{\partial\tau_{x^1x_1}(P''')}{\partial x^1}+\frac{\partial\sigma_{x^1}(P''')}{\partial x^1}\cos\widehat{e_1e^1}$$

$$-\frac{\partial\tau_{x^3x_3}(P''')}{\partial x^3}\cos\widehat{e^3e_1}-\frac{\partial\sigma_{x^3}(P''')}{\partial x^3}\cos\widehat{e_3e_1}$$

$$-\frac{\partial\tau_{x^2x_2}(P''')}{\partial x^2}\cos\widehat{e^2e_1}-\frac{\partial\sigma_{x^2}(P''')}{\partial x^2}\cos\widehat{e_2e_1} \tag{3.18}$$

若记$\cos\widehat{e_1e_2}=(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)$，…，$\cos\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}^2=(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}^2)$，…且当$D(S)\to 0$，则$P'$，$P''$及$P'''\to P$。其含意为所有$P'$、$P''$、$P'''$及$P$都是上述平行六面体$OABCDEFM$的内点。因此把(3.16)，(3.17)及(3.18)相加，则在P点上的合成旋度就是

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}(P)=[\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}_{e^3e_3}}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}(P')]+[\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}_{e^2e_2}}-\mathrm{rot}\boldsymbol{F}(P'')]$$

$$+[\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}_{e^1e_1}}-\mathrm{rot}\boldsymbol{F}(P''')] \tag{3.19}$$

然后把(3.19)写成矩阵式

$$[\boldsymbol{n}_{e^1e_1}\quad \boldsymbol{n}_{e^2e_2}\quad \boldsymbol{n}_{e^3e_3}]\cdot\begin{bmatrix}1 & -\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}_1 & -\boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}^1 & -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 & -\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1\\ -\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}_2 & 1 & -\boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}_2 & -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}^2 & -\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2\\ -\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}_3 & -\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}_3 & 1 & -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 & -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}^3\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix} \partial\tau_{x^1x_1} \\ \partial\tau_{x^2x_2} \\ \partial\tau_{x^3x_3} \\ \partial\sigma_{x^1} \\ \partial\sigma_{x^2} \\ \partial\sigma_{x^3} \end{bmatrix}=\mathrm{rot}\boldsymbol{F} \tag{3.20}$$

因为法向矢量$\boldsymbol{n}_{e^1e_1}$，$\boldsymbol{n}_{e^2e_2}$，$\boldsymbol{n}_{e^3e_3}$是独立的且$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=0$，则偏微分方程组(3.30)变成齐次线性系统．再把它写成一种方便形式，就是

$$\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}_1 & -\boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}_2 & 1 & -\boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}_3 & -\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}^1 & -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 & -\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 \\ & [\,\mathbf{0}\,] & & -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}^2 & -\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 \\ & & & -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 & -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}^3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \partial\tau_{x^1x_1} \\ \partial\tau_{x^2x_2} \\ \partial\tau_{x^3x_3} \\ \partial\sigma_{x^1} \\ \partial\sigma_{x^2} \\ \partial\sigma_{x^3} \end{bmatrix}=0 \tag{3.21}$$

由Grame′s定律知、若(3.21)具有非零的任意解系的充要条件就是

$$\mathrm{dit}\boldsymbol{T}=0 \quad 或 \quad \mathrm{dit}\boldsymbol{A}=\mathrm{dit}\boldsymbol{B}=0 \tag{3.22}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \\ &\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}_1 & -\boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}_1 \\ -\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}_2 & 1 & -\boldsymbol{e}^3\boldsymbol{e}_2 \\ -\boldsymbol{e}^1\boldsymbol{e}_3 & -\boldsymbol{e}^2\boldsymbol{e}_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}^1 & -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 & -\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 \\ -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}^2 & -\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 \\ -\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 & -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}^3 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

