应用数学和力学，第13卷第9期（1992年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非局部非对称弹性固体理论

高　键　　陈至达

（山东工业大学力学研究室）（中国矿业大学北京研究生部）

（1990年11月17日收到）

摘　要

本文基于非局部连续统场论和非线性连续体力学理论，建立了非局部非对称弹性固体的非线性理论。它完善和发展了 Eringen 等人所建立的非局部弹性场论。将文献[1]中所建立的非局部非对称弹性力学的线性理论推广到有限变形。证明了在非局部弹性固体中存在着非局部体力矩。非局部体力矩引起应力的非对称性，而非局部体力矩则由原子晶格相互作用形成的共价键所产生的。并应用本文建立的理论合理地解释了平面横波和纵波色散系关的不相似性。

关键词　非对称应力　非局部理论　体矩应力

一、前　　言

经典连续体力学的基本假设是所有的物体是无结构，均匀和连续的。事实上，在所有的材料中都具有微观结构；微观结构影响材料的力学状态。这一现象越来越引起人们的注意。

至今，人们已建立了许多微结构物体的力学模型。基于晶格点阵动力学建立的微极理论和非局部理论就是其中的两种微结构力学理论。利用广义插值函数将离散的结构介质转变为连续性介质，而建立了非局部拟连续统场论[2]。根据连续体力学的公理系统建立的非局部连续统场论。如果考虑了原子晶格的内部结构，解除粒子运动中位移和转动之间的耦合，建立了微极场论[3]。在微极场论中，转动引起非对称应力。事实上，这是一种面力偶理论。材料中原子晶格的运动具有方向性；这是由于原子晶格之间相互作用产生出的共价键。但这种极化效应在已建立的非对称弹性理论中均未涉及到。

我们已根据非局部连续统场论的公理系统建立了非局部非对称弹性介质的线性理论。本文基于陈至达教授建立的非线性几何场论建立了一种具有体力矩作用的非局部弹性体的非线性理论[4]。

二、非线性几何场论

在三维欧氏空间选定一固定坐标系$\{z^i\}$，并选取嵌含在变形体中的拖带坐标系$\{x^i\}$。在初始位形的拖带坐标系$\{x^i\}$与$\{z^i\}$同胚。在变形物体B中点P的位置矢量在初始位形中是$\boldsymbol{r}_0$，在现时位形是$\boldsymbol{r}$。

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{u} \tag{2.1}$$

协变基矢分别是：$\boldsymbol{g}_i^0=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial x^i}$，　　$\boldsymbol{g}_i=\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}$

以及：

$$\boldsymbol{g}_i=(\delta_i^j+u^j|_i)\boldsymbol{g}_j^0=F_i^j\boldsymbol{g}_j^0 \tag{2.2}$$

基于拖带坐标描述法，陈至达已证明了S-R变度的S-R分解定理，将有限应变和有限转动分离开来；并证明了平均转动角的几何意义；系统地建立了非线性几何场论。为方便起见，我们系统地将非线性几何场论总结为下述定理。

定理1 （S-R分解定理） 如果给定的位移函数$\boldsymbol{u}$是物理可能的，在变形物体中每一点是一阶可微的。运动的变换可以分解为两个子变换，正交变换和对称变换，之直和。正交变换描述点集的旋转，对称变换描述点集的变形。

$$F^i_j=S^i_j\ (\text{对称})\ +R^i_j\ (\text{正交})\qquad (i,j=1,2,3) \tag{2.3}$$

这里的S^i_j和R^i_j分别是定义为应变张量和旋转张量分量。

$$S^i_j=\frac{1}{2}(u^i|_j+u^i|^T_j)-(1-\cos\theta)L^i_kL^k_j$$

$$R^i_j=\delta^i_j+L^i_j\sin\theta+(1-\cos\theta)L^i_kL^k_j$$

$$L^i_j=W^i_j/\sin\theta,\ W^i_j=\frac{1}{2}(u^i|_j-u^i|^T_j)$$

这里θ是平均正旋角，并由下式给出：

$$\theta=\pm\mathrm{arc\ sin}(-W^i_jW^j_i)^{1/2}\ \text{或}\ |\sin\theta|=\frac{1}{2}|\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}|$$

当一个物体的变形由拖带坐标系来描述，选择的参考位形是相对的。

因此，我们可以选择在任意瞬时物体的位形作为基准态。当观察几何量的变化率时，即选择由拖带坐标系标架$\{\boldsymbol{g}_i\}$所描述的位形作为基准态。

