

包含极值点和分枝点的解曲线 跟踪算法的摄动解法

吴 怡 任文敏 张 维

(北京核工程研究设计院) (清华大学)

(陈大鹏推荐, 1990年7月6收到)

摘 要

本文提出了采用摄动格式求解非线性方程组的解曲线跟踪算法的计算格式。文中着重讨论了解曲线上非正则点的搜索, 以及从这些非正则点——转向点或分枝点——继续跟踪超临界平衡路径的计算方法。文中把这一算法应用于弹性薄壳的屈曲分析。通过柱壳和环壳的算例得到它们的整个屈曲过程的平衡路径和变形形态。

关键词 解曲线跟踪算法 摄动 极值点 分枝点 薄壳屈曲

一、前 言

对于一个描述力学系统的非线性方程组

$$G(u, \lambda) = 0, \quad u \in R^n, \quad \lambda \in R, \quad G: R^n \times R \rightarrow R^n \quad (1.1)$$

我们要求解力学系统的反应 u (例如位移)对于参数 λ (例如加载参数)的关系, 得到 $n+1$ 维空间上的一条解曲线, 或称平衡路径。通常对于形如(1.1)的正则非线性方程, 可以采用增量方法, 逐步跟踪整个平衡路径。但对于一般的非线性问题, 在解曲线上会遇到一类非正则点——转向点或分枝点, 如图1所示。这些非正则点的存在, 是由于(1.1)的非线性性质所导致的。它们描述了力学系统的一些重要特征。例如在结构的稳定性分析中, 它们表示了结构极值型或分枝型屈曲的临界状态。本文采用统一的摄动方法, 讨论求解解曲线, 包括寻找临界点, 通过临界点进入超临界平衡路径的算法。这种算法可以称之为解曲线跟踪算法。文中以弹性薄壳屈曲为例, 计算得到了包括几何非线性和边界条件影响的前屈曲状态和后屈曲平衡路径。

下面是解曲线上三类点的定义^[1]:

对于方程(1.1), $u = u(s)$, $\lambda = \lambda(s)$, 其中 s 是曲线参数。

1) 若 $\text{rank}(G_u(s^0))=n$, s^0 是正则点. (1.2)
 设 $X=(u, \lambda)$, $Y=X \setminus x_i \in R^n$

2) 若 i) $\dim N(G_Y(s^0)) \geq 1$
 ii) $G_{x_i}(s^0) \notin R(G_Y(s^0))$
 则 s^0 是转向点. 当 $x_i = \lambda$ 时, 称作极值点 (1.3)

3) 若 i) $\dim N(G_u(S^0)) \geq 1$
 ii) $G_\lambda(s^0) \notin R(G_u(S^0))$
 则 s^0 是分枝点. (1.4)

其中 G_u, G_λ 等是算子的 Frechet 导数. N 表示算子的零空间, R 表示算子的值域.

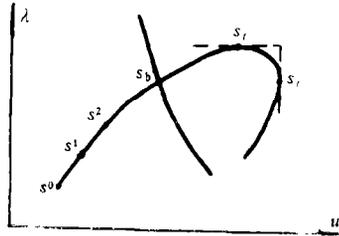


图 1 非线性方程解曲线

二、摄动方程

对于一般形式的方程(1.1), 应首先展开成关于变量的 Taylor 级数形式, 取前有限项. 对于几何非线性弹性薄壳方程, 在保守荷载下, 通过离散方法可以得到如下完全形式的平衡方程

$$K_{ij} *u_j + K_{ijk} *u_j *u_k + K_{ijkl} *u_j *u_k *u_l - *lambda f_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \tag{2.1}$$

式中对于重复下标采用求和约定. 不失一般性, 下文直接对于方程(2.1)的形式进行讨论.

