应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Newton方法在非线性振动理论中的推广与应用*

霍 麟 春

（天津大学，1990年1月5日收到）

摘 要

本文提出和证明了，用Newton方法可以求解强（弱）非线性非自治系统的渐近解析周期解，为研究强（弱）非线性系统振动提供了一个新的解析方法．根据本文方法的需要，讨论了二阶线性非齐次周期系统周期解的存在与计算问题．此外，还讨论了Newton方法对于拟线性系统的应用．最后，应用本文方法计算了Duffing方程的周期解．

关键词 Newton方法 共振 非共振 强非线性系统 截断方程组

一、引 言

众所周知，由于非线性振动在理论上与应用上的重要性，一直是数学工作者与力学工作者十分瞩目的主要研究课题．其中，定量方面研究中的解析方法占有十分重要的地位．

由于拟线性系统的派生系统是最简单的线性常系数常微分方程，而且由于小参数的引入，比较容易建立原系统与派生系统之间的同伦不变性[1]，因此，已经有了比较成熟的理论与方法讨论拟线性系统周期解的计算问题，如渐近法、平均法、Poincaré小参数法、多尺度法等[2 4]．然而，对于一般的强非线性系统的研究十分困难．主要困难在于，一般情况下没有明确的派生系统概念，即使系统的控制方程中存在小参数，其所谓的派生系统仍呈现出强非线性，因此，在求得派生系统的积分时，仍遇到难以克服的困难．尽管如此，各国学者在强非线性振动方面还是做了大量的卓有成效的工作．目前人们大都将研究拟线性系统的经典方法推广到某种特殊类型的强非线性系统周期解的讨论中去，如文[5][6]应用渐近法的基本思想研究了拟保守系统问题，Burton在文[7]中使用时间变换方法也讨论了类似的问题，然而，对于一般的强非线性非自治系统，特别是大幅值激励问题，目前尚缺少一致有效的解析方法．虽然，在某些情况下，使用直接变分法、Галеркин方法等直接近似方法[4]也可以得到强非线性系统的近似周期解，但是，由于提高精确度与所得到的超越方程变元数量的增多所引起的求解困难是矛盾的，同时也不可能获得显式形式的渐近解析解，所以，往往使得这些近似的直接方法的使用受到限制．此外，由苏联学者И·Г·Малкин所发展的归结为

* 李骊推荐．

Ляпунов系统的方法[3]也只适用于微幅振动情况。

另一方面，我们注意到，起源于有效地求解代数方程和超越方程的Newton法具有把非线性问题转化为线性问题，迭代程序简单，收敛速度快等特点。著名的苏联学者Л·В·Конторович首次成功地将Newton法应用于泛函空间中抽象算子方程的研究，同时又提出了简化的Newton法，并且定性地讨论了一类二阶非线性系统周期解的存在问题[8]。但是，他的证明过程不能给出计算周期解的解析方法。

本文试图放案非线性振动理论中的传统的基本思想，即首先寻求派生系统周期解的方法，而是以Newton法做为基本的指导思想，直接建立逼近概念，从理论上证明了比Л. В. Конторович的结果更广泛的一般的二阶非线性系统可以存在周期解，同时也给出了计算一致有效渐近解析周期解的迭代方法。最后通过实例演算，进一步说明本文提出的方法是可行的。

二、二阶线性非齐次周期系统的周期解

考虑
$$\ddot{x}(t)=\phi(t)\cdot x(t)+\psi(t)\dot{x}(t)+f(t) \tag{2.1}$$
假设$\phi(t)$，$\psi(t)$，$f(t)$均为连续的$2\pi/\omega$周期函数。将它们展开为复数形式的Fourier级数

$$\phi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi_n\cdot\exp[in\omega t] \tag{2.2}$$

$$\psi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\zeta_n\exp[in\omega t] \tag{2.3}$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\cdot\exp[in\omega t] \tag{2.4}$$

且设
$$x(t))=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cdot\exp[in\omega t] \tag{2.5}$$

将(2.2)～(2.5)代入(2.1)，令两端$\exp[in\omega t]$系数相等，得
$$\begin{cases} a_0+\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty}(\xi_{-r}+\delta(r)+ir\omega\zeta_{-r})a_r=-\alpha_0 & (2.6\text{a})\\ a_n+\dfrac{1}{n^2\omega^2}\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty}(\xi_{n-r}+ir\omega\cdot\zeta_{n-r})a_r=-\dfrac{\alpha_n}{n^2\omega^2} & (2.6\text{b})\end{cases}$$
$$(n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

其中
$$\delta(r)=\begin{cases}-1, & r=0\\ 0, & r\neq0\end{cases} \tag{2.7}$$

令
$$M=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|\xi_n|^2\right\}^{1/2} \tag{2.8}$$

$$Q=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|\zeta_n|^2\right\}^{1/2} \tag{2.9}$$

$$R=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n|^2\right\}^{1/2} \tag{2.10}$$

此外，还假设$\dot\psi(t)$在闭区间$[0,2\pi/\omega]$上连续，于是由文[9]中给出的关于Fourier级数可以逐项微分的定理，有

$$N=\left\{\sum_{n=0}^{\infty}n^2|\zeta_n|^2\right\}^{1/2}<+\infty \tag{2.11}$$

令自然数 $r^*(n)=\min\{r|r^2<2(n-r)^2\}$ (2.12)

那么 $r^*(n)=4n$ (2.13)

很易看出，$\forall r>r^*(n)$有$r^2<2(n-r)^2$成立。于是，考虑(2.8)、(2.9)、(2.11)、(2.12)、(2.13)有

$$\sum_{|n|=1}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\xi_{n-r}+ir\omega\zeta_{n-r}}{n^2}\right|^2\leqslant\sum_{|n|=1}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{|\xi_{n-r}|^2+r^2\omega^2|\zeta_{n-r}|^2}{n^4}\leqslant\sum_{|n|=1}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{|\xi_{n-r}|^2}{n^4}$$

$$+\omega^2\sum_{|n|=1}^{\infty}\sum_{r\leq r^*(n)}\frac{[r^*(n)]^2|\zeta_{n-r}|^2}{n^4}+2\omega^2\sum_{|n|=1}^{\infty}\sum_{|r|>r^*(n)}^{\infty}\frac{(n-r)^2|\zeta_{n-r}|^2}{n^4}$$

$$\leqslant2(M^2+2\omega^2N^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+32\omega^2Q^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$$