定理2 如果选择拖带坐标系$\{\boldsymbol{g}_i\}$所描述的位形作为基准态，则

$$\dot{\boldsymbol{g}}_i=v^j\|_i\boldsymbol{g}_j$$

$$\dot{R}^i_j=L^i_j\dot{\theta}=\frac{1}{2}(v^i\|_j-v^i\|^T_j)\qquad (i,j=1,2,3) \tag{2.4}$$

$$\dot{S}^i_j=\frac{1}{2}(v^i\|_j+v^i\|^T_j)$$

证明 根据(2.2)式，可求出：

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{g}_i(x^i,t)&=\boldsymbol{g}_i(x^i,t+\Delta t)-\boldsymbol{g}_i(x^i,t)=[F^j_i(x^i,t+\Delta t)-F^j_i(x^i,t)]\boldsymbol{g}^0_j\\&=\Delta F^j_i(x^i,t)\boldsymbol{g}^0_j=[\Delta R^j_i(x^i,t)+\Delta S^j_i(x^i,t)]\boldsymbol{g}^0_j\end{aligned} \tag{2.5}$$

当瞬时t的拖带基矢$\{\boldsymbol{g}_i\}$看作是基准态来描述$\Delta\boldsymbol{g}_i$时，则有

$$\boldsymbol{g}^0_i\to\boldsymbol{g}_i\ \text{和}\ \lim_{\mathbf{g}^0_i\to\mathbf{g}_i}\theta=0 \tag{2.6}$$

因此

$$\frac{\partial\boldsymbol{g}_i(x^i,t)}{\partial t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{g}_i(x^i,t)}{\Delta t}=\lim_{\theta\to 0}\left\{\left[\frac{\partial R^j_i}{\partial t}+\frac{\partial S^j_i}{\partial t}\right]\boldsymbol{g}_j\right\} \tag{2.7}$$

然后，可得到：

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial R^j_i}{\partial t}&=\lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{\partial L^j_i}{\partial t}\sin\theta+L^j_i\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial t}(L^j_kL^k_i)(1-\cos\theta)+L^j_kL^k_i\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\}=L^j_i\dot{\theta}\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial S^j_i}{\partial t}&=\lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{1}{2}(\dot{u}^j|_i+\dot{u}^j|^T_i)-\frac{\partial}{\partial t}(L^j_kL^k_i)(1-\cos\theta)\right.\\&\quad\left.-L^j_kL^k_i\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\}=\frac{1}{2}(v^j\|_i+v^j\|^T_i)\end{aligned} \tag{2.9}$$

从另一方面 $\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right)=v^i\|_j \boldsymbol{g}_i$ (2.10)

定义1 变形物体中一点P邻域的转动的平均值是：

$$\boldsymbol{M}=(\nabla\times\boldsymbol{u})_p=\lim_{\Delta\Omega\to 0}\frac{1}{\Delta\Omega}\iint_{\Delta S}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u})dS \tag{2.11}$$

其中 $\boldsymbol{n}$是微元体$\Delta\Omega$的边界面ΔS的单位法矢．我证明下述定理[5]．

定理3 在点P无限小邻域中位移旋转的平均值是：

$$\theta=\frac{1}{2}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}\sin\theta \tag{2.12}$$

定理4 如果由拖带坐标系$\{\boldsymbol{g}_i\}$描述的位形作为基准态，则有：

$$\dot{\theta}=\boldsymbol{I}\dot{\theta} \tag{2.13}$$

其中，$\boldsymbol{I}$是平均正旋角的旋转轴的单位矢量．

证明 如果由拖带坐标系$\{\boldsymbol{g}_i\}$描述的位形作为基准态，根据定理2的证明，可求出：

$$\dot{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\}=\lim_{\theta\to 0}\left\{\frac{\partial \boldsymbol{I}}{\partial t}\sin\theta+\boldsymbol{I}\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\}=\boldsymbol{I}\dot{\theta} \tag{2.14}$$

