应用数学和力学，第13卷第9期（1992年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

线弹性动力学的某些一般定理及广义与广义分区变分原理*

邢京堂　　郑兆昌

（北京航空航天大学）　（清华大学）

（1988年6月28日收到）

摘　要

从四维空间思想出发，在四种时端条件下，系统地推导得出了弹性动力学有关的一般定理，如：可能功作用量原理，虚位移原理，虚应力—动量原理，互易定理及由此导出的位移互等定理与始末时刻条件关系定理等；得出了线弹性动力学的位能作用量变分原理，余能作用量变分原理，动力问题的胡-鹫原理，H-R原理及本构关系变分原理。Hamilton原理，Toupin原理及有关文献如[5]、[17]～[24]的工作均可作为文中一般结果的特例。对应于有限元分析，在空间分区，时间分区及时空均分区情况，给出了动力学问题的分区位能作用量原理，分区余能作用量原理，分区混合能作用量原理及相应的分区广义变变分原理。导出了分区原理的一般形式。若去掉时间维及有关量，文中有关结果可转化为静力问题中有关的相应结果。

关键词　变分原理　弹性动力学　一般定理　四维域边值问题　动力学

一、引　　言

弹性静力问题的一般定理及变分原理已作了系统的研究和总结，在这方面国内力学工作者作了大量的工作[1]~[10]。但对弹性动力问题这方面的研究似乎并不充分。

动力问题的互易定理早为人们所讨论：1873年Rayleigh[11]对周期力情形运动的幅度及相位给出了一种互易关系。引入惯性力，套用贝蒂定理的动力问题的互易定理可见[1][2]。文献[12]～[15]讨论了一种卷积形式的互易定理。上述工作与文中所给互易定理有所不同。而[16]中工作是文中工作的特殊形式。

弹性动力学给定两时端条件的变分原理的研究大致如下：分析力学中著名的哈密顿原理以几何上相容的位移来描述系统的状态，变分中要求t_1，t_2时端的位移变分为零，通常视其为位能型；Toupin[17]，Crandall[18]将系统状态用满足动力平衡的动态冲量来描述，变分中要求t_1，t_2时刻动量变分为零，得出了对应Hamilton原理的余能原理。Green和Zerna[19]给

* 本文有关部分曾收入中美有限元讨论会文集，中国承德，1986年6月2日～6日。
钱伟长推荐．博士点基金资助项目．

出了弹性动力学中的哈氏原理；Chen[20]推广Toupin工作到线动力问题.围绕要求t_1，t_2时刻位移变分为零的哈氏原理，Truesdell和Toupin[21]，Yu[22]，Barr[23]，Dean和Plass[24]等均作过研究，其目的无非是得出胡一鹫原理，H-R原理等的动力形式.Oden 和Reddy的专著[5]运用泛函分析的工具，对理性力学中一大类问题的变分原理作了统一描述，这是一个极其重要的工作。书中讨论了在t_1,t_2两端位移、动量全是零条件下线弹性动力题的变分原理，其中包括本构关系的变分原理。笔者在未发表的论文[27][28]中，从四维空间思想[5]出发，给出了时端t_1，t_2边界条件的合理提法，导出了弹性动力学的一系列一般定理和变分原理，使上述文献的工作可作为笔者结果的特例。本文的内容是上述工作的一部分。对于非线性动力问题，给定初始时刻位移和动量的始值问题等也讨论了一些同本文同样的有关问题。由于篇幅所限，这些结果，将在以后文章中发表。

二、基本定义与基本方程

文中引入下列定义：

1. 作用量

随时间t变化的量$f(t)$，在时间区间$[t_1,t_2]$内的积分

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \tag{2.1}$$

称其为量$f(t)$在区间$[t_1,t_2]$上的作用量。我们假定所讨论问题中，这个积分都是存在的。用量反映了随时间变化量对时间的累积效应。若$f(t)$是力，则I即为通常的力冲量，但这里并不限定$f(t)$是力。为了明确起见，文中将按$f(t)$名称称I为“某某作用量”。作用量一词借用于Hamilton原理。

2. 位能函数与余位能函数

文中假定弹性体是超弹性体，所受诸力均是有位力，存在有下列位能函数及余位能函数。它们分别由弹性体未变形静止状态到即时状态的下列积分来确定：

应变能密度函数

$$A(E_{ij})=\int_0^{E_{ij}} \sigma_{ij}dE_{ij} \tag{2.2a}$$

余应变能密度函数

$$A^*(E_{ij})=\int_0^{E_{ij}} E_{ij}d\sigma_{ij} \tag{2.2b}$$

动能密度函数

$$T(V_i)=\int_0^{V_i} P_idV_i \tag{2.2c}$$

余动能密度函数

$$T^*(P_i)=\int_0^{P_i} V_idP_i \tag{2.2d}$$

体力位

$$G(U_i)=\int_0^{U_i}-F_i dU_i \tag{2.2e}$$

体力余位

$$G^*(\bar{F}_i)=\int_0^{\bar{F}_i}-U_i dF_i \tag{2.2f}$$

面力位

$$g(U_i)=\int_0^{U_i}-T_i dU_i \tag{2.2g}$$

面力余位

$$g^*(\bar{T}_i)=\int_0^{\bar{T}_i}-U_i dT_i \tag{2.2h}$$

易得出，在位能函数与余位能函数之间有关系

$$\left.\begin{aligned}&A(E_{ij})+A^*(\sigma_{ij})=\sigma_{ij}E_{ij}\\&T(V_i)+T^*(P_i)=P_iV_i\\&G(U_i)+G^*(\bar{F}_i)=-\bar{F}_iU_i\\&g(U_i)+g^*(\bar{T}_i)=-\bar{T}_iU_i\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

对于通常死载荷情形，有

$$\left.\begin{aligned}&G(U_i)=-\bar{F}_iU_i,\ G^*(\bar{F}_i)=0\\&g(U_i)=-\bar{T}_iU_i,\ g^*(\bar{T}_i)=0\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

值得指出：(2.2)式中诸函数，不仅与所研究弹性体有关，而且与施力体有关。当所研究的力学系统确定后，我们假定它们都存在、尽管有时并不需明确知道它是什么形式。

3. 时端动量位作用量及其余位作用量U

假定对一静止弹性体，在 t_p 时刻作用一冲量为 $P_i(t_p)$ 的脉冲体力，应用狄拉克函数 $\Delta(t-t_p)$，此力可写为

$$F_i(x,t)=P_i(t_p)\Delta(t-t_p) \tag{2.5}$$

将此式代入动量方程(2.11)，并由 t_p^- 到 t_p^+ 积分，令 $t_p^-\to t_p^+$ 取极限得

$$P_i(x,t_p)=P_i(t_p) \tag{2.6}$$

因而，给定 t_p 时刻的动量 $P_i(t_p)$，物理上相当 t_p 时刻施加一脉冲体力。应用定义(2.1) (2.2)式，即可定义时端动量 $\bar{P}_i(t_p)$ 的作用量位及其余位。