在某个加载步上, 已知初状态 $(*u^0, \lambda^0)$

$$\begin{aligned} *u &= *u^0 + *u \\ *lambda &= lambda^0 + lambda \end{aligned} \tag{2.2}$$

代入列(2.1)式中, 得到关于增量 $(*u, \lambda)$ 的方程

$$G_i^0 + K_{ij} *u_j + K_{ijk}^* *u_j *u_k + K_{ijkl} *u_j *u_k *u_l - lambda f_i = 0 \tag{2.3}$$

其中

$$\begin{aligned} G_i^0(*u^0) &= K_{ij} u_j^0 + K_{ijk} u_j^0 u_k^0 + K_{ijkl} u_j^0 u_k^0 u_l^0 - \lambda^0 f_i \\ K_{ij}(*u^0) &= K_{ij} + (K_{ijk} + K_{ikj}) u_k^0 + (K_{ijkl} + K_{ilkj} \\ &\quad + K_{ikjl}) u_k^0 u_l^0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$K_{ijk}^0(*u^0) = K_{ijk} + (K_{ijkl} + K_{ilkj} + K_{ikjl}) u_l^0$$

$(*u^0, \lambda^0)$ 是解曲线上的点, 故 $G_i^0 = 0$.

设解的形式

$$*u = \sum_{i=1} \epsilon^i *u^i, \quad \lambda = \sum_{i=1} \epsilon^i \lambda^i \tag{2.5}$$

ϵ 是摄动参数. 在摄动解中它也是解曲线的曲线参数. 代入(2.5)于(2.3)中, 收集 ϵ 的同次幂, 得到各阶摄动方程

$$*K_i *u^1 = \lambda^1 *f \tag{2.6a}$$

$$*K_i *u^i = \lambda^i *f + *q^i(*u^1, \dots, *u^{i-1}) \quad (i \geq 2) \tag{2.6b}$$

$*q^i$ 是 i 阶摄动荷载, 由低阶摄动解的非线性组合构成. 它的前四阶形式如下:

$$q_i^1(*u^1) = -K_{ijk}^* u_j^1 u_k^1$$

$$\begin{aligned}
 q_i^3(*u^1, *u^2) &= -K_{ijk}^*(u_j^1 u_k^2 + u_j^2 u_k^1) - K_{ijkl} u_j^1 u_k^1 u_l^1 \\
 q_i^4(*u^1, *u^2, *u^3) &= -K_{ijk}^*(u_j^1 u_k^3 + u_j^3 u_k^2 + u_j^2 u_k^1) \\
 &\quad - K_{ijkl}(u_j^1 u_k^2 u_l^2 + u_j^2 u_k^2 u_l^1 + u_j^1 u_k^1 u_l^1)
 \end{aligned} \quad (2.6c)$$

三、正则点上的解

与 (1.2) 等价的条件是 $*K_i$ 非奇异。这时 (2.6a), (2.6b) 构成一个正则摄动问题, 可以依次求得各阶摄动解。由摄动参数的选择可以区分为荷载摄动法和位移摄动法。

(一) 荷载摄动法

设 $\varepsilon = \lambda$, 则 $\lambda^1 = 1$, $\lambda^i = 0 (\lambda \geq 2)$, 摄动方程形式:

$$\begin{aligned}
 *K_i *u^1 &= *f \\
 *K_i *u^i &= *q^i(*u^1, \dots, *u^{i-1})
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

解

$$*u = \sum_{i=1} \lambda^i *u^i \quad (3.2)$$

(二) 位移摄动法

指定位移分量的某个线性组合为摄动参数, 即给定向量 $*\alpha$, 设 $\varepsilon = *\alpha \cdot *u$
首阶摄动方程

$$*K_i *u^1 = \lambda^1 *f \quad (3.3)$$

$$*\alpha \cdot *u^1 = 1$$

$$\text{解出 } *v = *K_i^{-1} *f, \text{ 则 } \lambda^1 = \frac{1}{*\alpha \cdot *v}, *u^1 = \lambda^1 *v \quad (3.4)$$

高阶摄动方程

$$*K_i *u^i = \lambda^i *f + *q^i(*u^1, \dots, *u^{i-1}) \quad (i \geq 2) \quad (3.5)$$

$$*\alpha \cdot *u^i = 0$$

$$\text{解出 } *w = *K_i^{-1} *q^i, \text{ 则 } \lambda^i = -\frac{*\alpha \cdot *w^i}{*\alpha \cdot *v}, *u^i = \lambda^i *v + *w^i \quad (3.6)$$