$\dot{\theta}$的几何意义显然是非常清楚的和合理的．

从定理2，可知

$$L^i_j\dot{\theta}=\frac{1}{2}(v^i\|_j-v^i\|^T_j) \tag{2.15}$$

其中 L^i_j是平均正旋的旋转张量．那么，$\boldsymbol{I}\dot{\theta}$可由下式来确定：

$$\boldsymbol{I}\dot{\theta}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{L}\dot{\theta}=\frac{1}{2}\varepsilon^{knp}g_{mn}L^m_k\dot{\theta}\,\boldsymbol{g}_k=\frac{1}{2}\varepsilon^{knp}v_n\|_k\boldsymbol{g}_p$$

$$=\frac{1}{2}\nabla\times\boldsymbol{v} \tag{2.16}$$

这里$\boldsymbol{\varepsilon}$是 Eddington 张量．

三、非局部场论的基本定律

经典连续体力学是由分析方法来建立的．分析方法是基于这样的假设：一个运动物体所遵循的守恒定律同样适合于物体中任意无限小体积元．对物体的其余部分对此体积元的作用仅简化为表面作用．但是，非局部连续场论从原子晶格间相互作用的长程效应出发，描述物体的运动，考虑总体效应和局部效应的差异．因此，局部性公理不再适用，而是采用具有晶格长程效应为特征的有限邻域公理．采用总体化的公理系统建立非局部连续介质力学理论[8]．

物体在运动的每一瞬时t占据欧氏空间为V，其表面为S．在每一瞬时t，运动的物体都应满足总体的守恒定律．

质量 $\frac{d}{dt}\int_V\rho d\Omega=0$ (3.1)

动量 $\frac{d}{dt}\int_V\rho\boldsymbol{V}d\Omega-\int_V\rho\boldsymbol{f}d\Omega-\int_s\boldsymbol{t}^k da_k=0$ (3.2)

角动量 $\frac{d}{dt}\int_V\rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{V})d\Omega-\int_s\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{t}^k da_k-\int_V\rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}-\boldsymbol{C})d\Omega=0$ (3.3)

能量 $$\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}+U\right)\rho d\Omega-\int_V \boldsymbol{t}_n\cdot\boldsymbol{V}dS$$

$$-\int_V \rho\left(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}\boldsymbol{C}\cdot\nabla\times\boldsymbol{V}\right)d\Omega=0 \tag{3.4}$$

式中，ρ是质量密度，U是内能密度，$\boldsymbol{f}$是体力密度，$\boldsymbol{t}^k$是应力矢量，$\boldsymbol{C}$是体力矩矢量．

我们将(3.1)～(3.4)式进行局部化处理．首先，将各面积分项经 Green-Gauss 定理转换为体积分，在积分号外的微分转换到积分号内，再由拖带坐标系中的特有的性质．我们得到局部形式的守恒定律．

质量 $$\hat{\rho}=\dot{\rho}+\rho V^m\|_m,\quad \int_V\hat{\rho}d\Omega=0 \tag{3.5}$$

动量 $$\rho\dot{\boldsymbol{V}}+\hat{\rho}\boldsymbol{V}-\rho\boldsymbol{f}-\boldsymbol{t}^k_{,k}=\rho\hat{\boldsymbol{F}},\quad\int_V\rho\hat{\boldsymbol{F}}d\Omega=0 \tag{3.6}$$

角动量 $$\rho\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}}-\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{t}^k-\rho\boldsymbol{C}=\rho\hat{\boldsymbol{N}},\quad\int_V\rho\hat{\boldsymbol{N}}d\Omega=0 \tag{3.7}$$

能量 $$\rho\dot{U}=\hat{\rho}\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}+U\right)-\rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{V}+\boldsymbol{t}^k\cdot\boldsymbol{V}_{,k} \tag{3.8}$$

$$+\frac{1}{2}(\rho\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}}-\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{t}^k-\rho\hat{\boldsymbol{N}})\cdot\nabla\times\boldsymbol{V}+\rho\hat{h},\quad\int_V\rho\hat{h}d\Omega=0$$

式中 $\hat{\rho}$ 是非局部质量剩余，$\hat{\boldsymbol{F}}$是非局部体力剩余，$\hat{\boldsymbol{N}}$是非局部体力矩剩余，$\hat{h}$ 是非局部能量剩余．

Eringen 在专著中曾强调指出：在局部和非局部连续统之间的最大差异就是在后者中存在体积场和表面场剩余．确定这些剩余是非局部连续统物物理学的一个重要组成部分．这些剩余实质上描述了物体作为一个有机整体的联系，内部构造的特征．同时，它们又必须满足总体的守恒律，即：它们的总体效应为零．

