

# 具有鉴相特性 $g(\varphi) = \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}$ 的三阶锁相环路方程奇点的拓扑结构

金 均

(上海师范大学数学系, 1991年5月13日收到)

## 摘 要

本文研究了具有鉴相特性  $g(\varphi) = \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}$  的三阶锁相环路方程奇点的拓扑结构。

**关键词** 奇点 拓扑结构 鉴相特性 指数渐近稳定 若当型

## 一、引 言

目前,对三阶锁相环路的研究还很少,究其原因,其难度较大,在一个特定的乘积空间中来研究非线性三阶方程的全局定性结构,往往是很难下手的.文[1]采用构造全局稳定的Liapunov函数,分析了具有正切鉴相特性的三阶锁相环路方程的全局定性结构,从数学上提供了为什么具有正切鉴相特性的三阶锁相环路方程没有失锁点的理论依据.但根据实际工作者反映,尽管上述这种锁相环路的性能好,但如何从线路上来实现这种环路仍是一个问题.W. C. Lindsey<sup>[2]</sup>提出了鉴相特性为

$$g(\varphi) = \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi} \quad (0 \leq k < 1) \quad (1.1)$$

的环路设计,并指出这种锁相环路是能够用线路来实现的.本文研究了具有鉴相特性(1.1)的三阶锁相环路方程奇点的拓扑结构,并由此评价这种环路的性能的好坏.

## 二、锁相环路方程

正如文献[3]所述,基本锁相环路方程为

$$S\varphi = \Omega_c K_F(s) F(\varphi) = \Omega_c \quad (S = d/dt) \quad (2.1)$$

这里  $K_F(s)$  为低通滤波器的传递函数,  $F(\varphi)$  为规格化的鉴相特性,  $\Omega_c, \Omega_0$  为正实数.

(a) 当采用理想积分滤波器时,其传递函数为

$$K_F(s) = 1 + a/s + b/s^2 \quad (a > 0, b > 0) \quad (2.2)$$

把(1.1)、(2.2)代入(2.1),得

$$S^3\varphi + \Omega_c S^2 g(\varphi) + \Omega_c a S g(\varphi) + \Omega_c b g(\varphi) = 0$$

\* 蔡树棠推荐.

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & \frac{d^3\varphi}{dt^3} + \Omega_0 \left\{ \frac{(1+k)\sin\varphi(k\cos\varphi+2k^2-1)}{(1+k\cos\varphi)^3} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{(1+k)(k+\cos\varphi)}{(1+k\cos\varphi)^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \right\} \\ & + \Omega_0 a \frac{(1+k)(k+\cos\varphi)}{(1+k\cos\varphi)^2} \frac{d\varphi}{dt} + \Omega_0 b \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi} = 0 \end{aligned}$$

化简后即得

$$\begin{aligned} & \frac{d^3\varphi}{dt^3} + \Omega_0 \frac{(1+k)(k+\cos\varphi)}{(1+k\cos\varphi)^2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Omega_0 \left[ a \frac{(1+k)(k+\cos\varphi)}{(1+k\cos\varphi)^2} \right. \\ & \left. + \frac{(1+k)\sin\varphi(k\cos\varphi+2k^2-1)}{(1+k\cos\varphi)^3} \frac{d\varphi}{dt} \right] \frac{d\varphi}{dt} + b\Omega_0 \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

若记  $\frac{(1+k)(k+\cos\varphi)}{(1+k\cos\varphi)^2} = h(\varphi)$ , 则  $\frac{(1+k)\sin\varphi(k\cos\varphi+2k^2-1)}{(1+k\cos\varphi)^3} = h'(\varphi)$ , (2.3)可表示为

$$\frac{d^3\varphi}{dt^3} + \Omega_0 h(\varphi) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Omega_0 \left[ ah(\varphi) + h'(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right] \frac{d\varphi}{dt} + b\Omega_0 g(\varphi) = 0 \quad (I)$$

(b) 当采用滞后、超前网络滤波器时<sup>[4]</sup>, 其传递函数为

$$K_F(s) = \frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+T_3s)(1+T_4s)} \quad (2.4)$$