因此

$$I_1=\sum_{r=-\infty}^{\infty}|\xi_{-r}+\delta(r)+ir\omega\zeta_{-r}|^2+\sum_{|n|=1}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{|\xi_{n-r}+ir\omega\zeta_{n-r}|^2}{n^4}<+\infty \tag{2.14}$$

而 $$\sum_{|n|=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|^2}{n^2}<2R^2<+\infty \tag{2.15}$$

于是 $$I_2=|\alpha_0|^2+\sum_{|n|=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n|^2}{n^2\omega^2}<+\infty \tag{2.16}$$

令 $$\eta_1=\left\{\sum_{|n|\geq m+1}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\xi_{n-r}+ir\omega\zeta_{n-r}}{n^2\omega^2}\right|^2\right\}^{1/2} \tag{2.17}$$

显然 $$\lim_{m\to\infty}\eta_1=0 \tag{2.18}$$

令 $$\eta_2=\left(\frac{\sum_{|n|\geq m+1}^{\infty}|\alpha_n|^2/n^2\omega^2}{\sum_{|n|=1}^{\infty}|\alpha_n|^2/n^2\omega^2}\right)^{1/2} \tag{2.19}$$

显然 $$\lim_{m\to\infty}\eta_2=0 \tag{2.20}$$

无穷方程组(2.6)简记为

$$K\mathbf{a}=(I+H)\mathbf{a}=\boldsymbol{\alpha} \tag{2.21}$$

将(2.6)用$2m+1$个未知数的$2m+1$个方程

$$K'\mathbf{a}'=(I'+H')\mathbf{a}'=\boldsymbol{\alpha}' \tag{2.22}$$

所代替。方程组(2.22)被称为截断方程组。

其中I'为$2m+1$阶单位方阵，$\mathbf{a}'=[a_n]^T_{n=0,\pm1\pm2,\cdots\pm m}$，$H'$为$H$中的左上角$2m+1$阶方阵。设算子$\Phi$为将矢量$\mathbf{x}=[x_j]^T_{j=0,\pm1,\pm2,\cdots}$和矢量$\mathbf{x}'=\Phi\mathbf{x}=[x_j]^T_{j=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm m}$对应起来的算子。显然

$$\|\Phi K\|\leqslant 1+\|\Phi H\|\leqslant 1+\sum_{|n|=1}^{\infty}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\left|\frac{\xi_{n-r}+ir\omega\zeta_{n-r}}{n^2\omega^2}\right|^2$$

$$+\sum_{r=-\infty}^{\infty}|\xi_{-r}+\delta(r)+ir\omega\zeta_{-r}|^2<+\infty \tag{2.23}$$

和

$$\|K'^{-1}\|=\max_{j=0,\pm1,\cdots,\pm m}\frac{1}{1+\sqrt{|\lambda_j|}} \tag{2.24}$$

其中$\lambda_j(j=0,\pm1,\cdots\cdots,\pm m)$是方阵$H'^*\cdot H'$的特征值，$H'^*$是$H'$的Hermite共轭方阵。于是由文献[8]可知，若满足

$$\bar{r}=\eta_1\|K'^{-1}\|\cdot\|\Phi K\|<1 \tag{2.25}$$

且当$m\to\infty$，截断方程组(2.22)的解必定趋于原方程组(2.21)的解。由(2.24)式可知，对所有各阶的$\|K'^{-1}\|$具有公共的上界，再考虑(2.23)、(2.18)，可知，当m充分大时，(2.25)式恒能满足。因此，若截断方程组(2.22)的解存在，则当$m\to\infty$时，其解趋于无穷方程组(2.21)的解。

再来证明，用上述方法求得的方程(2.1)的周期解(2.5)绝对一致收敛。为此，将(2.5)代入(2.1)，并考虑(2.8)、(2.9)、(2.10)，得

$$n^2\omega^2|a_n|\leqslant\mu(1+|n|)|a_n|+R\qquad(n=\pm1,\pm2,\cdots) \tag{2.26}$$

其中

$$\mu=\max\{M,\omega Q\} \tag{2.27}$$

当$|n|$充分大，即当$|n|>s$，自然数s只要满足

$$s>\frac{1}{2}\left\{\frac{\mu}{\omega^2}+\sqrt{\frac{\mu^2}{\omega_4}+\frac{4\mu}{\omega^2}}\right\} \tag{2.28}$$

就有

$$|a_n|\leqslant\frac{R}{n^2\omega^2-\mu(1+|n|)}\qquad(n=\pm1,\pm2,\cdots) \tag{2.29}$$

成立。于是，由(2.5)、(2.29)，得

$$|x(t)|\leqslant\sum_{|n|=0}^{\infty}|a_n|\leqslant\sum_{|n|=0}^{s}|a_n|+R\sum_{|n|>s}^{\infty}\frac{1}{n^2\omega^2-\mu(1+|n|)} \tag{2.30}$$

显然上式右端有界。由此得到

定理1 若二阶线性非齐次周期系统(2.1)中的$\phi(t)$，$\psi(t)$，$f(t)$均为连续的$2\pi/\omega$周期函数，且$\dot{\psi}(t)$也是连续的，截断方程组(2.22)有解。则当$m\to\infty$时，用该解做为系数所构造的周期函数趋于方程(2.1)的$2\pi/\omega$周期解。该Fourier级数形式的周期解绝对一致收敛。

三、求解二阶非线性系统周期解的Newton方法

二阶非线性非自治系统的控制方程

$$\begin{cases}\ddot{x}(t)+g(x(t),\dot{x}(t),t)=0 & (3.1)\\ x(0)=x\left(\dfrac{2\pi}{\omega}\right),\quad \dot{x}(0)=\dot{x}\left(\dfrac{2\pi}{\omega}\right) & (3.2)\sim(3.3)\end{cases}$$