我们注意到：应力张量可以分解为两部分，对称(s)和反对称部分(a)．亦即：

$$\boldsymbol{t}^k\boldsymbol{V}_{,k}={}^st^k_iS^i_k+{}^at^k_iL^i_k\dot{\theta} \tag{3.9}$$

式中 $${}^st^k_i=\frac{1}{2}(t^k_i+t^{kT}_i),\quad {}^at^k_i=\frac{1}{2}(t^k_i-t^{kT}_i)$$

$$\varepsilon^{knp}g_{mn}\dot{S}^m_k=\varepsilon^{knp}g_{mn}\frac{1}{2}(V^m\|_k+V^m\|^T_k)=0 \tag{3.10}$$

其次 $$\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{t}^k\cdot\nabla\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{g}_k\times t^{kl}\boldsymbol{g}_l\nabla\times\boldsymbol{V}=\varepsilon_{klq}t^{kl}\boldsymbol{g}^q2\cdot I^i\dot{\theta}\boldsymbol{g}_i \tag{3.11}$$

$$=2t^{kl}(\varepsilon_{kli}I^i)\dot{\theta}=2\,{}^at^k_iL^i_k\dot{\theta}$$

因此 $$\boldsymbol{t}^k\cdot\boldsymbol{V}_{,k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{g}_k\times\boldsymbol{t}^k\cdot\nabla\times\boldsymbol{V}={}^st^k_i\dot{S}^i_k \tag{3.12}$$

将(3.12)代入(3.8)，求出

$$\rho\dot{U}=\hat{\rho}\left(\frac{3}{2}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}+U\right)+{}^s\boldsymbol{t}:\dot{\boldsymbol{S}}-\rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{V}+\rho(\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}}-\hat{\boldsymbol{N}})\cdot\dot{\theta}+\rho\hat{h} \tag{3.13}$$

因为拓扑单元和外界之间没有质量的交换，$\hat{\rho}=0$．那么，

$$\rho\dot{U}={}^s\boldsymbol{t}:\dot{\boldsymbol{S}}-\rho\hat{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{V}+\rho(\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}}-\hat{\boldsymbol{N}})\cdot\dot{\theta}+\rho\hat{h} \tag{3.14}$$

从(3.7)式我们可以看到，影响应力非对称的因素是：外加体力矩 $\boldsymbol{C}$，非局部体力矩剩余$\hat{\boldsymbol{N}}$(或简称为非局部体力矩)，和非局部体力剩余$\hat{\boldsymbol{F}}$(或简称为非局部体)力．以前，人们还无法处理这些影响应力对称的非局部余量，只好假设：$\hat{\boldsymbol{N}}=\boldsymbol{r}\times\hat{\boldsymbol{F}}$．则当外加偶应力场$\boldsymbol{C}=0$，应力对称．事实上，上面的假设是不合适的．从(3.14)式，我们可以得到这样的结论：转动

对内能也具有贡献．转动的作用由非局部特征量来描述和由材料的微观结构来决定．因此，转动和非局部特征引起应力的非对称性．

四、非局部非对称弹性固体的本构关系

根据因果关系公理，非局部介质中一点的力学状态是由物体的所有点运动的泛函．若由拖带坐标系描述物体的运动，则位移梯度可由S-R分解定理得到应变张量S_j^i和正交张量R_j^i．而R_j^i描述微单元体的平均正旋．

根据能量守恒定律的特点．因此，我们可以选取原因有序集：

$$\boldsymbol{F}=\{\boldsymbol{S},\theta,\boldsymbol{r}\},\quad \boldsymbol{F}'=\{\boldsymbol{S}',\theta',\boldsymbol{r}'\} \tag{4.1}$$

式中：$\boldsymbol{S}'=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}',t)$，$\theta'=\theta(\boldsymbol{r}',t)$，$\boldsymbol{r}'$代表了物体中除$\boldsymbol{r}$之外所有物体点的空间位置矢量．

假定内能的本构泛函：$U=U(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$ (4.2)

则由同一性公理，应力$\boldsymbol{t}$，非局部体力$\boldsymbol{F}$，非局部体力矩$\hat{\boldsymbol{N}}$与内能U具有同样形式的泛函．

引入 Hilbert 内积空间$\boldsymbol{H}$．设$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$是两组不同的有序集，则内积为：

$$(\boldsymbol{F}_1,\ \boldsymbol{F}_2)_H=\int_V H(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{r}')d\Omega(\boldsymbol{r}') \tag{4.3}$$