位移摄动参数最简单常用的选择是选取某个分量 v_i , 使 $\varepsilon = \max_i |v_i|$ 。

四、临界点

临界点 (非正则点) s^0 的判据是, 在 s^0 点的 $*K_i$ 奇异。在已经求到的解曲线域 $(0, *\varepsilon)$ 上,

$$*u = *u^0 + \sum_{r=1} \varepsilon^r *u^r \quad (4.1)$$

$$\lambda = \lambda^0 + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r \lambda^r$$

要求 $\varepsilon_0, \varepsilon_c \in (0, \varepsilon)$, 使 $*K_t(\varepsilon_0)$ 奇异.

$$\begin{aligned} *K_c^0 &= *K_t(\varepsilon_0) = *K_c^0(*u^0) + \varepsilon_c *K_c^1(*u^0, *u^1) \\ &\quad + \varepsilon_c^2 *K_c^2(*u^0, *u^1, *u^2) + \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中

$$\begin{aligned} K_{c\,ij}^0 &= K_{ij}(*u^0) \\ K_{c\,ij}^1 &= (K_{ijk} + K_{ikj})u_h^1 + (K_{ijkl} + K_{ilkj} + K_{ikjl}) \\ &\quad \cdot (u_h^0 u_i^1 + u_h^1 u_i^0) \\ K_{c\,ij}^2 &= (K_{ijk} + K_{ikj})u_h^2 + (K_{ijkl} + K_{ilkj} + K_{ikjl})(u_h^0 u_i^2 \\ &\quad + u_h^1 u_i^1 + u_h^2 u_i^0) \\ &\dots \end{aligned}$$

要使 $*K_c^0$ 奇异, 需要求解一个广义特征值问题

$$*K_c^0 *x_c = 0 \quad (4.3a)$$

$$\text{即} \quad (*K_c^0 + \varepsilon_c *K_c^1 + \varepsilon_c^2 *K_c^2 + \dots) *x_c = 0 \quad (4.3b)$$

具体的求解方法可参阅[2, 3], 从临界点继续追踪超临界平衡路径, 要用到特征向量 $*x_0$.

对于非正则点, 由Fredholm定理可以得到与(1.3), (1.4)等价的下述条件.

由于 $*K_c^0$ 对称, 与(1.3ii)等价的条件

$$*x_0 \cdot *f \neq 0 \quad (4.4)$$

与(1.4ii)等价的条件

$$*x_0 \cdot *f = 0 \quad (4.5)$$

五、极值点上的摄动解

当临界点 S^0 是一个极值点时, (1.3)和(4.4)的条件成立. 从极值点计算超临界平衡路径, 只能采用位移摄动法.

对于首阶摄动方程

$$\begin{aligned} *K_c^0 *u^1 &= \lambda^1 *f \\ *a \cdot *u^1 &= 1 \end{aligned} \quad (5.1)$$

由条件(1.3)得到

$$\lambda^1 = 0, \quad u^1 = \beta_1 *x_c, \quad \beta_1 = \frac{1}{*a \cdot *x_c} \quad (5.2)$$

对于高阶摄动方程

$$*K_c^0 \cdot *u^t = \lambda^t *f + *q^t \quad (5.3a)$$

$$*a \cdot *u^t = 0 \quad (5.3b)$$

由Fredholm条件, 方程特解存在的条件为

$$*x_0 \cdot (\lambda^1 *f + *q^t) = 0$$

注意条件(4.4), 可以得到

$$\lambda^t = - \frac{*x_0 \cdot *q^t}{*x_0 \cdot *f} \quad (5.4)$$

在得到满足(5.3a)的特解 $*v^t$ 后,

$$*u^t = \beta_t *x_c + *v^t, \quad \beta_t = - \frac{*a \cdot *v^t}{*a \cdot *x_c} \quad (5.5)$$

应该提到的是, 摄动算法实质是用一段 ϵ 的高次曲线去逼近 s^0 附近的解曲线段. 在接近极值点的 s^0 上, 采用摄动算法可以直接跨越极值点, 给出包含极值点的解曲线段. 如图 2 所示. 只是在极值点附近, $*K_i$ 附近奇异, 采取较小的 ϵ 步长和必要的补偿措施, 可以顺利地越过极值点进入超临界平衡路径.