设

$$g(x,\dot{x},t)=g\left(x,\dot{x},t+\frac{2\pi}{\omega}\right) \tag{3.4}$$

$g(x,\dot{x},t)$，$g_x(x,\dot{x},t)$，$g_{\dot{x}}(x,\dot{x},t)$ 在区域 $\{-\infty<x<\infty;\ -\infty<\dot{x}<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega\}$ 上连续．定义空间$X=c^2[0,2\pi/\omega]$，$Y=c[0,2\pi/\omega]\times E_2$上的范数分别为

$$\forall x\in X,\ \|x\|_X=\max_t\sqrt{x^2(t)+\dot{x}^2(t)} \tag{3.5}$$

$$\forall y\in Y,\ \|y\|_Y=\max_t |y(t)|+\sqrt{\left[y\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)-y(0)\right]^2+\left[\dot{y}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)-\dot{y}(0)\right]^2} \tag{3.6}$$

定义非线性算子

$$F(x)=\left\{\ddot{x}(t)+g(x(t),\dot{x}(t),t);\ x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)-x(0),\dot{x}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)-\dot{x}(0)\right\} \tag{3.7}$$

于是，$F:X\mapsto Y$．将问题(3.1)、(3.2)、(3.3)记为算子形式为

$$F(x)=\theta \tag{3.8}$$

算子F的Fréchet强微分为

$$F'(x_0)h(t)=\Big\{\ddot{h}(t)+g_x(x_0(t),\dot{x}_0(t),t)h(t)+g_{\dot{x}}(x_0(t),\dot{x}_0(t),t)\dot{h}(t)$$

$$;h\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)-h(0),\dot{h}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)-\dot{h}(0)\Big\} \tag{3.9}$$

设$x_0=x_0(t)$，$u=u(t)$，$v=v(t)$均为连续的$2\pi/\omega$周期函数，它们的一阶导数也是连续的，且有$\|F(x_0)\|$充分小，以及

$$\|u(t)-x_0(t)\|\leqslant t_0\cdot\zeta_0 \tag{3.10}$$

$$\|v(t)-x_0(t)\|\leqslant t_0\cdot\zeta_0 \tag{3.11}$$

其中t_0，ζ_0均为正常数，将在后面确定．又考虑$g_x(x,\dot{x},t)$和$g_{\dot{x}}(x,\dot{x},t)$的连续性假设，有

$$|g_x(v,\dot{v},t)-g_x(u,\dot{u},t)|\leqslant k_0|v-u|+l_0|\dot{v}-\dot{u}| \tag{3.12}$$

$$|g_{\dot{x}}(v,\dot{v},t)-g_{\dot{x}}(u,\dot{u},t)|\leqslant k_1|v-u|+l_1|\dot{v}-\dot{u}| \tag{3.13}$$

于是，由(3.9)、(3.12)、(3.13)，得

$$\begin{aligned}\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega}|F'(v)h-F'(u)h|&=\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega}\{|g_x(v,\dot{v},t)-g_x(u,\dot{u},t)|\cdot|h(t)|+|g_{\dot{x}}(v,\dot{v},t)\\&\quad-g_{\dot{x}}(u,\dot{u},t)|\cdot|\dot{h}(t)|\leqslant\nu\cdot\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega}\{(|v-u|+|\dot{v}-\dot{u}|)\cdot|h(t)|+(|v-u|\\&\quad+|\dot{v}-\dot{u}|)\cdot|\dot{h}(t)|\leqslant\sqrt{2}\,\nu\cdot\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega}(|v-u|+|\dot{v}-\dot{u}|)\cdot\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega}\sqrt{h^2(t)+\dot{h}^2(t)}\\&\leqslant 2\nu\cdot\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega}(|v-u|^2+|\dot{v}-\dot{u}|^2)\cdot\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega}\sqrt{h^2(t)+\dot{h}^2(t)}=2\nu\|v-u\|\cdot\|h(t)\|\end{aligned}$$

其中

$$\nu=\max\{k_0,k_1,l_0,l_1\} \tag{3.14}$$

由此，得

$$\|F'(v)-F'(u)\|\leqslant 2\nu\|v(t)-u(t)\| \tag{3.15}$$

此外，由(3.9)式可知，算子方程

$$F'(x_0)h(t)=z(t) \tag{3.16}$$

等价于下述的周期边值问题：

$$\begin{cases} \ddot{h}(t)+g_x(x_0(t),\dot{x}_0(t),t)h(t)+g_{\dot{x}}(x_0(t),\dot{x}_0(t),t)\dot{h}(t)=z(t) & (3.17)\\ h(0)=h\left(\dfrac{2\pi}{\omega}\right),\ \dot{h}(0)=\dot{h}\left(\dfrac{2\pi}{\omega}\right) & (3.18)\sim(3.19) \end{cases}$$

根据本文第二节讨论可知，在满足一定条件下，边值问题(3.17)、(3.18)、(3.19)存在 $2\pi/\omega$ 周期解$h(t)$。于是，有

$$h(t)=F'(x_0)^{-1}\cdot z(t) \tag{3.20}$$

因此，存在常数

$$\mathscr{L}_0=\|F'(x_0)^{-1}\|=\sup_{\|z\|=1}\|h(t)\|=\sup_{\|z\|=1}\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega}\sqrt{h^2(t)+\dot{h}^2(t)}\right\} \tag{3.21}$$

和

$$\zeta_0=\|F'(x_0)^{-1}\cdot F(x_0)\| \tag{3.22}$$

及

$$\mathscr{H}_0=\mathscr{L}_0\cdot\zeta_0\cdot\nu \tag{3.23}$$

$$t_0=\frac{1}{2\mathscr{H}_0}(1-\sqrt{1-4\mathscr{H}_0}) \tag{3.24}$$

于是，根据文献[10]关于使用Newton法对于抽象算子的讨论，得到下述结论

定理2 假设 $g(x,\dot{x},t)$，$g_x(x,\dot{x},t)$ 及 $g_{\dot{x}}(x,\dot{x},t)$ 在区域 $\{-\infty<x<\infty;\ -\infty<\dot{x}<\infty;\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega\}$ 上连续。$g(x,\dot{x},t)$ 为 t 的 $2\pi/\omega$ 周期函数，$x_0(t)=x_0(t+2\pi/\omega)$，$x_0(t)\in C^2[0,2\pi/\omega]$，当$\|F(x_0)\|$充分小，且$\mathscr{H}_0\leqslant 1/4$。下述具有周期系数二阶线性非齐次迭代方程组存在$2\pi/\omega$周期解

$$\ddot{x}_1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0 x_1+\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)_0\dot{x}_1+\ddot{x}_0+g(x,\dot{x}_0,t)=0 \tag{3.25}$$

$$\ddot{x}_{n+1}+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0(x_{n+1}-x_n)+\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right)_0(\dot{x}_{n+1}-\dot{x}_n)$$

$$+g\left(\sum_{j=0}^{n}x_j,\sum_{j=0}^{n}\dot{x}_j,t\right)-g\left(\sum_{j=0}^{n-1}x_j,\sum_{j=0}^{n-1}\dot{x}_j,t\right)=0 \qquad (n=1,2,3,\cdots) \tag{3.26}$$