时端动量位作用量：

$$\begin{aligned}\tilde{g}(U_i)&=\int_{t_p^-}^{t_p^+}\int_0^{U_i}-P_i(t_p)\Delta(t-t_p)dU_i dt\\&=-\int_0^{U_i}P_i(t_p)dU_i\end{aligned} \tag{2.7a}$$

时端动量余位作用量：

$$\tilde{g}^*(\bar{P}_i)=\int_{t_p^-}^{t_p^+}\int_0^{P_i}-U_i dP_i(t_p)\Delta(t-t_p)dt$$

$$=-\int_0^{\bar{P}_i} U_i dP_i \tag{2.7b}$$

二者变换关系为

$$\bar{g}(U_i)+\bar{g}^*(\bar{P}_i)=-\bar{P}_i U_i \tag{2.7c}$$

4. 基本方程组

考虑欧氏空间中表面为 $S=S_\sigma\cup S_U$，$S\sigma\cap S_U=\phi$，的有界闭域 τ 上的弹性体在 $[t_1,t_2]\in[0,\infty)$ 内的运动，采用 Lagrange 坐标系，应用张量记号，以变形前未运动静止状态为参考构形，线弹性动力学两时端边界值问题的基本方程如下：

应变位移及速度位移关系

空间

$$E_{ij}=\frac{1}{2}(U_{i,j}+U_{j,i}) \quad (x,t)\in\tau\times(t_1,t_2) \tag{2.8a}$$

时间

$$V_i=U_{i,t}$$

应力应变及动量速度关系

空间

$$\sigma_{ij}=a_{ijkl}E_{kl} \tag{2.9a}$$

$$E_{ij}=b_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (x,t)\in\tau\times(t_1,t_2) \tag{2.9b}$$

时间

$$P_i=\rho V_i \tag{2.9c}$$

$$V_i=P_i/\rho \tag{2.9d}$$

应用(2.2)式，有

$$A(E_{ij})=\frac{1}{2}a_{ijkl}E_{ij}E_{kl}, \qquad A^*(\sigma_{ij})=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} \tag{2.10}$$

$$T(V_i)=\frac{1}{2}\rho V_i V_i, \qquad T^*(P_i)=\frac{1}{2\rho}P_i P_i$$

动量平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=P_{i,t} \qquad (x,t)\in\tau(t_1,t_2) \tag{2.11}$$

边界条件

力边界

$$\sigma_{ij}\gamma_j=\bar{T};\ (x,t)\in S_\sigma\times[t_1,t_2] \tag{2.12a}$$

位移边界

$$U_i=\bar{U}_i \qquad (x,t)\in S_U\times[t_1,t_2] \tag{2.12b}$$

时间端点条件

位移时端 $U_i(\bar{t}_U)=\bar{U}_i(\bar{t}_U) \quad x\in\bar{\tau}_U$ (2.13a)

动量时端 $P_i(\bar{t}_p)=\bar{P}_i(\bar{t}_p) \quad x\in\bar{\tau}_p$ (2.13b)

式中 $\bar{t}_U,\bar{t}_p$ 分别表示给定位移及动量的时端集，且集 $\{t_1,t_2\}=\bar{t}_U\cup\bar{t}_p$，$\bar{t}_U\cap\bar{t}_p=\phi$；而 $\bar{\tau}_U=\bar{\tau}\times\bar{t}_U$，$\bar{\tau}_p=\bar{\tau}\times\bar{t}_p$。条件(2.13)包含了四种时端条件：

$\bar{t}_U=\{t_1,t_2\}$，$\bar{t}_p=\phi$，即给定两时端位移场；

$\bar{t}_U=\phi,\bar{t}_p=\{t_1,t_2\}$，即给定两时端动量场；

$\bar{t}_U=\{t_1\},\bar{t}_p=\{t_2\}$，即$t_1$时刻给定移位场，$t_2$时刻给定动量场；

$\bar{t}_U=\{t_2\}$，$\bar{t}_p=\{t_1\}$，即t_1时刻给定动量场，t_2时刻给定位移场。

在本节公式(2.1)～(2.13)中，σ_{ij}表示应力张量，E_{ij}表示应变张量，U_i表示位移，V_i表示速度，P_i表示动量，$\bar{F}_i$为体力，$\bar{T}_i$为面力，它们都是空间及时间(x,t)足够光滑的函数；γ_i表示$\bar{\tau}$外法向矢量，ρ为弹性体质量密度，a_{ijkl}与b_{ijkl}分别为弹性常数张量及其逆张量。

三、线弹性动力学的某些一般定理

弹性静力问题的可能功原理在[8]中有所介绍。这里给出弹性动力问题中相应的形式。引入定义：

（1） 可能位移场U_i^*在$\tau\times(t_1,t_2)$内足够光滑从而可满足应变位移及速度位移关系(2.8)，在$S_U\times[t_1,t_2]$上满足位移给定边界条件(2.12c)，在时端满足位移给定条件(2.13a)的任意可能位移场。

（2） 可能应力—动量场σ_{ij}^{**}，P_i^{**}在$\tau\times(t_1,t_2)$内满足动量方程(2.11)，在$S_\sigma\times[t_1,t_2]$上满足力边报条件(2.12a)，在时端满足动量给定条件(2.13b)的任何可能的应力及动量场。

（3） 广义可能应力—动量场σ_{ij}^{***}，P_i^{***}，$\bar{F}_i^{***}$,$\bar{T}_i^{***}$,$\bar{P}_i(t_p)^{***}$定义为体力$\bar{F}$，面力$\bar{T}_i$，时端动量$\bar{P}_i$允许变分下的可能应力动量场。显然它比可能应力动量场范围更大，可能应力动量场包含于其中。

（4） 广义可能位移应变场U_i^{***},E_{ij}^{***},V_i^{***}定义为不要求位移变分δU_i对坐标x三阶可微，从而应变变分δE_{ij}不要求满足应变协调方程的可能位移场。同理，广义可能位移场包含可能位移场于其中。

1. 可能功作用量原理

对于任取的互不相关的可能位移场U_i^*及可能应力-动量场σ_{ij}^{**}，P_i^{**},下列积分成立：

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[\sigma_{ij}^{**}E_{ij}^*-P_i^{**}V_i^*]d\tau\right\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{S\sigma}\bar{T}_iu_i^*dS+\int_{S_U}\sigma_{ij}^{**}U_idS\right.$$

$$\left.+\int_\tau\bar{F}_iU_i^*d\tau\right\}dt-\int_{\bar{\tau}_p}\zeta\bar{P}_iU_i^*d\tau-\int_{\bar{\tau}_U}\zeta P_i^{**}\bar{U}_id\tau \tag{3.1a}$$

对应广义可能应力动量场，其形式为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau\left[\sigma_{ij}^{***}E_{ij}^*-P_i^{***}V_i^*\right]d\tau\right\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{S\sigma}\bar{T}_i^{***}U_i^*\,dS+\int_{S_U}\sigma_{ij}^{***}\gamma_i\bar{U}_idS\right.$$

$$\left.+\int_\tau\bar{F}_i^{***}U_id\tau\right\}dt-\int_{\bar{\tau}_p}\zeta\bar{P}_i^{***}U_i^*d\tau-\int_{\bar{\tau}_U}\zeta P_i^{***}\bar{U}_id\tau \tag{3.1b}$$