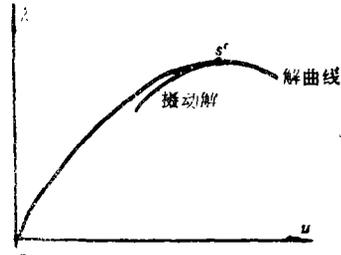


图2 极值点附近的摄动解

六、分枝点上的摄动解

当临界点 s^0 是一个分枝点时, (1.4) 和 (4.5) 的条件成立. 为了简单和实际应用的目的, 本文只讨论单分枝问题, 即在分枝点上有两条相交的平衡路径. 跟踪分枝后路径, 可以有下述两类算法.

(一) 第一类算法

这种算法是从分枝点求两条分枝后路径的方向, 从而选择进入其中一枝分枝路径.

1. 首阶摄动解

$$*K_i^0 \cdot *u^1 = \lambda^1 *f$$

由条件 (1.4), 存在解 $*v$ 满足

$$*K_i^0 \cdot *v = *f$$

则

$$*u^1 = \lambda^1 *v + \beta_1 *x_c \tag{6.1}$$

这里引入一个双线性算子 $*q$, 定义

$$q_i(*X, *Y) = -K_{i,j,k}^*(X_j Y_k + X_k Y_j) \tag{6.2}$$

由 (2.6c) 诸式可以得到

$$*q^2(\alpha *x + \beta *Y) = \alpha^2 *q^2(*X) + \beta^2 *q^2(*Y) + \alpha\beta *q(*X, *Y) \tag{6.3}$$

$$*q^r(*u^1, \dots, *u^{r-1} + *u) = *q^r(*u^1, \dots, *u^{r-1}) + *q(*u^1, *u) \quad (r > 2)$$

由二阶摄动方程的可解性条件, 并注意 (4.5)

$$*x_c \cdot *q^2(\lambda^1 *v + \beta_1 *x_c) = 0$$

得到关于 λ^1 和 β_1 的二次齐次方程

$$a_2 \beta_1^2 + a_1 \beta_1 (\lambda^1) + a_0 (\lambda^1)^2 = 0 \tag{6.4}$$

式中

$$a_2 = *x_c \cdot *q^2(*x_c)$$

$$a_1 = *x_c \cdot *q(*x_c, *v)$$

$$a_0 = *x_c \cdot *q^2(*v)$$

补充摄动条件 $*\alpha \cdot *u^1 = 1$ 得到

$$b_1 \lambda^1 + b_2 \beta_1 - 1 = 0 \tag{6.5}$$

式中

$$b_1 = *\alpha \cdot *v$$

$$b_2 = *\alpha \cdot *x_c$$

从 (6.4), (6.5) 可以解出 λ^1 和 β_1 , 得到首阶摄动解, [4] 中证明了, 对于自伴算子 $*K_i^0$,

(6.4)的判别式 $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ 是简单分枝(两条相交解曲线)点的充要条件,因此方程的解存在。 $\Delta = 0$ 对应于非简单分枝点。图3表示了这样的一种情况。 $\Delta < 0$ 是不可能的,因为解曲线不能没有实切线方向。因此对于简单分枝点,可以解出两组 (λ^i, β_i) ,取定一组解后,通过后续计算跟踪其中的一枝路径。

2. 高阶摄动解

$$*K_i^c \cdot *u^i = \lambda^i *f + *q^i(*u^1, \dots, *u^{i-1}) \quad (i \geq 2)$$

在求解 $i-1$ 阶方程时,已满足了 i 阶方程的Fredholm条件,因此存在解 $*w^i$ 满足

$$*K_i^c \cdot *w^i = *q^i(*u^1, \dots, *u^{i-1})$$

则 $*u^i = \lambda^i *v + \beta_i *x_0 + *w^i$ (6.6)