则当$n\to\infty$ 时，$\sum_{j=0}^{n}x_j(t)$收敛于方程(3.1)的$2\pi/\omega$周期解。

四、用Newton法求解拟线性非自治系统的周期解

（一） 求解线性周期系统周期解的迭代法

考虑

$$\ddot{x}(t)+k^2x(t)=\phi(t)\cdot x(t)+\psi(t)\dot{x}(t)+f(t) \tag{4.1}$$

若对周期函数$\phi(t)$，$\psi(t)$的范数进行某种限制，可用迭代法计算二阶线性周期系统(4.1)的周期解。

假设

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\phi(t)dt=0 \tag{4.2}$$

又设
$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t) \tag{4.3}$$
使得
$$\ddot{u}_0(t)+k^2u_0(t)=f(t) \tag{4.4}$$
$$\ddot{u}_n(t)+k^2u_n(t)=\phi(t)\cdot u_{n-1}(t)+\psi(t)\cdot\dot{u}_{n-1}(t) \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{4.5}$$
若(4.3)是(4.1)的解，那么(4.3)为周期解的充要条件为
$$u_n(0)=u_n\left(\frac{2\pi}{\omega}\right),\quad \dot{u}_n(0)=\dot{u}_n\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{4.6a,b}$$

(Ⅰ) 非共振情况

当$k/\omega\neq r$，r为自然数，称为非共振．首先形式上建造(4.1)的周期解．方程(4.4)、(4.5)的通解为
$$u_n(t)=a_n\cdot\cos kt+b_n\cdot\sin kt+v_n(t) \qquad (n=0,1,\cdots) \tag{4.7}$$
$$v_0(t)=\frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\cdot\sin k(t-\tau)d\tau \tag{4.8a}$$
$$v_n(t)=\frac{1}{k}\int_0^t[\phi(\tau)\cdot u_{n-1}(\tau)+\psi(\tau)\cdot\dot{u}_{n-1}(\tau)]\cdot\sin k(t-\tau)d\tau \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{4.8b}$$
将(4.7)、(4.8)代入(4.6)，得
$$\begin{cases} a_n\left(1-\cos\dfrac{2k\pi}{\omega}\right)-b_n\cdot\sin\dfrac{2k\pi}{\omega}=\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} q_n(\tau)\cdot\sin k\left(\dfrac{2\pi}{\omega}-\tau\right)d\tau & (4.9a)\\ a_n\cdot\sin\dfrac{2k\pi}{\omega}+b_n\left(1-\cos\dfrac{2k\pi}{\omega}\right)=\dfrac{1}{k}\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} q_n(\tau)\cdot\cos k\left(\dfrac{2\pi}{\omega}-\tau\right)d\tau & (4.9b)\end{cases}$$
$$(n=0,1,2,\cdots)$$
其中
$$q_0(t)=f(t) \tag{4.10a}$$
$$q_n(t)=\phi(t)\cdot u_{n-1}(t)+\psi(t)\cdot\dot{u}_{n-1}(t) \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{4.10b}$$
(4.9)的系数行列式
$$\Delta_{nor}=4\cdot\sin^2\left(\frac{k\pi}{\omega}\right)\neq 0 \tag{4.11}$$
于是，从(4.9)中可唯一解出常数a_n，$b_n(n=0,1,2,\cdots)$

再证明按上述方法建造的级数(4.3)绝对一致收敛．设
$$N=\sup_t|f(t)| \tag{4.12}$$
$$M=\max\{\sup_t|\phi(t)|,\ \sup_t|\omega\cdot\psi(t)|\} \tag{4.13}$$
由(4.8a)和(4.12)，得
$$|v_0(t)|\leqslant\frac{N}{k}t \tag{4.14}$$
(4.9)式中令$n=0$，并将两式平方相加，再考虑(4.12)式，得
$$\mu_0=\sqrt{a_0^2+b_0^2}\leqslant\frac{2\pi N}{k\cdot\omega}\sqrt{\frac{2}{\Delta_{nor}}}$$
(4.7)式中令$n=0$，并考虑(4.14)式，得
$$|u_0(t)|\leqslant\frac{N}{k}t+\mu_0 \qquad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{\omega}\right)$$

循此前进，并使用归纳法，不难得到

$$\mu_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\leqslant\sqrt{\frac{2}{\Delta_{nor}}}\left\{\frac{N}{k}\left(\frac{M}{k}\right)^n\frac{(2\pi/\omega)^{n+1}}{(n+1)!}+\sum_{m=0}^{n-1}\mu_m\left(\frac{M}{k}\right)^{n-m}\cdot\frac{(2\pi/\omega)^{n-m}}{(n-m)!}\right\}\tag{4.15}$$

$$(n=1,2,3,\cdots)$$

$$|u_n(t)|\leqslant\frac{N}{k}\left(\frac{M}{k}\right)^n\cdot\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}+\sum_{m=0}^{n}\mu_m\cdot\left(\frac{M}{k}\right)^{n-m}\cdot\frac{t^{n-m}}{(n-m)!}\tag{4.16}$$

$$(0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega,\ n=0,1,2,\cdots)$$

成立．将(4.16)代入(4.3)，得

$$|x(t)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|u_n(t)\leqslant\frac{N}{M}\left(\exp\left[\frac{Mt}{k}\right]-1\right)+\exp\left[\frac{Mt}{k}\right]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\tag{4.17}$$

$$(0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega)$$

由(4.15)式可得

$$\left\{1-\sqrt{\frac{2}{\Delta_{nor}}}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi M/(k\cdot\omega))^n}{n!}\right\}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\leqslant\frac{N}{M}\sqrt{\frac{2}{\Delta_{nor}}}\left(\exp\left[\frac{2\pi M}{k\omega}\right]-1\right)\tag{4.18}$$