其中  $T_1=R_1C_1$ ,  $T_2=R_2C_2$ ,  $T_1T_2=T_3T_4$ ,  $T_3+T_4=T_1+T_2(1+R_1/R_2)$ ,  $R_1, R_2, C_1, C_2$ 均为正常数, 把(2.4), (1.1)代入(2.1), 得

$$S\varphi + \Omega_0 \frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+T_3s)(1+T_4s)} \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi} = \Omega_0.$$

$$\begin{aligned} \text{经运算得} \quad & \frac{d^3\varphi}{dt^3} + \left[ \frac{T_3+T_4}{T_3T_4} + \frac{T_1T_2}{T_3T_4} \Omega_0 h(\varphi) \right] \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[ \frac{1}{T_3T_4} + \frac{T_1T_2}{T_3T_4} \Omega_0 h'(\varphi) \right] \frac{d\varphi}{dt} \\ & + \frac{T_1+T_2}{T_3T_4} \Omega_0 h(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\Omega_0}{T_3T_4} g(\varphi) - \frac{\Omega_0}{T_3T_4} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

记  $\frac{T_3+T_4}{T_3T_4} = \beta$ ,  $\frac{1}{T_3T_4} = \alpha$ ,  $\frac{T_1+T_2}{T_3T_4} = \gamma$ , 则(2.5)可写成

$$\begin{aligned} & \frac{d^3\varphi}{dt^3} + [\beta + \Omega_0 h(\varphi)] \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \left[ \alpha + \gamma \Omega_0 h(\varphi) + \Omega_0 h'(\varphi) \frac{d\varphi}{dt} \right] \frac{d\varphi}{dt} \\ & + \alpha \Omega_0 g(\varphi) - \alpha \Omega_0 = 0 \end{aligned} \quad (I)$$

### 三、环路方程(I)的奇点拓扑结构

把环路方程(I)化为等价方程组<sup>[6]</sup>:

$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\Omega_0 h(\varphi)y + z, \quad \frac{dz}{dt} = -b\Omega_0 g(\varphi) - a\Omega_0 h(\varphi)y \quad (3.1)$$

由于(3.1)的右端是关于 $\varphi$ 的周期为 $2\pi$ 的周期函数, 故我们在相空间

$H: \{-\pi < \varphi < \pi, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < +\infty\}$ 上讨论. 在 $H$ 上(3.1)有唯一的奇点 $M(0,0,0)$ , 为了研究 $M$ 的拓扑结构, 我们考虑(3.1)的首次近似方程

$$\frac{d\varphi}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\Omega_0 y + z, \quad \frac{dz}{dt} = -b\Omega_0 \varphi - a\Omega_0 y \quad (3.2)$$

(3.2)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\Omega_c - \lambda & 1 \\ -b\Omega_c & -a\Omega_c & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \Omega_c \lambda^2 - b\Omega_c \lambda - a\Omega_c = 0$$

$$\text{即 } \lambda^3 + \Omega_c \lambda^2 + a\Omega_c \lambda + b\Omega_c = 0 \quad (3.3)$$

因为  $a, b, \Omega_c$  均为正数, 所以根据洛茨-霍尔维茨条件, 只要有  $a\Omega_c - b > 0$ , 则 (3.3) 均有负实部的根, 即  $\text{Re}\lambda_i < 0 (i=1, 2, 3)$ . 因此 (3.2) 的零解是指数渐近稳定的, 根据 Liapunov 按首次近似决定稳定性定理知道 (3.1) 的零解亦是渐近稳定的.

由于 (3.2) 的系数阵之行列式的值为  $-b\Omega_c \neq 0$ , 所以 (3.2) 的系数矩阵经过非奇异线性变换化为若当型后, 可有四种类型:

- (i) 有三个初等因子; (ii) 有二个初等因子;  
(iii) 有一个初等因子; (iv) 一个实根, 一对共轭复根.

$$\text{即 } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

其中  $\lambda_i (i=1, 2, 3), \mu$  均为实数, 根据文献[6]第五章§1知, 对于前三种情况 (i), (ii), (iii), 奇点  $M(0, 0, 0)$  是稳定的结点; 对于 (iv), 奇点  $M$  是稳定的结点焦点. 再则 (3.3) 的根都具有负实部, 所以  $\lambda_i (i=1, 2, 3)$  在复平面上的位置不可能构成一包含原点在内的三角形. 如果再假定不存在非负整数  $m_2, m_3, m_2 + m_3 > 1$ , 使得  $m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 = \lambda_1$ , 那么我们立即得到下面的定理.