式中ζ表示时端外法矢，对于区间$[t_g,t_r]$有

$\zeta(t_g)=-1$，$\zeta(t_r)=1$。式(3.1)证明是容易的。

2. 虚位移原理

在(3.1a)中取可能应力动量场为真实应力动量场,取可能位移场为真实位移场附近的微

小变化的可能位移场，即$\sigma_{ij}^{**}=\sigma_{ij}, P_i^{**}=P_i, U_i^*=\delta U_i, E_{ij}^*=\delta E_{ij}$，注意在$S_U$上及$\bar{\tau}_U$上，$\delta U_i\equiv 0$，即得虚位移原理：

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[\sigma_{ij}\delta E_{ij}-P_i\delta V_i]d\tau\right\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{S\sigma}\bar{T}_i\delta u_i dS+\int_\tau \bar{F}_i\delta u_i dS\right\}dt$$

$$-\int_{\bar{\tau}_p}\zeta\bar{P}_i\delta U_i d\tau \tag{3.2}$$

3. 虚应力动量原理

在(3.1a)中取$U_i^*=U_i$，即为真实位移场；$\sigma_{ij}^{**}=\delta\sigma_{ij}$，$P_i^{**}=\delta P_i$，即为真实应力动量场附近微小变化的可能应力动量场，注意S_σ上$\delta\sigma_{ij}\equiv 0$，$\bar{\tau}_p$上$\delta P_i\equiv 0$，可得虚应力动量原理：

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[E_{ij}\delta\sigma_{ij}-V_i\delta P_i]d\tau\right\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{S_U}\bar{U}_i\delta\sigma_{ij}\gamma_j dS\right\}dt-\int_{\bar{\tau}_U}\zeta\bar{U}_i\delta P_i d\tau \tag{3.3a}$$

对于广义可能应力动量场相应有

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[E_{ij}\delta\sigma_{ij}-V_i\delta P_i]d\tau\right\}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{S\sigma}U_i\delta\bar{T}_i dS+\int_{S_U}\bar{U}_i\delta\sigma_{ij}\gamma_j dS\right.$$

$$\left.+\int_\tau U_i\delta\bar{F}_i d\tau\right\}dt-\int_{\bar{\tau}_p}\zeta U_i\delta\bar{P}_i d\tau-\int_{\bar{\tau}_U}\zeta\bar{U}_i\delta P_i d\tau \tag{3.3b}$$

下面以(3.2)式中最后一项积分为例，说明上列各式中在$\bar{\tau}_p$，$\bar{\tau}_U$上积分的物理意义。由式$t_p\in[t_1,t_2]$时刻给定动量$\bar{P}_i$相应的脉冲力在δU_i上的虚功作用量为

$$\int_{t_1^-}^{t_2^+}\int_\tau\bar{F}_i(x,t)\delta U_i\, d\tau dt=\int_{t_1^-}^{t_2^+}\int_\tau\bar{P}_i(t_p)\varDelta(t-t_p)\delta U_i d\tau]dt$$

$$=\int_\tau(\bar{P}_i\delta U_i)_{t_p}d\tau \tag{3.4a}$$

的情形，$\bar{t}_p=\{t_1,t_2\}, \bar{t}_U=\phi$，于是(3.2)式最后一项积分为

$$-\int_{\bar{\tau}_P}\zeta\bar{P}_i\delta U_i d\tau=-\left\{\int_\tau[(\zeta\bar{P}_i\delta U_i)_{t1}+(\zeta\bar{P}_i\delta U_i)_{t2}]d\tau\right\}$$

$$=\int_\tau(\bar{P}_i\delta U_i)_{t1}d\tau-\int_\tau(\bar{P}_i\delta U_i)_{t2}d\tau \tag{3.4b}$$

其意义为给定的时端动量$\bar{P}_i$相应的脉冲力向区间$[t_1,t_2]$内输入的虚功作用量之和。这里应用了定义$\zeta(t_1)=-1$，$\zeta(t_2)=1$，而(3.4b)式中t_2时刻积分前负号反映了这部分作用量是由$[t_1,t_2]$区间输出的。

4. 应变能动能作用量定理

这个定理对应于静力问题中的应变能定理。可述为：在$\tau\times[t_1,t_2]$内处于动平衡的线弹性体，其应变能与动能差的作用量等于体力，面力及时端动量在其相应位移上功的作用量，即

$$\int^{t_2}\left\{\int_\tau[A(E_{ij})-T\,(V_i)]\,d\tau\right\}dt=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_{S\sigma}\bar{T}_i U_i dS+\int_{S_U}T_i\bar{U}_i dS\right.$$

$$+\int_{\tau}\bar{F}_iU_id\tau\Big\}dt-\frac{1}{2}\Big\{\int_{\bar{\tau}_P}\zeta\bar{P}_iU_id\tau+\int_{\bar{\tau}_1}\zeta P_i\bar{U}_id\tau\Big\} \tag{3.5}$$

在(3.1a)中取$\sigma_{ij}^{**}=\sigma_{ij}$，$P_i^{**}=P_i$，$U_i^*=U_i$，并考虑线性性质，(3.5) 式即可得出。若去掉时间维，上式即退化为克拉贝龙定理。

5. 互易定理

假定线弹性体$\tau\times[t_1,t_2]$处于两种不同的动力平衡状态，各自场变量用上标(1) (2)来区分。应用(3.1a)，考虑线性性质，得互易定理：

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_{S\sigma}\bar{T}_i^{(1)}U_i^{(2)}dS+\int_{S_U}\sigma_{ij}^{(1)}\gamma_j\bar{U}_i^{(2)}dS+\int_{\tau}\bar{F}_i^{(1)}U_i^{(2)}d\tau\Big\}dt-\int_{\bar{\tau}_P}\zeta\bar{P}_i^{(1)}U_j^{(2)}d\tau$$

$$-\int_{\bar{\tau}_1}\zeta P_i^{(1)}\bar{U}_i^{(2)}d\tau=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\int_{S\sigma}\bar{T}_i^{(2)}U_i^{(1)}dS+\int_{S_U}\sigma_{ij}^{(2)}\gamma_j\bar{U}_i^{(1)}dS+\int_{\tau}\bar{F}_i^{(2)}U_i^{(1)}d\tau\Big\}dt$$

$$-\int_{\bar{\tau}_P}\zeta\bar{P}_i^{(2)}U_i^{(1)}d\tau-\int_{\bar{\tau}_1}\zeta P_i^{(2)}\bar{U}_i^{(1)}dS \tag{3.6}$$

应用(3.6)式，可得以下定理。

6. 功作用量互等定理

考虑(3.6)式中两种状态是各自仅受一集中体力作用，即

$$\begin{aligned}&\text{状态(1)：}\quad \bar{F}_i^{(1)}(\underset{\sim}{x},t)=\bar{F}^{(1)}(\underset{\sim}{x}^{(1)},t)\Delta(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}^{(1)})\\&\text{状态(2)：}\quad \bar{F}_i^{(2)}(\underset{\sim}{x},t)=\bar{F}^{(2)}(\underset{\sim}{x}^{(2)},t)\Delta(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}^{(2)})\end{aligned} \tag{3.7}$$