和范数

$$\|\boldsymbol{F}\|=(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F})_H^{1/2} \tag{4.4}$$

式中 $H(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)$是$\boldsymbol{H}$的特征函数．在非局部场论中，$H(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)$是非局部衰减函数，是根据原子晶格之间相互作用的特征而确定．于是，本构泛函U可以看作是一个映射U：$\boldsymbol{H}\to R$，（R为实数域）．假设U是 Fréchet 可微，亦即：

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}'\|\to 0}|U(\boldsymbol{F}'+\boldsymbol{h}')-U(\boldsymbol{F}')-\delta U(\boldsymbol{F}'/\boldsymbol{h}')|=0;\qquad \boldsymbol{F}',\boldsymbol{h}'\in\boldsymbol{H} \tag{4.5}$$

并且 $\delta U(\boldsymbol{F}'/\boldsymbol{h}')$是$\boldsymbol{h}'$的线性连续泛函。根据 Fréchet-Riesz 表示定理，必存在唯一的元素$\delta U/\delta\boldsymbol{F}'\in\boldsymbol{H}$，

$$\delta U(\boldsymbol{F}'/\boldsymbol{h}')=(\delta U/\delta\boldsymbol{F}',\boldsymbol{h}')_H=\int_V\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'}(\boldsymbol{F}',\boldsymbol{r})\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}')d\Omega(\boldsymbol{r}') \tag{4.6}$$

对内能U求时间导数，$\boldsymbol{h}'=\boldsymbol{F}'(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}'(t)$

则

$$\begin{aligned}\rho\dot{U}&=\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\dot{\boldsymbol{F}}+\rho\delta U(\boldsymbol{F}'|\dot{\boldsymbol{F}}',\boldsymbol{F})\\&=\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\dot{\boldsymbol{F}}+\int_V\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'}\dot{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}')d\Omega(\boldsymbol{r}')\end{aligned} \tag{4.7}$$

为方便起见，改写上式为：

$$\left.\begin{aligned}\rho\dot{U}&=\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{F}'}\dot{\boldsymbol{F}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'}\right)^*\dot{\boldsymbol{F}}d\Omega(\boldsymbol{r}')+D\\D&=\int_V\left[\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'}\right)\dot{\boldsymbol{F}}'-\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{F}'}\right)^*\dot{\boldsymbol{F}}\right]d\Omega(\boldsymbol{r}')\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

其中："*"表示斜逆，即交换两个对等自变量的位置．例如：

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')^*=G(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{r}) \tag{4.9}$$

将(4.8)式代入(3.14)，可以得到

$$\left[\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{r}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta\boldsymbol{r}'}\right)^*d\Omega(\boldsymbol{r}')+\rho\hat{\boldsymbol{F}}\right]\cdot\dot{\boldsymbol{r}}+\left[\rho\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{S}'}\right.$$

$$+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{S}'}\right)^* d\Omega(\boldsymbol{r}')-\boldsymbol{t}^s\Big]:\boldsymbol{S}+\Big[\rho\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

$$+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{\theta}'}\right)^* d\Omega(\boldsymbol{r}')-\rho\hat{\boldsymbol{J}}\Big]\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}+D-\rho\hat{h}=0 \tag{4.10}$$

其中：$\hat{\boldsymbol{J}}=\mathbf{r}\times\hat{\boldsymbol{F}}-\hat{\boldsymbol{N}}$.

则上式是关于$\dot{\boldsymbol{F}}$的线性方程，对于任意运动都成立的充要条件：

$$\left.\begin{aligned}&\rho\hat{h}=D,\quad -\rho\hat{\boldsymbol{F}}=\rho\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{r}'}\right)^* d\Omega(\boldsymbol{r}')\\&\rho\hat{\boldsymbol{J}}=\rho\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{\theta}'}\right)^* d\Omega(\boldsymbol{r}')\\&\boldsymbol{t}^s=\rho\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{S}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{S}'}\right)^* d\Omega(\boldsymbol{r}')\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