考虑 $i+1$ 阶方程的Fredholm条件和摄动条件得到关于 λ^i 和 β_i 的线性方程

$$a_1 \lambda^i + a_2 \beta_i + a_3 = 0 \quad (6.7)$$

其中

$$a_1 = *x_0 \cdot *q(*u^1, *v)$$

$$a_2 = *x_0 \cdot *q(*u^1, *x_0)$$

$$a_3 = *x_0 \cdot *q^{i+1}(*u^1, \dots, *u^{i-1}, *w^i)$$

$$b_1 \lambda^i + b_2 \beta_i + b_3 = 0 \quad (6.8)$$

其中 $b_1 = *\alpha \cdot *v$, $b_2 = *\alpha \cdot *x_0$, $b_3 = *\alpha \cdot *w^i$

高阶摄动解是唯一的。在选定首阶摄动解的一条分枝路径后,高阶解是对这条路径的非线性“修正”。

(二) 第二类算法

这种算法是首先求出一条解曲线(初曲线)在分枝点前后的路径,再计算一个过渡向量,从初曲线上的点对应到分枝曲线(次曲线)上。初曲线在分枝点上的解,可以从分枝点前的解外推到分枝点上。这种算法的几何表示如图4。

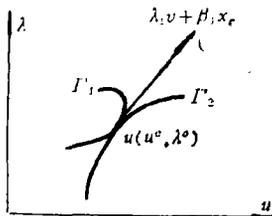


图3 非简单分枝点

设得到初曲线在分枝点上的解

$$*u_f = *u^0 + \sum_{i=1}^{\infty} e^i *u_f^i, \quad \lambda_f = \lambda^0 + \sum_{i=1}^{\infty} e^i \lambda_f^i \quad (6.9)$$

已满足

$$*K_i^c \cdot *u_f^i = \lambda_f^i *f \quad (6.10)$$

$$*K_i^c \cdot *u_f^i = \lambda_f^i *f + *q^i(*u_f^1, \dots, *u_f^{i-1})$$

设次曲线解为

$$*u_o = *u_f + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma^i *u^i, \quad \lambda_o = \lambda_f \quad (6.11)$$

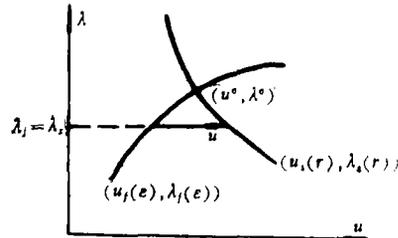


图4 分枝路径的第二类算法

其中 γ 是新设的摄动参数, 两条路径的摄动参数建立如下关系

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^k \gamma^i \varepsilon_i \quad (6.12)$$

从(6.9), (6.11)和(6.12)得到

$$*u_s = *u^0 + \sum_{k=1}^k \gamma^k *u^k + \sum_{k=1}^k \gamma^k \left(\sum_{j=1}^k C_{kj} *u_j^i \right) \quad (6.13)$$

$$\lambda_s = \lambda^0 + \sum_{k=1}^k \gamma^k \left(\sum_{j=1}^k C_{kj} \lambda_j^i \right)$$

(6.13)式前4阶系数 C_{kj} 如下

$$C_{11} = \varepsilon_1$$

$$C_{21} = \varepsilon_2, \quad C_{22} = \varepsilon_1^2$$

$$C_{31} = \varepsilon_3, \quad C_{32} = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2, \quad C_{33} = \varepsilon_1^3$$

$$C_{41} = \varepsilon_4, \quad C_{42} = 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2^2, \quad C_{43} = 3\varepsilon_1^2 \varepsilon_2, \quad C_{44} = \varepsilon_1^4$$

(1) 首阶摄动解

$$*K_i^e (*u^1 + \varepsilon_1 *u_j^1) = \varepsilon_1 \lambda_j^i *f$$

考虑(6.10)得到 $*K_i^e \cdot *u^1 = 0$ (6.14)

再从摄动条件 $*u^1 = \beta_1 *x_0, \quad \beta_1 = \frac{1}{*\alpha \cdot *x_0}$ (6.15)