**定理1** 如果  $a > 0, b > 0, \Omega_c > 0, a\Omega_c - b > 0$ . 且不存在非负整数  $m_2, m_3, m_2 + m_3 > 1$ , 使得  $m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 = \lambda_1$ , 则系统 (3.1) 的奇点  $M(0, 0, 0)$  的拓扑结构与 (3.2) 的奇点的拓扑结构一致.

#### 四、环路方程(II)奇点的拓扑结构

把 (II) 化为等价方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= y = \Phi(\varphi, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = -[\beta + \Omega_c h(\varphi)]y + z = Y(\varphi, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= -[a\Omega_c g(\varphi) - a\Omega_0] - [\alpha + \gamma\Omega_c h(\varphi)]y = Z(\varphi, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

我们在相空间  $H: \{-\pi < \varphi < \pi, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty\}$  上讨论. 为了便于分析系统

(4.1) 在  $H$  上的奇点, 我们令  $y = f(\varphi, k) = \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}$ , 显然,  $y = f(\varphi, k)$  有以下性质:

(a)  $f(0, k) = 0, f(\varphi + 2\pi, k) = f(\varphi, k), f(-\varphi, k) = -f(\varphi, k)$ . 所以要分析  $f(\varphi, k)$  在  $-\pi < \varphi < \pi$  上的性质, 只要在  $0 \leq \varphi < \pi$  上讨论即可.

(b)  $y = f(\varphi, k)$  在  $\varphi = \varphi^*$  处取极值,  $\varphi^*$  满足  $\cos\varphi^* = -k, 0 < \varphi^* < \pi$ .

当  $0 < \varphi < \varphi^*$  时,  $\cos\varphi > -k, f'_\varphi(\varphi, k) > 0$ ; 当  $\varphi^* < \varphi < \pi$  时,  $\cos\varphi < -k, f'_\varphi(\varphi, k) < 0$ .

$$f(\varphi^*, k) = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}$$

(c)  $\frac{\partial f(\varphi, k)}{\partial k} = \frac{\sin\varphi(1 - \cos\varphi)}{(1 + k\cos\varphi)^2}$ , 当  $0 < \varphi < \pi$  时,  $\frac{\partial f(\varphi, k)}{\partial k} > 0$ , 即当  $k_1 > k_2$  时, 有

$f(\varphi, k_1) > f(\varphi, k_2)$ , 且当  $k$  增加时, 曲线在  $0 \leq \varphi < \pi$  上的最高点向右移, 当  $k \rightarrow 1$  时,  $\varphi^* \rightarrow \pi$ .  $y = f(\varphi, k)$  的图象如图1所示. 为了求  $\Omega_c g(\varphi) - \Omega_0 = 0$  的根, 只要求  $\frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi} = \frac{\Omega_0}{\Omega_c}$  的根, 也就是求曲线  $y = f(\varphi, k)$  与直线  $y = \Omega_0/\Omega_c$  的交点的横坐标, 如图2所示.

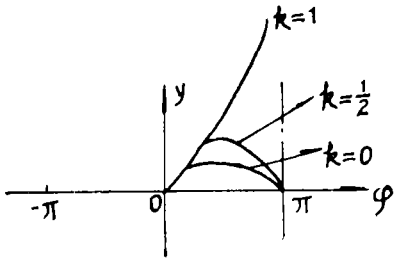


图 1

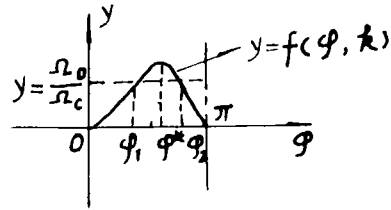


图 2

由性质(c)知, 如果直线  $y = \Omega_0/\Omega_c$  与曲线  $y = f(\varphi, k_1)$  有两个交点, 则直线  $y = \Omega_0/\Omega_c$  与  $y = f(\varphi, k)$  ( $k_1 < k < 1$ ) 都有二个交点. 由此可得下面二个引理<sup>[3]</sup>.