这些方程是非局部非对称弹性介质的非线性本构关系。众所周知，本构泛函应满足伽俐略不变性。采用拖带坐标系描述的物体相关联的物理（如，ρ，U，$\boldsymbol{t}$，$\hat{\boldsymbol{F}}$ 和$\hat{\boldsymbol{N}}$）在给物体迭加一刚体运动时是不变的[6]。根据文献[1]的讨论，内能U必须满足：

$$\left.\begin{aligned}&\rho\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}+\int_V\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{r}'}d\Omega(\boldsymbol{r}')=0\\&\boldsymbol{r}\times\Big[\rho\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{r}'}\right)^* d\Omega(\boldsymbol{r}')\Big]+\Big[\rho\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\theta}}\\&\qquad+\int_V\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{\theta}'}\right)^* d\Omega(\boldsymbol{r}')\Big]\\&=-\int_V\Big[\boldsymbol{r}'\times\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{r}'}\right)-\boldsymbol{r}\times\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{r}'}\right)^*\Big]d\Omega(\boldsymbol{r}')\\&\qquad-\int_V\Big[\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{\theta}'}-\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{\theta}'}\right)^*\Big]d\Omega(\boldsymbol{r}')\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

因此，可以得到：

$$\left.\begin{aligned}&\rho\hat{\boldsymbol{F}}=\int_V\Big[\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{r}'}-\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{r}'}\right)^*\Big]d\Omega(\boldsymbol{r}')\\&\rho\hat{\boldsymbol{N}}=\int_V\Big[\boldsymbol{r}'\times\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{r}'}\right)-\boldsymbol{r}\times\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{r}'}\right)^*\Big]d\Omega(\boldsymbol{r}')\\&\qquad+\int_V\Big[\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{\theta}'}-\left(\rho\frac{\delta U}{\delta \boldsymbol{\theta}'}\right)^*\Big]d\Omega(\boldsymbol{r}')\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

至今，我们已建立了非局部非对称弹性固体在有限变形中的本构理论。

五、非局部非对称弹性力学的线性理论

当物体是处于小变形

$$\boldsymbol{g}_i\to\boldsymbol{g}_i^0 \tag{5.1}$$

当用一曲线坐标系描述变形物体的几何变形关系时，我们注意到：

$$\theta=\arcsin(-W_i^j W_j^i)^{1/2}=o(1) \tag{5.2}$$

那么，

$$S_j^i \doteq \frac{1}{2}(u^i|_j + u^i|_j^T), \quad R_j^i \doteq \delta_j^i + W_j^i = \delta_j^i + o(1) \tag{5.3}$$

无限小旋转张量由下式给出：

$$W_j^i = \frac{1}{2}(u^i|_j - u^i|_j^T) \tag{5.4}$$

在小变形条件下，和根据 Friedman 和 Katz[7] 给出的表示定理，U 可以由一个积分给出。亦即：

$$\rho U = \int_V u(\boldsymbol{S}, \ \boldsymbol{S}'; \ \theta, \ \theta'; \ \boldsymbol{r}', \ \boldsymbol{r}) d\Omega(\boldsymbol{r}') \tag{5.5}$$

对于均匀，各向同性的弹性固体，将(5.5)式代入(4.13)，可以得到：

$$\left.\begin{aligned} \rho\hat{\boldsymbol{N}} &= \int_V Y(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)(\theta'-\theta)d\Omega(\boldsymbol{r}') \\ \boldsymbol{t}^s &= \int_V \alpha(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)[\lambda \boldsymbol{I} \ \mathrm{tr}\boldsymbol{S}' + 2\mu \boldsymbol{S}']d(\boldsymbol{r}') \end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

因此，我们得到一组非局部部非对称弹性力学的线性理论的方程组。

$$\rho\dot{\boldsymbol{V}} - \rho \boldsymbol{f} - \boldsymbol{t}^k{}_{,k} = 0, \quad \boldsymbol{g}_k \times \boldsymbol{t}^k + \rho \boldsymbol{C} + \rho\hat{\boldsymbol{N}} = 0, \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}^s + \boldsymbol{t}^a \tag{5.7}$$

本构关系由(5.6)给出。

六、平 面 弹 性 波

在以上部分建立的非局部非对称弹性力学的物理基础在文献[1]中已经讨论。本文将讨论一维平面波的某些传播问题。

Eringen 将非局部弹性平面波的色散关系与点阵动力学中 von-Karman 模型给出的色散关系相同，经反演确定出非局部影响函数。而 von-karman 模型不考虑极化影响，得到方形晶体沿高对称方向传播的平面纵波和横波具有相似的色散关系。

$$\frac{W_T^2/k^2}{C_T^2} = \frac{W_L^2/k^2}{C_L^2} \tag{6.1}$$

式中：C_T，C_L 分别是经典场论中弹性波的横波和纵波波速。W_T，W_L 分别是一维平面横波和纵波的频率。

但是，方形晶体结构的铝AL的实测色散曲线如图1所示[8]。它们不具备(6.1)式的相似性。尤其在短波范围，这种差异尤为突出。而非局部影响函数$Y(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)$即可描述此差异。