由(3.6)式即得，功作用量互等定理

$$\int_{t_1}^{t_2}\bar{F}_i^{(1)}(\underset{\sim}{x}^{(1)},t)U_i^{(2)}(\underset{\sim}{x}^{(1)},t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\bar{F}_i^{(2)}(\underset{\sim}{x}^{(2)},t)\,U_i^{(1)}(\underset{\sim}{x}^{(2)},t)dt \tag{3.8}$$

即集中力$\bar{F}_i^{(1)}$在状态 (2) 位移场$U_i^{(2)}$上功作用量等于集中力$\bar{F}_i^{(2)}$在状态 (1) 位移场$U_i^{(1)}$上功作用量。

7. 位移互等定理

在(3.7)(3.8)中取

$$\bar{F}_i^{(1)}(\underset{\sim}{x}^{(1)},t)=\Delta(t-t^{(1)}),\quad \bar{F}_i^{(2)}(\underset{\sim}{x}^{(2)},t)=\Delta(t-t^{(2)})$$

$$(t_1\leqslant t^{(1)}<t^{(2)}\leqslant t_2)$$

则有位移互等定理

$$U_i^{(1)}(\underset{\sim}{x}^{(2)},t^{(2)})=U_i^{(2)}(\underset{\sim}{x}^{(1)},t^{(1)}) \tag{3.9}$$

即$t^{(1)}$时在点$\underset{\sim}{x}^{(1)}$处单位脉冲力在$t^{(2)}$时$\underset{\sim}{x}^{(2)}$处引起位移等于在$t^{(2)}$时于点$\underset{\sim}{x}^{(2)}$处施加单位脉冲力为满足平衡在$t^{(1)}$时$\underset{\sim}{x}^{(1)}$处应有的位移。

若在S_U上仅输入位移脉冲，还可得S_U上反力互等定理，此处从略。

8. 始末时刻条件关系定理

若(3.6)式中仅始末时刻条件不为零，则有

$$\int_{\bar{\tau}_p} \zeta \bar{P}_i^{(1)} U_i^{(2)} \, d\tau + \int_{\bar{\tau}_u} \zeta P_i^{(1)} \bar{U}_i^{(2)} \, d\tau = \int_{\bar{\tau}_p} \zeta \bar{P}_i^{(2)} U_i^{(1)} \, d\tau + \int_{\bar{\tau}_u} \zeta P_i^{(2)} \bar{U}_i^{(2)} d\tau \tag{3.10}$$

或者写成

$$\int_\tau [(P_i^{(1)} U_i^{(2)})_{t_1} - (P_i^{(1)} U_i^{(2)})_{t_2}] d\tau = \int_\tau [(P_i^{(2)} U_i^{(1)})_{t_1} - (P_i^{(2)} U_i^{(1)})_{t_2}] d\tau \tag{3.11}$$

下面分四种情形讨论：

1） 状态（1）：$P_i^{(1)}(t_1)=0$，$U_i^{(1)}(t_1)=\Delta(\underline{x}-\underline{x}^{(1)})$

状态（2）：$P_i^{(2)}(t_2)=0$，$U_i^{(2)}(t_2)=\Delta(\underline{x}-\underline{x}^{(2)})$

由(3.11)式得 $P_i^{(2)}(\underline{x}^{(1)}, t_1)=-P_i^{(1)}(\underline{x}^{(2)}, t_2)$ (3.12)

即在t_1时刻在$\underline{x}^{(1)}$处单位位移脉冲在t_2时刻$\underline{x}^{(2)}$处产生的动量等于t_2时刻在$\underline{x}^{(2)}$处产生单位位移脉冲于t_1时刻$\underline{x}^{1}$处应输入动量之负值。

2） 状态(1)

$U_i^{(1)}(t_1)=0$，$P_i^{(1)}(t_1)=\Delta(\underline{x}-\underline{x}^{(1)})$

状态(2)

$U_i^{(2)}(t_2)=0$，$P_i^{(2)}(t_2)=\Delta(\underline{x}-\underline{x}^{(2)})$

由(3.11)式得 $U_i^{(2)}(\underline{x}^{(1)}, t_1)=-U_i^{(1)}(\underline{x}^{(2)}, t_2)$ (3.13)

即 t_1时$\underline{x}^{(1)}$处输入单位动量脉冲在 t_2时$\underline{x}^{(2)}$处产生的位移等于在 t_2 时 $\underline{x}^{(2)}$处产生单位动量脉冲在 t_1时$\underline{x}^{(1)}$处应输入位移的负值。

3） 状态(1)

$$P_i^{(1)}(t_1)=0,\ U_i^{(1)}(t_1)=\Delta(\underline{x}-\underline{x}^{(1)})$$

状态(2)

$$P_i^{(2)}(t_2)=\Delta(\underline{x}-\underline{x}^{(2)}),\ U_i^{(2)}(t_2)=0$$

由(3.11)式得 $P_i^{(2)}(\underline{x}^{(1)}, t_1)=U_i^{(1)}(\underline{x}^{(2)}, t_2)$ (3.14)

即t_1时刻在$\underline{x}^{(1)}$处输入单位位移脉于t_2时在$\underline{x}^{(2)}$处引起的位移在数值上等于t_2时在$\underline{x}^{(2)}$处产生单位动量脉冲在t_1时$\underline{x}^{(1)}$处应输入的动量值。

4） 状态(1)

$$P_i^{(1)}(t_1)=\Delta(\underline{x}-\underline{x}^{(1)}),\ U_i^{(1)}(t_1)=0$$

状态(2)

$$P_i^{(2)}(t_2)=0,\ U_i^{(2)}(t_2)=\Delta(\underline{x}-\underline{x}^{(2)})$$

由(3.11)式得 $P_i^{(1)}(\underline{x}^{(2)}, t_2)=U_i^{(2)}(\underline{x}^{(1)}, t_1)$ (3.15)

即t_1时在$\underline{x}^{(1)}$处输入单位动量脉冲于t_2时$\underline{x}^{(2)}$处产生的动量在数值上等于在t_2时于 $\underline{x}^{(2)}$处产生的动量在数值上等于在t_2时于$\underline{x}^{(2)}$处产生单位位移脉冲在t_1时$\underline{x}^{(1)}$处应输入的位移值。

文献[16]中给出的互易定理包含于(3.11)中。

四、线弹性动力问题的广义变分原理

1. 位能作用量变分原理

利用虚位移原理(3.2)式，易得位能作用量变分原理的泛函

$$H_{11}[U_i]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[A(E_{ij})-T(V_i)-\bar{F}_iU_i]d\tau-\int_{S\sigma}\bar{T}_iU_idS\right\}dt+\int_{\tau_p}\zeta\bar{P}_iU_id\tau \tag{4.1}$$

这个泛函的约束条件是(2.8)(2.12b)(2.13a) (2.9)式，欧拉方程是(2.11)(2.12a)(2.13b)式。众所周知的Hamilton原理要求t_1、t_2时刻位移变分为零，仅是其中一种情形。