**引理1** 如果  $\Omega_0 \leq \Omega_c$ , 则  $f(\varphi, k) = \Omega_0/\Omega_c$  ( $0 < k < 1$ ) 都有二个根  $\varphi_1, \varphi_2$  (见图2), 即系统(4.1)有二个奇点,  $M_1(\varphi_1, 0, 0), M_2(\varphi_2, 0, 0)$ .

**引理2** 如果  $\Omega_0 > \Omega_c$ , 记  $k^* = \frac{\Omega_0^2 - \Omega_c^2}{\Omega_0^2 + \Omega_c^2}$ , 则

当  $0 < k < k^*$  时, 系统(4.1)无奇点; 当  $k = k^*$  时, 系统(4.1)有一个奇点;

当  $k^* < k < 1$  时, 系统(4.1)有二个奇点, 这是由  $f(\varphi^*, k) = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \leq \frac{\Omega_0}{\Omega_c}$  或  $f(\varphi^*, k) > \Omega_0/\Omega_c$  所决定.

现在我们讨论有两个奇点的情况. 首先研究  $M_1(\varphi_1, 0, 0)$  的拓扑结构. 为此考虑(4.1)的首次近似方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{\partial(\Phi, Y, Z)}{\partial(\varphi, y, z)} \Big|_{(\varphi_1, 0, 0)} \begin{pmatrix} \varphi \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(\beta + \Omega_c h(\varphi_1)) & 1 \\ -\alpha \Omega_c h(\varphi_1) & -(\alpha + \gamma \Omega_c h(\varphi_1)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi - \varphi_1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\left(\beta + \Omega_c \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2}\right) y + z \\ \frac{dz}{dt} = -\alpha \Omega_c \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2} (\varphi - \varphi_1) - \left(\alpha + \gamma \Omega_c \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2}\right) y \end{cases} \quad (4.2)$$

系统(4.2)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\left(\beta + \Omega_c \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2}\right) - \lambda & 1 \\ -\alpha \Omega_c \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2} & -\left(\alpha + \gamma \Omega_c \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2}\right) & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad & \lambda^3 + \left( \beta + \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2} \right) \lambda^2 + \left( \alpha + \gamma \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2} \right) \lambda \\ & + \alpha \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

因为  $f(\varphi, k)$  在  $(0, \varphi^*)$  上是严格递增函数,  $f'_\varphi(\varphi_1, k) = \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2} > 0 (\varphi_1 \in (0, \varphi^*))$ . 所以特征方程(4.3)的系数均为正数. 又由于  $\left( \beta + \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2} \right) \left( \alpha + \gamma \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2} \right) - \alpha \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2} = \beta \left[ \alpha + \gamma \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2} \right] + \gamma \Omega_o^2 \frac{(1+k)^2(k+\cos\varphi_1)^2}{(1+k\cos\varphi_1)^4} > 0$ . 因此特征方程(4.3)均有负实部的根. 而(4.2)的系数行列式之值为  $-\alpha \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_1)}{(1+k\cos\varphi_1)^2} \neq 0$ . 所以(4.2)的系数矩阵经过非奇异线性变换, 化为若当标准型后, 仍有四种可能的类型, 因此根据[6]知(4.2)的奇点  $M_1(\varphi_1, 0, 0)$  或者是稳定的结点, 或者是稳定的结点-焦点. 从而针对非线性方程组(4.1)我们有下面的结论.

**定理2** 如果不存在非负整数  $m_2, m_3, m_2 + m_3 > 1$ , 使得  $m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 = \lambda_1$ , 则系统(4.1)的奇点  $M_1$  的拓扑结构与系统(4.2)的奇点  $M_1$  的拓扑结构一致.