显然上式右端恒为有界的正数，若左端的第一个因子大于零，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\mu_n$必定收敛．左端第一个因子大于零的条件为

$$\frac{k\cdot\omega}{M}>\frac{2\pi}{\ln(\sqrt{2}\,|\sin k\pi/\omega|+1)}\tag{4.19}$$

当(4.19)式成立时，函数项级数(4.3)绝对一致收敛．最后，将(4.3)代入(4.1)，并考虑(4.4)、(4.5)式，不难证明(4.3)是(4.1)的解．综上所述，得到

定理3 若k/ω不等于自然数．函数$\phi(t)$，$\psi(t)$，$f(t)$均为连续的$2\pi/\omega$周期函数，且其参数满足(4.19)式，则系统(4.1)存在$2\pi/\omega$周期解．当$n\to\infty$时，用迭代方法求得的

$x_n(t)=\sum\limits_{j=0}^{n}u_j(t)$绝对一致收敛于(4.1)的$2\pi/\omega$周期解．

（Ⅱ） 共振情况

当$k/\omega=r$，r为自然数，称为共振．设$f(t)$的Fourier展开式

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(F_n\cdot\cos n\omega t+G_n\cdot\sin n\omega t)\tag{4.20}$$

并记 $$f'(t)=f(t)-F_r\cos r\omega t-G_r\sin r\omega t\tag{4.21}$$

令 $$\ddot{u}_0(t)+r^2\omega^2\cdot u_0(t)=f'(t)\tag{4.22}$$

$$\ddot{u}_1(t)+r^2\omega^2u_1(t)=\phi(t)\cdot u_0(t)+\psi(t)\cdot\dot{u}_0(t)+F_r\cos r\omega t+G_r\sin r\omega t\tag{4.23}$$

$$\ddot{u}_n(t)+r^2\omega^2u_n(t)=\phi(t)\cdot u_{n-1}(t)+\psi(t)\cdot\dot{u}_{n-1}(t)\qquad(n=2,3,\cdots)\tag{4.24}$$

用讨论非共振情况的方法，得到下述结论

定理4 若$k/\omega=r$，r为自然数．函数$\phi(t)$，$\psi(t)$，$f(t)$均为连续的$2\pi/\omega$周期函数，参数满足

$$\frac{r\omega^2}{M} > \frac{2\pi}{\ln\left\{\frac{\pi}{\omega^2}\left(\frac{2M}{r} + \frac{|\varDelta_{res}|}{2\lambda r}\right)+1\right\}} \tag{4.25}$$

$$\varDelta_{res}=4r^2\omega^2\xi_0^2-(\alpha_{2r}-r\omega\cdot\eta_{2r})^2-(\beta_{2r}+r\omega\cdot\xi_{2r})^2\neq 0 \tag{4.26}$$

其中
$$\lambda=\{(|\beta_{2r}+r\cdot\omega\xi_{2r}+2r\omega\xi_0|+|\alpha_{2r}-r\omega\eta_{2r}|)^2 + (|\beta_{2r}+r\cdot\omega\xi_{2r}-2r\omega\xi_0|+|\alpha_{2r}-r\cdot\omega\eta_{2r}|)^2\}^{1/2} \tag{4.27}$$

常数α_{2r}，β_{2r}分别为函数$\phi(t)$的Fourier展开式中$\cos 2rt$和$\sin 2rt$的系数，ξ_0，ξ_{2r}，η_{2r}分别为$\psi(t)$的Fourier展开式中的常数项、$\cos 2rt$及$\sin 2rt$的系数。则系统(4.1)存在$2\pi/\omega$周期解。且当$n\to\infty$时，用迭代方法求得的$x_n(t)=\sum_{j=0}^{n}u_j(t)$绝对一致收敛于(4.1)的$2\pi/\omega$周期解。

下面再给出两个估计式(参见(4.16)、(4.17)、(4.18)式)，后面将会用到它们。在共振情况下，有

$$|x(t)|\leqslant\frac{M}{N}\left\{\left[\frac{C}{1-C}\left(\frac{N}{M}\right)^2-1\right]\cdot\exp\left[\frac{2\pi M}{r\omega^2}\right]-1\right\} \tag{4.28}$$

$$|\dot{x}(t)|\leqslant r\cdot\omega|x(t)| \tag{4.29}$$

其中
$$C=\frac{2r\lambda\omega^2}{\pi|\varDelta_{res}|}\left(\exp\left[\frac{2\pi M}{r\omega^2}\right]-\frac{2\pi M}{r\cdot\omega^2}-1\right) \tag{4.30}$$

注记 条件(4.25)式可以改写为更方便的形式。令$u=\frac{2\pi M}{r\omega^2}$，$\gamma=1+\frac{|\varDelta_{res}|}{4\lambda M}$，(4.25)式化为

$$y(u)=e^u-\gamma u-1<0 \tag{4.31}$$

曲线$y=y(u)$如图所式，零点为u^*，驻点为${}^*u$。用$u<{}^*u$代替$u<u^*$，由此得

$$\omega>\sqrt{\frac{2\pi M}{\ln(1+|\varDelta_{res}|/4\lambda M)}} \tag{4.32}$$

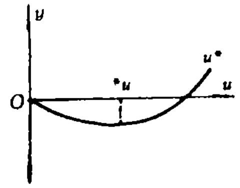

图 1

(二) 用Newton法求解拟线性非自治系统周期解

考虑
$$\ddot{x}(t)+p^2x(t)=\varepsilon F(x,\dot{x},t)+f(t) \tag{4.33}$$

假设$F(x,\dot{x},t)$，$F_x(x,\dot{x},t)$，$F_{\dot{x}}(x,\dot{x},t)$在区域$\{-\infty<x<\infty;\ -\infty<\dot{x}<\infty;\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi/\omega\}$上连续。$f(t)$为连续的$2\pi/\omega$周期函数。$F(x,\dot{x},t)$是$t$的$2\pi/\omega$周期函数。于是

$$f(t)=\sum_{|j|=1}^{\infty}\gamma_j\exp[ij\omega t] \tag{4.34}$$

考虑共振情况，引入解谐参数σ

$$n^2\omega^2-p^2=\varepsilon\cdot\sigma \tag{4.35}$$

其中n为某自然数。将(4.35)代入(4.33)，得

$$\ddot{x}(t)+n^2\omega^2x(t)=\varepsilon\sigma\cdot x(t)+\varepsilon F(x,\dot{x},t)+f(t) \tag{4.36}$$