(2) 二阶摄动解

$$*K_i^e (*u^2 + \varepsilon_2 *u_j^1 + \varepsilon_1^2 *u_j^2) = (\varepsilon_2 \lambda_j^1 + \varepsilon_1^2 \lambda_j^2) *f + *Q^2 (*u^1 + \varepsilon_1 *u_j^1)$$

用(6.3)和(6.10)化简后,

$$*K_i^e \cdot *u^2 = \varepsilon_1 *Q (*u_j^1, *u^1) + *Q^2 (*u^1) \quad (6.16)$$

考虑Fredholm条件

$$\varepsilon_1 = - \frac{*x_0 \cdot *Q^2 (*u^1)}{*x_0 \cdot *Q (*u_j^1, *u^1)} \quad (6.17)$$

可以得到(6.16)的一个特解 $*w^2$, 再考虑摄动条件得到

$$*u^2 = \beta_2 *x_0 + *w^2, \quad \beta_2 = - \frac{*x_0 \cdot *w^2}{*\alpha \cdot *x_0} \quad (6.18)$$

至此, 得到次曲线上的一阶解

$$\lambda_s^1 = \varepsilon_1 \lambda_j^1, \quad *u_s^1 = *u^1 + \varepsilon_1 *u_j^1 \quad (6.19)$$

(3) 高阶摄动解

$$*K_i^e \left(*u^k + \sum_{j=1}^k C_{kj} *u_j^i \right) = \sum_{j=1}^k C_{kj} \lambda_j^i *f + *Q^k (*u_s^1, \dots, *u_s^{k-1})$$

用(6.3)和(6.10)化简后

$$*K_i^e \cdot *u^k = \varepsilon_{k-1} *Q (*u_j^1, *u^1) + *Q^k (*u_j^1, \dots, *u_j^{k-1}, *u_s^1, \dots, *u_s^{k-2}, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-2}) \quad (k \geq 3) \quad (6.20)$$

其中 $*Q^k = *Q^k (*u_s^1, \dots, *u_s^{k-2}, *u_s^{k-1} - \varepsilon_{k-1} *u_j^1) - (C_{k2} - 2\varepsilon_1 \varepsilon_{k-1}) *Q^2 (*u_j^1)$

$$- \sum_{j=3}^k C_{kj} *Q^j (*u_j^1, \dots, *u_j^{j-1}) \quad \text{不含 } \varepsilon_{k-1}$$

由Fredholm条件

$$\varepsilon_{k-1} = - \frac{*\alpha_c \cdot *Q^k}{*\alpha_c \cdot *q (*u_j^k, *u^1)} \quad (6.21)$$

可以得到(6.20)的一个解 $*w^k$ ，再考虑摄动条件

$$*u^k = \beta_k *x_c + w^k, \quad \beta_k = - \frac{*\alpha \cdot *w^k}{*\alpha \cdot *x_c} \quad (6.22)$$

至此，得到次曲线上的 $k-1$ 阶摄动解

$$\lambda_i^{k-1} = \sum_{j=1}^{k-1} C_{(k-1)j} \lambda_j^i, \quad *u_i^{k-1} = *u_i^{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} C_{(k-1)j} *u_j^i \quad (6.23)$$

七、算例与讨论

以上给出了采用摄动格式的解曲线跟踪算法，重点讨论从分枝点跟踪超临界状态的方法。下面应用上述算法计算弹性薄壳屈曲的例。采用[5]中提出的薄壳中、小转动的非线性变形关系，从虚功方程经过离散后，可以得到形如(2.1)的非线性方程组。其中 $*u$ 表示节点参数， $*\lambda$ 表示保守荷载的加载参数。运用解曲线跟踪算法可以得到非线性的前屈曲平衡路径，临界状态和后屈曲平衡路径，从而完整地模拟薄壳屈曲的物理过程。