因此，我们称它为(1.6)的可解条件．

四、讨　论

(1)　若 $\begin{cases} i\neq j,\ A_{ij}=A_{ji}\ 而\ B_{ij}=-B_{ji} \\ i=j,\ A_{ii}=1\quad 而\ B_{ii}=0 \end{cases}$

则A是对称的，而B是斜对称的，因此我们说T是正交对称的．

(2)　若 $\begin{cases} i\neq j,\ A_{ij}\neq A_{ji}\ 而\ B_{ij}=-B_{ji}\ 亦即\ T_{ij}\neq T_{ji} \\ i=j\quad A_{ii}=1\quad 而\ B_{ii}\neq 0\quad 亦即\ T_{ii}\neq 0 \end{cases}$

因此我们又说$\boldsymbol{T}$是非对称的．

五、结　论

假如描述在域Ω上的物体B的参考运动$\chi(\cdot)$是方程(1.6)时，那么已知对于一切$\boldsymbol{U}\equiv\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0=$常矢量时、$\dot{\boldsymbol{U}}=$常数．$\ddot{\boldsymbol{U}}=0$，且忽略了体力$\boldsymbol{b}$或者在失重条件$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}_\varphi=0$时，则与$\mathrm{dit}\boldsymbol{T}=0$是等价的，因(1.6)可变为(1.8)．鉴于以上所述的事实我们确信我们得到以下断言：

牵引力定理 设$\tau(\cdot)$及$T(\cdot)$分别为$\mathcal{X}$上的连续函数和$\mathcal{X}$上的非对称张量场($\mathcal{X}\in\mathscr{B}$)，那么在通过$\mathcal{X}(\mathscr{B})$内部一切点上的每一个闭曲面$\mathscr{S}$上 $\mathrm{div}\,\tau=\mathrm{rot}\,\tau=0$ 几乎处处成立的充要条件就是$\mathrm{dit}\,T=0$，且该T至少具有15个分量。

证明是显然的。

参 考 文 献

[1] 谷安海，结构的延拓及三斜结构系统的代数弹性运动的数学性质，应用数学和力学，8(10)(1987)，931—942.

[2] Truesdell, C., A first course in rational continuum mechanics, Vol. 1, Academic Press, New York, San Francisco, London (1977), 50—145—235.

[3] Filonenko-Borodich, M., *Theory of Elasticity*, Foreign Languages Publishing House, Moskow, 30—48.

[4] Cruenbery, K. W. and A. J. Weir, *Linear Geometry*, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin (1977), 15—129.

[5] 谷安海，线性流型上的变换函数ϕ及广义的勾股定理，应用数学和力学，8(12)(1987)，1131—1134.

[6] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社(1980)，63—64.

The Traction Problem in Elastodynamics

Gu An-hai

(*China Great Wall Aluminum Corporation, Zhengzhou*)

Abstract

In continuum mechanics, Cauchy's six equations

$$e_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x^i}\ \text{and}\ e_{jk}=\frac{\partial u_j}{\partial x^k}+\frac{\partial u_k}{\partial x^j}\qquad (1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 3,\ i\neq j\neq k)$$

are incomplete[1] and the famous Cauchy's laws of motion

$$\rho\ddot{x}=\mathrm{div}\,\mathbf{T}+\rho\mathbf{b}\ \text{ and }\ \mathbf{T}^T=\mathbf{T}$$

where $\rho\ddot{x}$, ρb, T and divT are continuous are also incomplete[2]. The first six equations are incomplete because the geometrical representation of deformation at a given point is as yet incomplete[3], and the last two laws are incomplete because b, T and divT are frame-indifferent, but $\rho\ddot{x}$ is not, and T is asymmetric, as Cauchy interpreted himself. Therefore, we say, the last two laws can't accommodate to the asymmetric tensor.

The purpose of this paper is to complete Cauchy's laws of motion by postulating an asymmetric tensor for the underlying traction field of 3-dimensional space on a general framing.

Key words traction, weightlessness, asymmetric, tensor