2. 余能作用量变分原理

利用虚应力动量原理(3.3a)，易得余能作用量变分原理的泛函

$$\Pi_{12}[\sigma_{ij},P_i]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[A^*(\sigma_{ij})-T^*(P_i)]d\tau-\int_{S_U}\bar{U}_i\sigma_{ij}\gamma_jdS\right\}dt+\int_{\tau_U}\zeta\bar{U}_iP_id\tau \tag{4.2a}$$

这个泛函约束条件是(2.11)(2.12a)(2.13b)(2.9)式，欧拉方程是(2.8)(2.12b)(2.13a)式。Tovpin原理[17][18]要求两时端动量(速度)变分为零，仅是其中一种情形。

我们也可以在广义可能应力动量场中比较，此时这个泛函可写为

$$\Pi_{12}[\sigma_{ij},P_i,(\bar{F}_i,\bar{T}_i,\bar{P}_i)]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[A^*(\sigma_{ij})-T^*(P_i)+G^*(\bar{F}_i)]d\tau+\int_{S\sigma}g^*(\bar{T}_i)\,dS-\int_{S_U}\bar{U}_i\sigma_{ij}\gamma_jdS\right\}dt+\int_{\tau_U}\zeta\bar{U}_iP_i\,d\tau-\int_{\tau_P}\zeta\bar{g}^*(\bar{P}_i)d\tau \tag{4.2b}$$

这时$\bar{F}_i,\bar{T}_i,\bar{P}_i$允许变分．用此泛函在证明中可保证$\delta\sigma_{ij}$，$\delta P_i$的独立性充分成立。

3. 胡-鹫原理的动力学形式

应用拉氏乘子法，放松泛函(4.1)中约束 (2.8) (2.12b) (2.13a) 可得一种形式动力学胡-鹫原理

$$H_{15}[\sigma_{ij},P_i,U_i,E_{ij},V_i]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[A(E_{ij})-T(V_i)-\bar{F}_iU_i-\sigma_{ij}(E_{ij}-\frac{1}{2}U_{j,i}-\frac{1}{2}U_{i,j})+P_i(V_i-U_{i,t})]d\tau-\int_{S_U}(U_i-\bar{U}_i)\sigma_{ij}\gamma_jdS-\int_{S\sigma}\bar{T}_iU_idS\right\}dt+\int_{\tau_a}\zeta\bar{P}_iU_id\tau+\int_{\tau_t}\zeta(U_i-\bar{U}_i)P_id\tau \tag{4.3a}$$

应用(2.3)式将(4.2a)式中$A^*(\sigma_{ij})$，$T^*(P_i)$用$A(E_{ij})$及$T(V_i)$代换，并用拉氏乘子放松约束条件(2.11)(2.12a)(2.13b)可得胡-鹫原理的另一形式

$$\Pi_{15}[\sigma_{ij},P_i,U_i,E_{ij},V_i]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[\sigma_{ij}E_{ij}-A(E_{ij})-P_iV_i+T(V_i)+U_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i-P_{i,t})]d\tau-\int_{S_U}\sigma_{ij}\gamma_j\bar{U}_idS-\int_{S\sigma}(\sigma_{ij}\gamma_j-\bar{T}_i)U_idS\right\}dt+\int_{\tau_U}\bar{U}_iP_i\zeta d\tau+\int_{\tau_p}\zeta(P_i-\bar{P}_i)U_id\tau \tag{4.3b}$$

在这两种形式之间有变换关系

$$H_{15}+\Pi_{15}=0 \tag{4.3c}$$

4. Hellinger—Reissner变分原理

应用(2.3)式由(4.3a)、(4.3b)可得H-R原理的两种形式

$$H_{\mathrm{III}3}[\sigma_{ij},P_i,U_i]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[T^*(P_i)-A^*(\sigma_{ij})-\bar{F}_iU_i-P_iU_{i,t}+\sigma_{ij}\left(\frac{1}{2}U_{i,j}+\frac{1}{2}U_{j,i}\right)]d\tau-\int_{S_U}(U_i-\bar{U}_i)\sigma_{ij}\gamma_jdS-\int_{S\sigma}\bar{T}_iU_idS\right\}dt+\int_{\tau_P}\zeta\bar{P}_iU_id\tau+\int_{\tau_U}\zeta(U_i-\bar{U}_i)P_id\tau \tag{4.4a}$$

$$\Pi_{\mathrm{II}3}[\sigma_{ij},P_i,U_i]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[A^*(\sigma_{ij})-T^*(P_i)+U_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i-P_{i,t})]d\tau-\int_{S_U}\sigma_{ij}\gamma_j\bar{U}_idS-\int_{S\sigma}(\sigma_{ij}\gamma_j-\bar{T}_i)U_idS+\int_{\tau_U}\zeta\bar{U}_iP_id\tau+\int_{\tau_P}\zeta(P_i-\bar{P}_i)U_id\tau\right. \tag{4.4b}$$

及变换关系

$$H_{\mathrm{II}3}+\Pi_{\mathrm{II}3}=0 \tag{4.4c}$$

泛函(4.3a)(4.3b)(4.4a) (4.4b)是胡鹫原理及H-R原理的正确形式，文献[20]～[24]工作均是其特例。

5. 本构关系变分原理

将泛函(4.1)中体力、面力及时端动量有关项用(2.2) (2.7)式的位函数表示，然后将所有位函数由(2.3) (2.7c)式用余位函数表示，并考虑取广义可能位移场与广义可能应力动量场情形，得

$$H_{\mathrm{IV}3}[\sigma_{ij},P_i,U_i,(\bar{F}_i,\bar{T}_i,\bar{P}_i)]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[\sigma_{ij}E_{ij}-A^*(\sigma_{ij})-P_iV_i+T^*(P_i)-\bar{F}_iU_i-G^*(\bar{F}_i)]d\tau-\int_{S\sigma}(\bar{T}_iU_i+g^*(\bar{T}_i)dS\right\}dt+\int_{\tau_P}\zeta(U_i\bar{P}_i+\bar{g}^*(\bar{P}_i))d\tau \tag{4.5a}$$

同理，由(4.2b)式可得

$$\Pi_{\mathrm{IV}3}[\sigma_{ij},P_i,U_i(\bar{F}_i,\bar{T}_i,\bar{P}_i)]=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_\tau[\sigma_{ij}E_{ij}-A(E_{ij})-P_iV_i+T(V_i)-\bar{F}_iU_i-G(U_i)]d\tau-\int_{S\sigma}(\bar{T}_iU_i+g(U_i))dS-\int_{S_U}\bar{U}_i\sigma_{ij}\gamma_jdS\right\}dt+\int_{\tau_U}\zeta\bar{U}_iP_id\tau+\int_{\tau_P}\zeta(\bar{P}_iU_i+\bar{g}(U_i))d\tau \tag{4.5b}$$