(一) 轴压下柱壳的屈曲

柱壳的几何物理参数

半径 $R=1.0\text{cm}$

长度 $L=7.19\text{cm}$

厚度 $h=0.0247\text{cm}$

弹性模量 $E=5.67 \times 10^4 \times 9.8\text{N/cm}^2$

泊松比 $\nu=0.3$

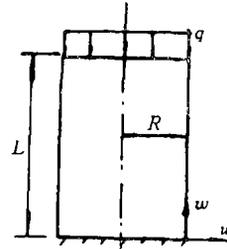


图5 轴压下柱壳

如图5.柱壳下端固定，上端承受均匀压力。对于轴对称位移分量，上端采用滑动边界条件，对非轴对称位移分量，采用固支条件。

图6给出了计算得到的加载平衡路径。C点是分枝点。在考虑了边界条件与几何非线性的影响后，临界压力值为 $1.975 \times 9.8\text{N/cm}$ ，是经典理论值($2.095 \times 9.8\text{N/cm}$)的94.3%。C-E-F是沿环向发生14个波的非轴对称后屈曲平衡路径。图7给出了初始后屈曲变形和F点后屈曲变形形态的位移等值线图，以及引自[6]的实验观察结果。

(二) 外压下环壳的屈曲

无量纲化的环壳几何物理参数如下(图8)

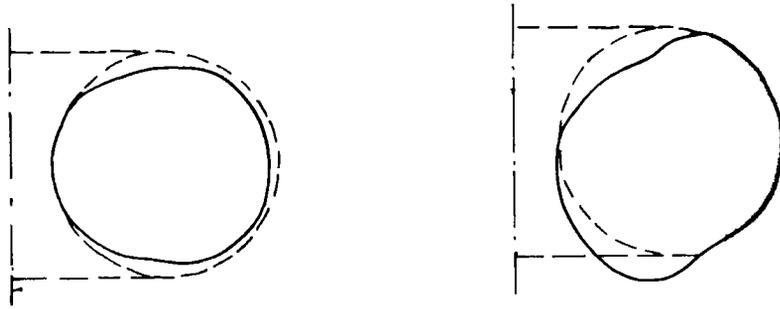
$R_0/a=2.0$

$h/a=0.01$

$\nu=0.3$

单位外压 $q_0/E=10^{-5}$

图9给出了轴对称变形的平衡路径。在临界点C，发生对于 $\varphi=90^\circ$ 中平面的反对称的分枝型屈曲。图10分别给出了对于中平面对称的屈曲前变形和反对称的屈曲后变形的形态。表



(a) A点变形形态(变形放大系数=10)

(b) E点变形形态(变形放大系数=0.5)

图 10

参 考 文 献

- [1] Keller, H., *Lecture on Nonlinear Method in Bifurcation Problems* (1987).
- [2] 高尔腊伊, A. and G. 瓦特桑, 矩阵特征值问题的计算方法 (1980).
- [3] 吴怡, 清华大学博士论文, 清华大学工程力学系 (1989).
- [4] 李庆杨, 白峰杉, 清华大学科学报告87—011, 清华大学应用数学系 (1987).
- [5] Sanders, J., *Quart. Appl. Math.*, 21 (1963), 21.
- [6] Yamaki, N., *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells* (1984).
- [7] Pakagiopoulous, G., *Int. J. Pres. Ves. and Piping*, 20 (1985), 87.
- [8] Sobel, L. and W. Flügge, *J. AIAA*, 5 (1967), 425.
- [9] Bushnell, D., *J. AIAA*, 5 (1967), 1455.
- [10] Jordan, P., *J. AIAA*, 11 (1973), 1439.

Perturbation Formulation of Continuation Method Including Limit and Bifurcation Points

Wu Yi

(Beijing Institute of Nuclear Engineering, Beijing)

Ren Wen-min Zhang Wei

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

This paper gives the perturbation formulation of continuation method for nonlinear equations. Emphasis is laid on the discussion of searching for the singular points on the equilibrium path and of tracing the paths over the limit or bifurcation points. The method is applied to buckling analysis of thin shells. The pre- and post-buckling equilibrium paths and deflections can be obtained, which are illustrated in examples of buckling analysis of cylindrical and toroidal shells.

Key words continuation method, perturbation, limit point, bifurcation point, thin shell buckling