派生系统为
$$\ddot{x}_0(t)+n^2\omega^2x_0(t)=f(t) \tag{4.37}$$

其$2\pi/\omega$周期解为

$$x_0(t)=\frac{1}{\omega^2}\sum_{|j|\neq n}^{\infty}\frac{\gamma_j\exp[ij\omega t]}{n^2-j^2}+a_n^{(0)}\exp[in\omega t]+a_{-n}^{(0)}\exp[-in\omega t] \tag{4.38}$$

设 $$x(t)=x_0(t)+x_1(t) \tag{4.39}$$

将(4.39)代入(4.36)，由(3.25)，得

$$\ddot{x}_1(t)+n^2\omega^2x_1(t)=\varepsilon\{F(x_0,\dot{x}_0,t)+F_x(x_0,\dot{x}_0,t)x_1(t)+F_{\dot{x}}(x_0,\dot{x}_0,t)\dot{x}_1(t)\}$$
$$+\varepsilon\sigma(x_0+x_1)+\varepsilon(\gamma_n'\exp[in\omega t]+\gamma_{-n}'\exp[-in\omega t] \tag{4.40}$$

其中 $$\gamma_n=\varepsilon\cdot\gamma_n',\ \gamma_{-n}=\varepsilon\gamma_{-n}' \tag{4.41}$$

根据本节迭代法，设

$$x_1(t)=\sum_{m=0}^{\infty}u_m(t) \tag{4.42}$$

使得 $$\ddot{u}_0(t)+n^2\omega^2N_0(t)=\varepsilon F(x_0,\dot{x}_0,t)$$
$$+\varepsilon\gamma_n'\exp[in\omega t]+\varepsilon\gamma_{-n}'\exp[-in\omega t]+\varepsilon\sigma\cdot x_0(t) \tag{4.43}$$
$$\ddot{u}_1(t)+n^2\omega^2u_1(t)=\varepsilon F_x(x_0,\dot{x}_0,t)\cdot u_0+\varepsilon F_{\dot{x}}(x_0,\dot{x}_0,t)\cdot\dot{u}_0+\varepsilon\sigma u_0 \tag{4.44}$$

设 $$F(x_0,\dot{x}_0,t)=\sum_{|j|=0}^{\infty}\mu_j\exp[ij\omega t] \tag{4.45}$$

将(4.38)、(4.45)代入(4.43)，由消去永年项(与周期性充要条件(4.6)式等价)，得

$$\mu_n+\sigma a_n^{(0)}-\gamma_n'=0 \tag{4.46}$$

而 $$a_{-n}^{(0)}=\bar{a}_n^{(0)} \tag{4.47}$$

此地的μ_n是$a_n^{(0)}$和$a_{-n}^{(0)}$的函数。(4.43)的周期解为

$$u_0(t)=\frac{\varepsilon}{\omega^2}\sum_{|j|\neq n}^{\infty}\frac{\mu_j\exp[ij\omega t]}{n^2-j^2}+\frac{\varepsilon\sigma}{\omega^4}\sum_{|j|\neq n}^{\infty}\frac{\gamma_j\exp[ij\omega t]}{(n^2-j^2)^2}$$
$$+a_n^{(1,0)}\exp[in\omega t]+a_{-n}^{(1,0)}\exp[-in\omega t] \tag{4.48}$$

设 $$F_x(x_0,\dot{x}_0,t)=\sum_{|j|=0}^{\infty}\alpha_j\exp[ij\omega t] \tag{4.49}$$

$$F_{\dot{x}}(x_0,\dot{x}_0,t)=\sum_{|j|=0}^{\infty}\beta_j\exp[ij\omega t] \tag{4.50}$$

将(4.48)、(4.49)、(4.50)代入(4.44)，由消去永年项(与周期性充要条件(4.6)式等价)，得

$$(\alpha_0+\sigma+in\omega\beta_0)a_n^{(1,0)}+\frac{\varepsilon}{\omega^2}\sum_{|s|\neq n}^{\infty}\frac{\mu_s(\alpha_{n-s}+i\omega s\cdot\beta_{n-s})}{n^2-s^2}$$
$$+\frac{\varepsilon\sigma}{\omega^4}\sum_{|s|\neq n}^{\infty}\frac{\gamma_s(\alpha_{n-s}+i\omega\cdot s\cdot\beta_{n-s})}{(n^2-s^2)^2}=0 \tag{4.51}$$

而 $$a_{-n}^{(1,0)}=\bar{a}_n^{(1,0)} \tag{4.52}$$

在n阶超谐波共振情况下，应用 Poincaré 小参数法求解(4.33)的$2\pi/\omega$周期解，精确到ε量

级，所得结果与上述结果完全相同。

由(3.10)、(3.11)、(3.12)、(3.19)、(3.20)、(3.21)、(4.29)、(4.30)、(4.32)、(4.45)得到(4.33)周期解的 ε 幂级数收敛的充分条件为

$$\varepsilon\frac{{}^*C^2\cdot p^2}{(1-C^2)\cdot{}^*M}\cdot\exp\left[\frac{2\pi\cdot{}^*M\varepsilon}{n\omega^2}\right]^2\cdot(1+n^2\omega^2)\left(\sqrt{\sum_{|j|=0}^{\infty}|\mu_j|^2}+|\gamma_n'|\right)\leqslant\frac{1}{8}\tag{4.53}$$

和
$$\varepsilon<\frac{\ln\left(1+\frac{|{}^*\Delta_{res}|}{4\cdot{}^*\lambda\cdot{}^*M}\right)^{n\omega^2}}{4\pi^2\cdot{}^*M}\tag{4.54}$$