这两个泛函即是线弹性动力问题本构方程的变分原理。其约束是：对位移是满足(2.8) (2.12b)(2.13a)的广义可能位移场；对应力动量是满足(2.11)(2.12a)(2.13b)的广义可能应力动量场。而欧拉方程对(4.5a)是本构关系(2.9b)；对(4.5b)是本构关系(2.9a)式。其证明是容易的。同理，仍有关系

$$H_{\mathrm{IV}3}+\Pi_{\mathrm{IV}3}=0 \tag{4.5c}$$

弹性力学的本构关系变分原理由Oden 和 Reddy提出。笔者在[28]中讨论了Oden和

Reddy 所给的本构原理，指出了其中不合理之处，并给出了文中两种形式。值得指出：这里采用广义可能应力动量场目的是保证(4.5a)证明中要用的$\delta\sigma_{ij}$，δP_i在$\tau\times(t_1,t_2)$内的独立性，采用广义可能位移应变场目的在于保证(4.5b)证明中要用的δE_{ij}，δV_i在$\tau\times(t_1,t_2)$内的独立性。若在实际应用中，采用可能应力动量场或可能位移应变场，一般情形，这些独立性将无法保证，由泛函(4.5)只能得出总体积分形式的近似本构方程。有关细节有专文讨论。

对于上述诸变分原理，引入约束或用拉氏乘子消除约束，可得各种形式变分公式，这里对这些公式略去。

五、线弹性动力学分区变分原理

这里给出弹性动力问题分区变分原理。为了简化记法，约定$\bar\tau_a$为$\bar\tau$一个子域a，其表面为S_a，且$S_{Ua}=S_a\cap S_U$，$S_{\sigma a}=S_\sigma\cap S_U$；$[t_q,t_r]_\delta$是$[t_1,t_2]$一子区间$\delta$，且$\bar t_{U\delta}=\{t_q,t_r\}\cap\bar t_U$，$\bar t_{p\delta}=\{t_q,t_r\}\cap\bar t_p$；

$$\bar\tau_{Ua\delta}=\{(\underset{\sim}{x},t)\,|\,\underset{\sim}{x}\in\bar\tau_a,t\in\bar t_{U\delta},(\underset{\sim}{x},t)\in\bar\tau_a\times\bar t_{U\delta}\}$$

$$\bar\tau_{pa\delta}=\{(\underset{\sim}{x},t)\,|\,\underset{\sim}{x}\in\bar\tau_a,t\in\bar t_{p\delta},(\underset{\sim}{x},t)\in\bar\tau_a\times\bar t_{p\delta}\}\tag{5.1}$$

并定义：

$$H_{5E}[\bar\tau_a\times[t_q,\,t_r]_\delta]=\int_{t_q}^{t_r}\Big\{\int_{\tau_a}[A(E_{ij})-\bar F_iU_i-\sigma_{ij}(E_{ij}-\frac{1}{2}U_{i,j}-\frac{1}{2}U_{j,i})]d\tau$$
$$-\int_{S_{Ua}}(U_i-\bar U_i)\sigma_{ij}\gamma_jdS-\int_{S\sigma a}\bar T_iU_idS\Big\}dt\tag{5.2}$$

$$H_{5K}[\bar\tau_a\times[t_q,t_r]_\delta]=\int_{t_q}^{t_r}\Big\{\int_{\tau_a}[P_i(V_i-U_{i,t})-T(V_i)]d\tau\Big\}dt$$
$$+\int_{\bar\tau_{Ua\delta}}(U_i-\bar U_i)P_i\zeta d\tau+\int_{\bar\tau_{pa\delta}}\zeta\bar P_iU_idS\tag{5.3}$$

$$\Pi_{5E}[\bar\tau_a\times[t_q,t_r]_\delta]=\int_{t_q}^{t_r}\Big\{\int_{\tau_a}[\sigma_{ij}E_{ij}-A(E_{ij})+(\sigma_{ij,j}+\bar F_i)U_i]d\tau$$
$$-\int_{S_{Ua}}\sigma_{ij}\gamma_j\bar U_idS-\int_{s\delta a}(\sigma_{ij}\gamma_j-\bar T_i)U_idS\Big\}dt\tag{5.4}$$

$$\Pi_{5K}[\bar\tau_a\times[t_q,t_r]_\delta]=\int_{t_q}^{t_r}\Big\{\int_{\tau_a}[T(V_i)-P_iV_i-P_{i,t}U_i]dt\Big\}dt$$
$$+\int_{\bar\tau_{Ua\delta}}\bar U_iP_i\zeta d\tau+\int_{\bar\tau_{pa\delta}}\zeta(P_i-\bar P_i)U_id\tau\tag{5.5}$$

分别称H_{5E}，H_{5K}，Π_{5E}，Π_{5K}为弹性体在域$\bar\tau_a\times[t_q,t_r]_\delta$内不含分区界面的广义弹性位能作用量，广义动能作用量，广义弹性余能作用量及广义余动能作用量。

1. 分区五变量广义混合能作用量变分原理

（1） 时间域不分区情形 分$\bar\tau$为a,b两区$\bar\tau=\bar\tau_a\cup\bar\tau_b$，分区交界面为$S_{ab}$。选$a$区为位能作用量区，$b$区为余能作用量区，两分区内各取独立的变量$\sigma_{ij}$，$V_i$，$P_i$，$U_i$，$E_{ij}$，在不引起混淆情形，对这些量略去上标$(a)(b)$。

分区五变量广义混合能作用量变分原理为：

泛函 $$\Pi_5^{(1)}=H_5^{(a)}-\Pi_5^{(b)}+\Pi_{H\Pi E}\tag{5.6}$$

的驻值条件 $\delta Л_5^{(1)}=0$ 等价于分区线弹性动力学方程组(2.8)～(2.13)及分区界面连续条件

$$\begin{cases} T_i^{(a)}+T_i^{(b)}=0 \\ U_i^{(a)}=U_i^{(b)} \end{cases} \quad (x,t)\in S_{ab}\times[t_1,t_2] \tag{5.7}$$

式中 $H_5^{(a)}=H_{5E}[\bar{\tau}_a\times[t_1,t_2]]+H_{5K}[\bar{\tau}_a\times[t_1,t_2]]$

$$\Pi_5^{(b)}=\Pi_{5E}[\bar{\tau}_b\times[t_1,t_2]]+\Pi_{5K}[\bar{\tau}_b\times[t_1,t_2]] \tag{5.8}$$

$$Л_{H\Pi E}=\int_{t_1}^{t_2}\int_{S_{ab}} T_i^{(b)}U_i^{(a)}\,dSdt=\int_{t_1}^{t_2}\int_{S_{ab}} \sigma_{ij}^{(b)}\ \gamma_j^{(b)}U_i^{(a)}dSdt$$