对于奇点  $M_2(\varphi_2, 0, 0)$ , 可以用类似的方法进行讨论. 这时(4.1)的首次近似方程的,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= y, \quad \frac{dy}{dt} = - \left( \beta + \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_2)}{(1+k\cos\varphi_2)^2} \right) y + z \\ \frac{dz}{dt} &= -\alpha \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_2)}{(1+k\cos\varphi_2)^2} (\varphi - \varphi_2) - \left( \alpha + \gamma \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_2)}{(1+k\cos\varphi_2)^2} \right) y \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

其特征方程为

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \left[ \beta + \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_2)}{(1+k\cos\varphi_2)^2} \right] \lambda^2 + \left[ \alpha + \gamma \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_2)}{(1+k\cos\varphi_2)^2} \right] \lambda \\ + \alpha \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_2)}{(1+k\cos\varphi_2)^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

因为  $f(\varphi, k)$  在  $(\varphi^*, \pi)$  上是严格递减函数, 所以

$$f'_\varphi(\varphi_2, k) = \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_2)}{(1+k\cos\varphi_2)^2} < 0 \quad (\varphi_2 \in (\varphi^*, \pi)).$$

所以(4.5)具有正实部的特征根. 因此  $M_2(\varphi_2, 0, 0)$  是不稳定奇点. (4.4)的系数行列式之值为  $-\alpha \Omega_o \frac{(1+k)(k+\cos\varphi_2)}{(1+k\cos\varphi_2)^2} \neq 0$ , 所以(4.4)的系数矩阵经过非奇异线性变换后, 化为若当标准型, 仍有四种可能:

(i) 有三个初等因子:  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ , 若  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  同为正号则  $M_2$  是不稳定结点, 若两根同号, 一根反号, 则  $M_2$  是鞍点.

(ii) 有二个初等因子:  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ , 若  $\lambda_1, \lambda_3$  同为正号, 则  $M_2$  是不稳定结点, 若

$\lambda_1, \lambda_3$ 反号, 则 $M_2$ 是鞍点.

(iii) 有一个初等筒子:  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ , 这时 $M_2$ 为不稳定结点.

(iv) 有一个实根, 一对共轭复根:  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ , 这时若 $\lambda_1$ 与 $\lambda_3$ 同为正号,  $M_2$ 为不稳定的结点-焦点; 若 $\lambda_1$ 与 $\lambda_3$ 反号, 则 $M_2$ 为鞍点-焦点. 这里我们没有考虑 $\lambda_1=0$ 的情况. 若 $\lambda_1=0$ , 则可同样进行讨论. 对于系统(4.1), 我们有下面的定理.

**定理3** 如果(4.4) 没有零实部的特征根, 且 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 之间没有线性关系, 则(4.1)的奇点 $M_2(\varphi_2, 0, 0)$ 的拓扑结构与线性系统(4.4)的奇点 $M_2(\varphi_2, 0, 0)$ 的拓扑结构一致.

## 五、结 束 语

综上所述, 具有鉴相特性(1.1)的锁相环路, 尽管能够用线路来实现, 但它有跳周现象, 有严重的失锁点. 因此这种鉴相特性的环路设计仍有很大的缺陷, 有待于改进!

## 参 考 文 献

- [1] 王联、王慕秋、陆志奇, 具有正切鉴相特性的三阶锁相环路的定性分析, 应用数学学报, 7(5) (1984).
- [2] Lindsey, W. C., *Synchronization System in Communication and Control*, Chapter 3, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (1972), 16, 121—122.
- [3] 王联、王慕秋, 《非线性常微分方程定性分析》, 哈尔滨工业大学出版社 (1987).
- [4] 顾耀琪, 《锁相》, 科学出版社 (1975).
- [5] 秦元勋, 《微分方程所定义的积分曲线》, 上册, 科学出版社 (1959).

## Topological Structure of the Singular Points of the Third Order Phase Locked Loop Equations with the Character of Detected Phase Being $g(\varphi) = (1+k)\sin\varphi/(1+k\cos\varphi)$

Jin Jun

(Shanghai Teachers University, Shanghai)

### Abstract

In this paper, we study the topological structure of the singular points of the third order phase locked loop equations with the character of detected phase

being  $g(\varphi) = \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\cos\varphi}$ .

**Key words** singular point, topological structure, character of detected phase, exponentially asymptotically stable, Jordan form