其中
$$\lambda=\varepsilon\cdot{}^*\lambda,\quad \Delta_{res}=\varepsilon^2\cdot{}^*\Delta_{res}\tag{4.55a、b}$$

$${}^*M=\sqrt{\sum_{|j|=0}^{\infty}|\mu_j|^2}+|\sigma|\tag{4.55c}$$

$$C=\varepsilon\cdot{}^*C,\quad {}^*C=\frac{8\cdot{}^*\lambda\cdot{}^*M^2}{n\omega^2|{}^*\Delta_{res}|}\tag{4.55d、e}$$

然而，小参数法是以隐函数存在定理为理论依据，隐函数存在定理仅能给出定性的讨论，所以，Poincaré小参数法不能定量地给出拟线性系统ε幂级形式的周期解的收敛条件。

五、强非线性Duffing方程周期解

$$\ddot{x}(t)+p^2x(t)+\beta x^3(t)=q\cdot\cos\omega t\tag{5.1}$$

设n阶近似周期解

$$x_n(t)=\sum_{j=0}^{n}x^{(j)}(t)=\sum_{m=0}^{\infty}A_{2m+1}^{(n)}\cdot\cos(2m+1)\omega t\tag{5.2}$$

其中
$$x^{(r)}(t)=\sum_{m=0}^{\infty}a_{2m+1}^{(r)}\cdot\cos(2m+1)\omega t\qquad(r=0,1,2,\cdots)\tag{5.3}$$

于是
$$A_{2m+1}^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}a_{2m+1}^{(r)}\qquad(m=0,1,2,\cdots)\tag{5.4}$$

零级近似周期解

$$x_0(t)=x^{(0)}(t)=a\cdot\cos\omega t\tag{5.5}$$

$$(p^2-\omega^2)a+\frac{3}{4}\beta a^3=q\tag{5.6}$$

由(5.1)、(5.2)、(3.25)、(3.26)，得

$$\ddot{x}^{(r+1)}+k^2x^{(r+1)}=-\lambda x^{(r+1)}\cdot\cos2\omega t-f^{(r+1)}(t)\qquad(r=0,1,2,\cdots)\tag{5.7}$$

其中
$$k^2=p^2+\frac{3}{2}\beta\cdot a^2,\qquad \lambda=\frac{3}{2}\beta a^2\tag{5.8～5.9}$$

$$f^{(1)}(t)=\mu_3^{(1)}\cdot\cos3\omega t\tag{5.10}$$

$$\mu_3^{(1)}=\frac{1}{4}\beta a^3\tag{5.11}$$

$$f^{(r+1)}(t)=\beta(x_r^3-x_{r-1}^3-3x_0^2x^{(r)})$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\mu_{2m+1}^{(r+1)}\cdot\cos(2m+1)\omega t \qquad (r=1,2,3,\cdots) \tag{5.12}$$

$$\mu_{2m+1}^{(r+1)}=\frac{\beta}{2}\sum_{s=1}^{\infty}B_{2s}^{(r)}(A_{2s-2m-1}^{(r)}+A_{2s+2m+1}^{(r)})-\frac{\beta}{2}\sum_{s=1}^{\infty}B_{2s}^{(r-1)}\cdot(A_{2s-2m-1}^{(r-1)}$$

$$+A_{2s+2m+1}^{(r-1)})+\frac{\beta}{2}\sum_{s=1}B_{2s}^{(r)}\cdot A_{2m-2s-1}^{(r)}-\frac{\beta}{2}\sum_{s=1}B_{2s}^{(r-1)}\cdot A_{2m-2s-1}^{(r-1)}$$

$$+\beta(B_0^{(r)}\cdot A_{2m+1}^{(r)}-B_0^{(r-1)}\cdot A_{2m+1}^{(r-1)})-\frac{3}{4}\beta a^2(2a_{2m+1}^{(r)}+a_{2m+3}^{(r)}+a_{2m-1}^{(r)}) \tag{5.13}$$

$$(m=0,1,2,\cdots;\ r=1,2,3,\cdots)$$

$$B_0^{(r)}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\{A_{2m+1}^{(r)}\}^2 \tag{5.14}$$

$$B_{4m+2}^{(r)}=\frac{1}{2}\{A_{2m+1}^{(r)}\}^2+\sum_{s=0}A_{2s+1}^{(r)}\cdot A_{4m-2s-1}^{(r)}$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}A_{2s+1}^{(r)}\cdot A_{4m+2s+3}^{(r)} \qquad (m=0,1,2,\cdots) \tag{5.15}$$

$$B_{4m}^{(r)}=\sum_{s=0}A_{2s+1}^{(r)}\cdot A_{4m-2s-1}^{(r)}+\sum_{s=0}^{\infty}A_{2s+1}^{(r)}A_{4m+2s+1}^{(r)} \tag{5.16}$$

$$(m=1,2,3,\cdots)$$

将(5.3)、(5.10)或(5.12)代入(5.7)，比较两端同次谐波系数，得

$$\left(\omega^2-k^2-\frac{\lambda}{2}\right)a_1^{(r)}-\frac{\lambda}{2}a_3^{(r)}=\mu_1^{(r)} \tag{5.17a}$$

$$-\frac{\lambda}{2}a_{2m-1}^{(r)}-[(2m+1)^2\omega^2-k^2]a_{2m+1}^{(r)}-\frac{\lambda}{2}a_{2m+3}^{(r)}=\mu_{2m+1}^{(r)} \tag{5.17b}$$

$$(m,\ r=1,2,3,\cdots)$$

方程(5.17)的解为

$$a_{2m+1}^{(r)}=\sum_{s=0}^{\infty}a_{2m+1}^{(r,2s+1)} \tag{5.18}$$

$$a_1^{(r,2s+1)}=\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^s\cdot\mu_{2s+1}^{(r)}}{\prod_{j=1}^{s}\Delta_{2j+1}} \qquad (s=0,1,2,\cdots) \tag{5.19}$$

$$a_{2s+1}^{(r,2s+1)}=\frac{1}{\Delta_{2s+1}}\left(\mu_{2s+1}^{(r)}+\frac{\lambda}{2}a_{2s-1}^{(r,2s+1)}\right) \qquad (s=1,2,\cdots) \tag{5.20}$$