$Л_{H\Pi E}$称为分区界面$S_{ab}\times[t_1,t_2]$上的混合能作用量。

(2) 空间域不分区情形 将区间$[t_1,t_2]$分为c,d两段，t_q为分点，$t_1<t_q<t_2$。规定$\bar{\tau}\times[t_1,t_q]_c$为位能作用量区，$\bar{\tau}\times[t_q,t_2]_d$为余能作用量区，记$\bar{\tau}_{cd}=\bar{\tau}\times\{t_q\}$。在两分区内各自独立假定五变量，相应泛函为

$$Л_5^{(2)}=H_5^{(c)}-\Pi_5^{(c)}-Л_{H\Pi K} \tag{5.9}$$

式中 $H_5^{(c)}=H_{5E}[\bar{\tau}\times[t_1,t_q]_c]+H_{5K}[\bar{\tau}\times[t_1,t_q]_c]$

$$\Pi_5^{(d)}=\Pi_{5E}[\bar{\tau}\times[t_q,t_2]_d]+\Pi_{5K}[\bar{\tau}\times[t_q,t_2]_d] \tag{5.10}$$

$$Л_{H\Pi K}=\int_{\bar{\tau}_{cd}} P_i^{(d)}\zeta^{(d)}U_i^{(c)}d\tau$$

$Л_{H\Pi K}$称二分区界面$\bar{\tau}_{cd}$上混合能作用量。相应变分原理为：驻值条件 $\delta Л_5^{(2)}=0$ 等价于弹性动力学分区场方程及分区交界连续条件

$$\begin{cases} P_i^{(c)}\zeta^{(c)}+P_i^{(d)}\zeta^{(d)}=0 \\ U_i^{(c)}=U_i^{(d)} \end{cases} \quad (x,t)\in\bar{\tau}_{cd} \tag{5.11}$$

(3) 时间与空间都分区情形 考虑 $\bar{\tau}=\bar{\tau}_a\cup\bar{\tau}_b, S_{ab}=\bar{\tau}_a\cap\bar{\tau}_b$；$[t_1,t_2]=[t_1,t_q]_c\cup[t_q,t_2]_d$，$\{t_q\}=[t_1,t_q]_c\cap[t_q,t_2]_d$的情形，规定：

(ac)：$\bar{\tau}_a\times[t_1,t_q]_c$区，广义弹性位能，动能区；

(ad)：$\bar{\tau}_a\times[t_q,t_2]_d$区，广义弹性位能，余动能区；

(bc)：$\bar{\tau}_b\times[t_1,t_q]_c$区，广义弹性余能，动能区；

(bd)：$\bar{\tau}_b\times[t_q,t_2]_d$区，广义弹性余能，余动能区。四分区各自独立取五变量，相应泛函为：

$$\begin{aligned} Л_5=&H_{5E}[(ac)]+H_{5E}[(ad)]+H_{5K}[(ac)]+H_{5K}[(bc)]-\Pi_{5E}[(bc)] \\ &-\Pi_{5E}[(bd)]-\Pi_{5K}[(ad)]-\Pi_{5K}[(bd)]+Л_{H\Pi E}-Л_{H\Pi K} \end{aligned} \tag{5.12}$$

其驻值条件$\delta Л_5=0$等价于各分区动力方程组及界面连续条件(5.7)、(5.11).

2. 余能作用量与位能作用量的转换关系

可证明余能作用量与位能作用量之间有以下转换关系：

$$H_{5E}[\bar{\tau}_a\times[t_q,t_r]_\delta]+\Pi_{5E}[\bar{\tau}_a\times[t_q,t_r]_\delta]=\int_{t_q}^{t_r}\int_{S_{ab}} T_i^{(a)}U_i^{(a)}dSdt \tag{5.13}$$

$$H_{5K}[\bar{\tau}_a\times[t_q,t_r]_\delta]+\Pi_{5K}[\bar{\tau}_a\times[t_q,t_r]_\delta]=\int_{\bar{\tau}} -P_i^{(\delta)}\zeta^{(\delta)}U_i^{(\delta)}d\tau \tag{5.14}$$

这种转换关系提供了分区五变量变分原理三种形式：混合型，位能型，余能型之间转换的途经。

3. 分区广义位能作用量变分原理及分区广义余能作用量变分原理

利用(5.13)(5.14)式，将(5.12)式中余能作用量换为位能作用量或反过来代换，即可得分区广义位能作用量变分原理及分区广义余能作用量变分原理：

$$\begin{aligned}\varPi_{5H}=&H_{5E}[(ac)]+H_{5E}[(ad)]+H_{5E}[(bc)]+H_{5E}[(bd)]+H_{5K}[(ac)]\\&+H_{5K}[(ad)]+H_{5K}[(bc)]+H_{5K}[(bd)]+\varPi_{HHE}-\varPi_{HHK}\end{aligned}\tag{5.15}$$

式中

$$\varPi_{HHE}=\int_{t_1}^{t_2}\int_{S_{ab}}T_i^{(b)}(U_i^{(a)}-U_i^{(b)})dSdt\tag{5.16}$$

$$\varPi_{HHK}=\int_{\bar\tau_{cd}}P_i^{(d)}\zeta^{(d)}(U_i^{(c)}-U_i^{(d)})d\tau$$

及

$$\begin{aligned}\varPi_{5\Pi}=&-\Pi_{5E}[(ac)]-\Pi_{5E}[(ad)]-\Pi_{5E}[(bc)]-\Pi_{5E}[(bd)]-\Pi_{5K}[(ac)]\\&-\Pi_{5K}[(ad)]-\Pi_{5K}[(bc)]-\Pi_{5K}[(bd)]+\varPi_{\Pi\Pi E}-\varPi_{\Pi\Pi K}\end{aligned}\tag{5.17}$$

式中

$$\varPi_{\Pi\Pi E}=\int_{t_1}^{t_2}\int_{S_{ab}}(T_i^{(a)}+T_i^{(b)})U_i^{(a)}dSdt$$

$$\varPi_{\Pi\Pi K}=\int_{\bar\tau_{cd}}(P_i^{(c)}\zeta^{(c)}+P_i^{(d)}\zeta^{(d)})U_i^{(c)}d\tau\tag{5.18}$$

若在分区五变分原理中引入约束，可得四变量，三变量，二变量，单变量相应原理，这里略去。

4. 分区变分原理的一般形式

弹性体任分几个区，用 $\bar\tau_a$ 表示某位能区，$\bar\tau_b$ 表示某余能区；时域任分 n 段，用 $[t_g,t_r]_c$ 表示某动能区，$[t_g,t_r]_d$ 表示某余能区．空间各区交界面用 S_{HH}，$S_{H\Pi}$，$S_{\Pi\Pi}$ 表示，时间分点用 $\{t_q\}_{HH}$,$\{t_q\}_{\Pi\Pi}$，$\{t_q\}_{H\Pi}$ 表标．下标 H 涵义是位能区，Π 涵义是余能区，HH 表示为二位能区交界，其余类似．并记 $\bar\tau_{HH}=\bar\tau\times\{t_q\}_{HH}$，$\bar\tau_{H\Pi}=\bar\tau\times\{t_q\}_{H\Pi}$，$\bar\tau_{\Pi\Pi}=\bar\tau\times\{t_q\}_{\Pi\Pi}$
一般形式分区广义变分原理泛函为：

$$\begin{aligned}\varPi=&\sum_a H_E[\bar\tau_a\times[t_1,t_2]]+\sum_c H_K[\bar\tau\times[t_q,t_r]_c]\\&-\sum_b \Pi_E[\bar\tau_b\times[t_1,t_2]]-\sum_d \Pi_K[\bar\tau\times[t_q,t_r]_d]\\&+\sum_{S_{HH}}\varPi_{HHE}+\sum_{S_{H\Pi}}\varPi_{H\Pi E}+\sum_{S_{\Pi\Pi}}\varPi_{\Pi\Pi E}\\&-\sum_{\bar\tau_{HH}}\varPi_{HHK}-\sum_{\bar\tau_{H\Pi}}\varPi_{H\Pi K}-\sum_{\bar\tau_{\Pi\Pi}}\varPi_{\Pi\Pi K}\end{aligned}\tag{5.19}$$