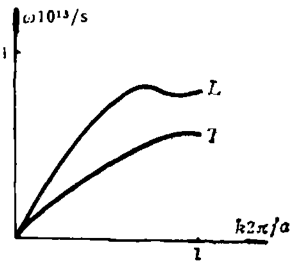

图 1

对平面纵波的描述，非局部非对称弹性场论同非局部 Eringen-Kröner 模型是相同的。因此，由点阵动力学给出的弹性平面纵波的色散关系来确定非局部影响函数 $\alpha(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)$，而非局部影响函数$Y(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)$由平面横波的运动给出。

在笛卡尔坐标系中，一维平面横波的位移矢量：

$$\boldsymbol{u} = [0, u_2(x_1), 0] \tag{6.2}$$

运动方程为：

$$\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial t_{12}}{\partial x_1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\alpha(|x_1-x_1'|)\mu - \frac{1}{4}Y(|x_1-x_1'|)\right\}\frac{\partial^2 u_2(x_1',t)}{\partial x_1'^2}dx_1' \tag{6.3}$$

在(6.3)式，对x_1和t作 Fourier 变换：

$$\rho W_t^2\bar{u}_2(k,W_t)=\sqrt{2\pi}\left[\bar{\alpha}(k)-\frac{1}{4\mu}\bar{Y}(k)\right]k^2\bar{u}_2(k,W_t) \tag{6.4}$$

整理得

$$C_t^2/C_T^2=\sqrt{2\pi}\left[\bar{\alpha}(k)-\frac{1}{4\mu}\bar{Y}(k)\right] \tag{6.5}$$

式中 $C_t^2=W_t^2/k^2$，$C_T^2=\mu/\rho$。

$$\bar{u}_2(k,W_t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u_2(x_1,t)\exp[i(W_tt+kx_1)]dx_1dt$$

$$\bar{\alpha}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(|x_1|)\exp[ikx_1]dx_1$$

$$\bar{Y}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(|x_1|)\exp[ikx_1]dx_1$$

由前述可知，$\bar{\alpha}(k)$可以由一维纵波的色散关系给出。

$$\bar{\alpha}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}C_l^2/C_L^2 \tag{6.6}$$

式中，$C_l^2=W_l^2/k^2$，$C_L^2=(\lambda+\mu)/\rho$。W_l是一维纵波的频率。于是，我们得到：

$$\frac{C_t^2}{C_T^2}-\frac{C_l^2}{C_L^2}=-\frac{\sqrt{2\pi}}{4\mu}\bar{Y}(k) \tag{6.7}$$

亦即，$\bar{Y}(k)$描述了平面纵波和平面横波色散关系的不相似性。如果材料中不存在共价键，即在材料中不存在极化特性。则$\bar{Y}(k)=0$，$\rho\hat{N}=0$,非对称性消失；即得到非局部Eringen-Kröner 模型。当晶格常数$a\to 0$，$C_t^2\to C_T^2$和$C_l^2\to C_L^2$，于是有$\bar{Y}(k)=0$。非局部-非对称性质消失。

综上所述，上述选择的$Y(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)$必须满足：

i) $\int_V Y(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)d\Omega(\boldsymbol{r}')=0$,

ii) 当$a\to 0$时，$Y(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)\to 0$,

iii) 当$|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|\to+\infty$，$Y(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)\to 0$.