$$a_{2m+1}^{(r,2s+1)}=\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)\mu_{2m-1}^{(r,2s+1)}}{\Delta_{2m+1}} \qquad (m>s,\ s=0,1,2,\cdots) \tag{5.21}$$

$$a_{2m+1}^{(r,2s+1)}=\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)\cdot a_{2m-1}^{(r,2s+1)}}{\varDelta_{2m+1}}+\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{s-m}\cdot\mu_{2s+1}^{(r)}}{\prod\limits_{j=m}^{s}\cdot\varDelta_{2j+1}} \tag{5.22}$$

$$(s>m;\ m=1,2,3,\cdots)$$

$$\varDelta_1=\omega^2-k^2-\frac{\lambda}{2}-\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{\varDelta_3} \tag{5.23}$$

$$\varDelta_{2m+1}=(2m+1)^2\omega^2-k^2-\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}{\varDelta_{2m+3}}\qquad(m=1,2,3,\cdots) \tag{5.24}$$

算例1　$\omega=p=100$，$\beta=2\times10^4$，$q=3\times10^4$

令　　$\tau=100\sqrt{2}\cdot t$

可化为　　$\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{1}{2}x+x^3=\frac{3}{2}\cos\frac{\tau}{\sqrt{2}}$

用上述诸公式，计算到三次近似周期解为

$$x(t)=1.162429\cos 100t+0.220686\cos 300t+0.026807\cos 500t$$
$$+0.003590\cos 700t+0.000514\cos 900t+0.000081\cos 1100t$$

下面将用本文方法求得此例题的一次、二次、三次近似周期解代入原微分方程，所得残数列表如下，$R_m^{(n)}$代表第n次近似解中的m阶谐波的残数。n次近似解的振幅为$H_n(n=0,1,2,\cdots)$。

表　1

$R_1^{(1)}$	0.124054	$R_1^{(2)}$	−0.038584	$R_1^{(3)}$	−0.000480
$R_3^{(1)}$	−0.053691	$R_3^{(2)}$	−0.004887	$R_3^{(3)}$	0.004621
$R_5^{(1)}$	0.012762	$R_5^{(2)}$	−0.0219164	$R_5^{(3)}$	0.006010
$R_7^{(1)}$	0.073051	$R_7^{(2)}$	−0.027967	$R_7^{(3)}$	0.002204
$R_9^{(1)}$	0.241429	$R_9^{(2)}$	−0.007085	$R_9^{(3)}$	−0.000673
$R_{11}^{(1)}$	−0.003764	$R_{11}^{(2)}$	0.002535	$R_{11}^{(3)}$	−0.000768

第n次与第$n+1$次近似解振幅相对误差为$\delta_{n+1,n}=(H_{n+1}-H_n)/H_n$，计算结果：$\delta_{1,0}=6.967\%$，$\delta_{2,1}=-4.642\%$，$\delta_{3,2}=0.628\%$。

算例2　$p=0$，$\beta=1$，$q=0.2$，$\omega=1$

用本文方法，计算结果为

$$x(t)=1.2103\cos t+0.0658\cos 3t+0.0034\cos 5t$$
$$+0.0001\cos 7t\text{（计算到二次近似）}$$
$$x(t)=-0.2066\cos t-0.0003\cos 3t-0.00000047\cos 5t\quad\text{（计算到一次近似）}$$
$$x(t)=-1.0240\cos t-0.0403\cos 3t-0.0014\cos 5t\quad\text{（计算到二次近似）}$$

文献[11]用电子计算机得到的精确到小数点后第四位数字的精确解为

$$x(t)=1.2103\cos t+0.0658\cos 3t+0.0035\cos 5t+0.0001\cos 7t$$
$$x(t)=-0.2066\cos t-0.0003\cos 3t-0.0000\cos 5t-0.0000\cos 7t$$
$$x(t)=-1.0161\cos t-0.0352\cos 3t-0.0012\cos 5t-0.0000\cos 7t$$

直到目前为止，尚未见到其他作者的大激励作用下强非线性Duffing方程周期解的渐

近解析结果。但是，通过例题的计算表明，本文的方法是可行的。

本文得到李骊教授的指导和关怀，作者表示衷心的感谢。

参 考 文 献

[1] 李正元、钱敏，向量场的旋转度理论及其应用，北京大学出版社，北京（1982）。

[2] Боголюбов Н. Н. и Ю. А. Митропольский, *Асимптотические Методы Нелинейных Колебаний ИЗД 4-е*, М, *Наука* (1974).

[3] 马尔金，И. Г.《非线性振动理论中的李雅普诺夫与邦加来方法》，科学出版社，北京(1959).

[4] Nayfeh and Mook, *Nonlinear Oscillations*, New york (1979).

[5] 徐兆，非线性力学中的一种新的渐近方法，力学学报，17(3)（1985）。

[6] Li Li (李骊), The periodic solution of quasiconservative system, *Proceedings of the Int. conf. on Nonl., Mech.*, Science Press (1985).

[7] Burton, T. D., Nonlinear oscillation limit cycle analysis using a time transformation approach, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 17(1) (1982).

[8] Канторович Л. В. и Т. П. Акилов, 《泛函分析》，高等教育出版社，北京(1984).

[9] 欧阳光中，《数学分析》，高等教育出版社（1985）。

[10] Канторович Л. В. и В. И. Соболев, *Элементы Функционального анализа*, Издательство Наука, Москва (1965).

[11] 林千博，《物理系统中的非线性振动》，东北工学院理论力学教研室译（1980）。

Extension and Application of Newton's Method in Nonlinear Oscillation Theory

Huo Lin-chun

(*Tianjin University, Tianjin*)

Abstract

In this paper we suggest and prove that Newton's method may calculate the asymptotic analytic periodic solutions of strong and weak nonlinear nonautonomous systems, so that a new analytic method is offered for studying strong and weak nonlinear oscillation systems. On the strength of the need of our method, we discuss the existence and calculation of the periodic solution of the second order nonhomogeneous linear periodic system. Besides, we investigate the application of Newton's method to quasi-linear system. The periodic solution of Duffing equation is calculated by means of our method.

Key words Newton's method, resonance, nonresonance, strong nonlinear systems, truncated equations