其中场变量可取 1～5 变量．易证驻值条件 $\delta_\Pi=0$ 等价于各分区动力方程组及分区交界连续条件．

由(3.19)式不难得出各分区全用位能作用量或余能作用量的一般形式的位能作用量变分原理或余能作用量变分原理．

泛函(5.19)一般性在于:

（1） 空间、时间可任意分区，仅空间分区或仅时间分区是其特殊形式，不分区更为特殊。

（2） 各区可独立定为位能区或余能区；转换关系可使其余位互化；分区混合能，分区余能、分区位能是其三种形式。

（3） 各分区可独立假定1～5个自变函数，某些分区用精确解是其特例。

（4） 分区界面力、位移、动量彼此独立，不需事先藏足其连续条件。

分区变分原理是有限元动力分析的基础。笔者在[25]～[29]中已给出了在模态综合、时间元等方面的应用。许多工作有待进一步研究。

参考文献

[1] Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 1st ed., Cambridge University Press (1892), 4th ed. (1927), reprinted, Dover Publications, New York (1963).

[2] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，北京 (1956).

[3] Washizu, K., *Variational methods in elasticity and plasticity*, 3rd ed., Pergamon Press, New York (1982).

[4] Розин Л. А., Вариационые Цостоновки Задач для Упругих систем, Изд. ЛГУ, Ленкнград (1978).

[5] Oden, J. T. and J. N, Reddy, Variational methods in theoretical mechanics, Ist ed., Spring-Verlag, New York (1976); 2nd. (1983).

[6] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，力学与实践 (1979)，1 (1)，16—24，1(2)，18—27.

[7] 钱伟长，《变分法及有限元》，科学出版社，北京 (1980).

[8] 郭仲衡，《非线有弹性理论》，科学出版社，北京 (1980).

[9] 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社，北京 (1981).

[10] 龙驭球，弹性力学中的分区广义变分原理，上海力学，2(2) (1981)，1—9.

[11] Rayleigh, L., Some general theorems relating to vibration, *Proc. London Math. Soc.*, 4 (1873), 357—368.

[12] Graffi, D., Sui teoremi di reciprocita nei fenomeni dipendenti dal tempo, *Annali di Matematica*, 18 (1939), 173—200.

[13] Андреев Н. Н., Теорема взаимности в теорий колебаний и акустике, *Физ. Словарь*, 1 (1936), 458.

[14] Graffi, D., Uber der reziprozitatsatz in der bynamik der elastischen korper, *Ing. Arch.*, 22 (1954), 45—46.

[15] 胡海昌，弹性体动力学中的倒易定理及它的一些应用，力学学报，1(1) (1957)，63—76.

[16] Lamb, H., On reciprocal theorems in dynamics, *London Math. Soc. Proc.*, 19 (1888), 144—151.

[17] Toupin, R. A., A variational principle for the mesh-type analysis of a mechanical system, *J. A. M.*, 19(2) (1952), 151—152.

[18] Crandall, S. H., Complementary extremum principles for dynamics, *Ninth Int. Con. Appl. Mech.*, 5 (1957), 80—87.

[19] Green, A. E. and W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford University Press,

London (1954).

[20] Yu Chen, Remarks on variational principles in elastodynamics, *J. Fran. Inst.*, **279**(1) (1964).

[21] Truesdell, C. and R. A, Toupin, The classical field theories, *Encyclopedia of Physics*, S. Flugge, Ed., 3(1) (1960).

[22] Yu Yi-yuan, Generalized Hamilton's principles and variational equation of motion in nonlinear elasticity theory with application to plate theory, *J. A.S. A.*, **36**(1) (1964), 111—.

[23] Barr, A. D.S., An extension of the Hu-Washizu variational principle in linear elasticity for dynamic problems, *J. Appl. Mech.*, **33** (1966), 465—.

[24] Dean, T. S. and H. J. Plass, A dynamic variational principle for elastic bodies and its application to approximations in vibration problems, *Devel. in Mech.*, 3(2) (1965), 167—.

[25] 邢京堂，弹性动力学的变分原理与模态合法的理论研究，硕士论文，清华大学工程力学系，北京 (1981).

[26] 邢京堂、郑兆昌，基于弹性动力学变分原理的模态综合法研究．固体力学学报，(2) (1983), 248—257.

[27] Xing Jing-tang and Zheng Zhao-chang, Some general theorems and generalized and piece-generalized variational principles for elastodynamics, Reported at the Invitational China-American Workshop on Finite Element Method, Chengde, China (1986).

[28] 邢京堂，流固耦合振动分析的有限元与子结构-子区域方法的理论及数值计算研究—弹性动力学与微极线弹性动力学的变分原理及其在振动分析中的应用，博士论文，清华大学工程力学系，北京 (1984).

[29] 邢京堂、郑兆昌，应用广义哈氏原理重看 Newmark 与其它时间递推公式，上海力学，**6**(1) (1985), 19—28.

[30] Xing Jing-tang, Finite element-substructure method for dynamic analysis of coupled fluid-solid interaction problems, *Proc. of Int. Conf. on Comp. Mech.*, S. N., Atluri and G., Yagawa, Ed., Tokyo, Springer-Verlag, Ⅸ (1986), 117—122.

[31] Xing Jing-tang, Du Qing-hua and Zheng Zhao-chang, The displacement finite element formulation of dynamic analysis of fluid-structure interaction problems and substructure-subdomain techniques, *Proc. of Int. Conf. on Vib. Probs. in Engng*, Du Qing-hua, Ed., Xi'an Jiaotong University Press, Xi'an, 453—457.

Some General Theorems and Generalized and Piecewise Generalized Variational Principles for Linear Elastodynamics

Xing Jing-tang

(*Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing*)

Zheng Zhao-chang

(*Qinghua University, Beijing*)

Abstract

From the concept of four-dimensional space and under the four kinds of time limit conditions, some general theorems for elastodynamics are developed, such as the principle of possible work action, the virtual displacement principle, the virtual stress-momentum principle, the reciprocal theorems and the related theorems of time terminal conditions derived from it. The variational principles of potential energy action and complementary energy action, the H-W principles, the H-R principles and the constitutive variational principles for elastodynamics are obtained. Hamilton's principle, Toupin's work and the formulations of Ref. [5],[17-24] may be regarded as some special cases of the general principles given in the paper. By considering three cases: piecewise space-time domain, piecewise space domain, piecewise time domain, the piecewise variational principles including the potential, the complementary and the mixed energy action fashions are given. Finally, the general formulation of piecewise variational principles is derived. If the time dimension is not considered, the formulations obtained in the paper will become the corresponding ones for elastostatics.

Key words variational principle, elastodynamics, general theorem, boundary value problem of four-dimensional domain, dynamics