和$Y(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)$由材料的微结构确定。

平面纵波和横波色散关系的非相似性表示了材料中微观结构的极化效应。例如，根据铝的实测的色散曲线，我们可以选择：

$$\frac{C_l^2}{C_L^2}=\frac{\sin^2(ka/2)}{(ka/2)^2}\left[1+\frac{\gamma}{4\mu}\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right] \tag{6.8}$$

$$\frac{C_t^2}{C_T^2}=\frac{\sin^2(ka/2)}{(ka/2)^2} \tag{6.9}$$

于是有：

$$\sqrt{2\pi}\,\bar{Y}(k)=\gamma\left[\frac{\sin^2(ka/2)}{(ka/2)^2}-\frac{\sin^2(ka)}{(ka)^2}\right] \tag{6.10}$$

由比较图2所示的色散曲线和实测的铝的色散曲线，我们可以选择$\gamma=2\mu$。

对(6.8)和(6.9)式做 Fourier 逆变换，

$$\alpha(|x_1|)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{\gamma}{4\mu}\right)\dfrac{1}{a^2}(a-|x_1|)-\dfrac{\gamma}{4\mu}\cdot\dfrac{1}{4a^2}(2a-|x_1|), & |x_1|<a.\\ \dfrac{1}{4a^2}(|x_1|-2a), & a<|x_1|<2a.\\ 0, & |x_1|>2a\end{cases}$$

$$Y(|x_1|)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\left(1-\dfrac{3|x_1|}{2a}\right), & |x_1|<a\\ \dfrac{1}{4a^2}(|x_1|-2a), & a<|x_1|<2a\\ 0, & |x_1|>2a\end{cases}$$

其函数$\alpha(|x_1|)$，$Y(|x_1|)$的图形如图3所示。

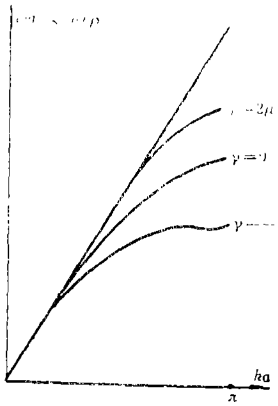

图 2

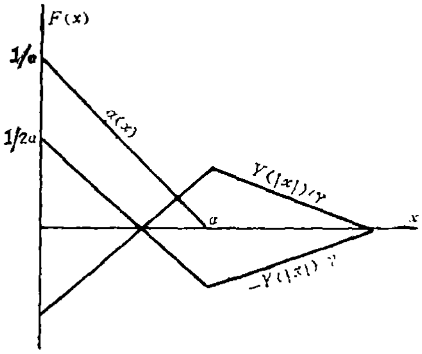

图 3

七、结　论

本文建立的非局部非对称弹性力学是一种由非局部作用产生的体力矩理论。证明了Voigt最初的设想。应力的非对称性是由体力矩产生的；即是说，由材料中微观结构的共价键的作用所产生的。非局部非对称弹性力学无疑由对非对称弹性力学和非局部理论的重要发展。

参 考 文 献

[1] 高键，非局部非对称弹性固体的线性理论，中国矿业大学北京研究生部博士论文，北京 (1988)，14.

[2] Kunin, I. A., *Elastic Media with Microstructure* Ⅱ, Springer-Verlag, Berlin (1983).

[3] Eringen, A. C., *Continuum Physics*, Vol. Ⅰ～Ⅳ, Academic Press, New York (1976)

[4] 陈至达，《有理力学》，中国矿业大学出版社，徐州 (1986).
[5] 陈至达，论连续体力学非线性场论中有限转动的表现，应用数学和力学，7 (11)(1986), 959.
[6] Mason, J. M., *Variational, Incremental and Energy Methods in Solids Mechanics and Shell Theory*, Amsterdam, Oxford, New York (1980).
[7] Friedman and Katz, A Representation theorem for additive functional, *Arch. Ratl. Mech. Anal.*, **21** (1966), 49.
[8] Omar, M. A., 《固体物理学基础》，北京师范大学出版社，北京 (1986).

Theory of Nonlocal Asymmetric Elastic Solids

Gao Jian
(Shandong Polytechnic University, Ji'nan)

Chen Zhi-da
(China University of Mining, Graduate School, Beijing)

Abstract

In this paper, a nonlinear theory of nonlocal asymmetric elastic solids is developed on the basis of basic theories of nonlocal continuum field theory and nonlinear continuum mechanics. It perfects and expands the nonlocal elastic field theory developed by Eringen and others. The linear theory of nonlocal asymmetric elasticity developed in [1] expands to the finite deformation. It is shown that there is the nonlocal body moment in the nonlocal elastic solids. The nonlocal body moment causes the stress asymmetric and itself is caused by the covalent bond formed by the reaction between atoms. The theory developed in this paper is applied to explain reasonably that curves of dispersion relation of one-dimensional plane longitudinal waves are not similar to those of transverse waves.

Key words non-symmetrical stress, nonlocal theory, body couple stress