

# 一种有效的分析弹塑性问题的边界元法\*

胡 宁

(重庆大学工程力学系, 1991年5月20日收到)

## 摘 要

本文提出了一组有效的边界元公式. 该公式通过利用一个新的变量, 使核函数仅具有 $\ln r$ ( $r$ 为源点和场点的距离)的较低阶奇异性, 从而, 在积分点的传统位移和应力公式的奇异性得到降低, 且原公式中影响应力计算精度的边界层效应得到消除. 同时, 也避免了难于计算的参数 $C$ . 将该方法应用到弹塑性分析中, 数值分析结果表明该公式具有明显的优势.

**关键词** 边界元方法 弹塑性问题 数值解

## 一、引 言

随着边界元方法的发展, 利用该方法使许多工程问题得到解决. 但是在传统方法中存在着许多缺点. 通过分析弹性问题的基本解, 我们可以看到, 积分点的位移和应力分别具有一阶和二阶奇异性, 当源点离场点很近时, 用这些公式计算位移和应力时有明显的误差. 一般来说, 在靠近边界一个单元长度的范围内, 位移, 特别是应力都很难有效地计算出来<sup>[1]</sup>. 但实际上, 诸如孔洞和槽口等许多工程问题, 高应力梯度一般都出现在边界附近, 而正是这些应力集中导致了工程结构的破坏. 所以, 克服原公式的弱点, 有效地计算边界点的应力是十分重要的.

以前, 许多学者从不同的方面对奇异积分的计算进行过有益的研究. Alibadi和Hall<sup>[2]</sup>将核函数展开成泰勒级数, 并在曲线边界下对奇异积分进行了讨论, 该方法的关键是如何选择合适的加权函数; Li Hong-bao和Han Guo-ming<sup>[3]</sup>利用高阶单元, 并通过将单元划分成子单元对积分区域进行转换来计算奇异积分; Madhukar Vable<sup>[4]</sup>利用多项式来表达奇异积分, 并通过确定其系数来计算它, 但该方法仅局限于直线单元; 另外Cruse<sup>[5]</sup>和Lachat<sup>[6]</sup>在这一领域也进行过一些研究. 但是, 上面的工作一般都集中在插值函数的选取, 积分区域的转换和核函数的多项式展开上, 而核函数的奇异性并未从本质上得到改变和降低. Ghosh等<sup>[8]</sup>曾建议在传统方程中使用具有低阶奇异性的核函数, Okada<sup>[9]</sup>等也提出了位移梯度的新的直接积分方程, 这些技术有效地降低了原公式中的奇异性, 但他们的讨论仅局限在弹性范围内. 本文通过利用Ghosh建议的两个核函数来进行边界元弹塑性分析, 计算结果表明能有效地降低原公式的奇异性 and 提高计算精度.

\* 丁浩江推荐.

## 二、弹性体分析的BEM公式

在平面应变问题中, 有区域 $\Omega$ 如图1所示, 有

$$r = \sqrt{(\xi_1 - x_1)(\xi_1 - x_1)} = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial r}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} n_2 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\xi_i - x_i}{r} \quad (2.3)$$

$$\tan \phi = (\xi_2 - x_2) / (\xi_1 - x_1) \quad (2.4)$$

其中 $\phi$ 为源点 $P$ 和场点 $Q$ 的直线与过源点 $P$ 且平行于 $x_1$ 轴的直线 $P\hat{P}$ 之间的夹角, 直线 $P\hat{P}$ 与区域 $\Omega$ 的边界 $\partial B$ 的交点是 $\hat{P}$ (当交点不止一个时, 我们选择离源点最远的一点), 按下面过程对(2.4)式变分,

$$\sec^2 \phi \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{1}{(\xi_1 - x_1)} \frac{\partial \xi_2}{\partial s} - \frac{\xi_2 - x_2}{(\xi_1 - x_1)^2} \frac{\partial \xi_1}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\xi_1 - x_1}{r^2} n_1 + \frac{\xi_2 - x_2}{r^2} n_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.5)$$

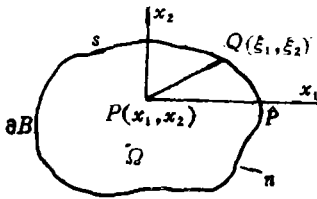


图 1

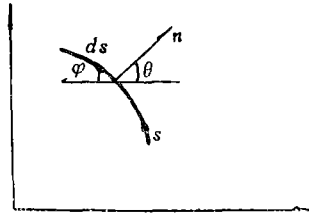


图 2

对照图2, 可以看出

$$r_{,1} = \cos \phi, \quad r_{,2} = \sin \phi, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} r_{,i} r_{,j} = \frac{\partial f_{ij}(\phi)}{\partial s} \quad (2.6)$$

$$f_{ij}(\phi) = \int_0^\phi \frac{\partial \phi}{\partial s} r_{,i} r_{,j} ds = \int_0^\phi r_{,i} r_{,j} d\phi \quad (2.7)$$

综合上面诸式, 可得

$$f_{ij}(\phi) = \frac{1}{2} \phi \delta_{ij} + \frac{1}{4} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_{jk} r_{,i} r_{,k} \quad (2.8)$$

$$r_{,j} n_i - r_{,i} n_j = \epsilon_{ij} \partial r / \partial s \quad (2.9)$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0, \quad \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1 \quad (2.10)$$

将它们代入基本解有

$$P_{ii}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial s} (1-2\nu) \delta_{ij} + 2 \frac{\partial f_{ij}(\phi)}{\partial s} + (1-2\nu) \epsilon_{ij} \frac{\partial \ln r}{\partial s} \right] \quad (2.11)$$

定义

$$\begin{aligned} R_{ij} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \{ (1-2\nu)\phi\delta_{ij} + 2f_{ij}(\phi) + (1-2\nu)\epsilon_{ij}\ln r \} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ 2(1-\nu)\phi\delta_{ij} + \frac{1}{2}\epsilon_{ij} + \epsilon_{jkl} r_{,i} r_{,k} + (1-2\nu)\epsilon_{ij}\ln r \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

所以有

$$\begin{aligned} \int_r P_{ij}^* u_j ds &= \int_r \frac{dR_{ij}}{ds} u_j ds = \int_r -u_j dR_{ij} = [u_j R_{ij}]_0^{2\pi} - \int_r R_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial s} ds \\ &= -u_j(\hat{P})\delta_{ij} - \int_r R_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial s} ds = -u_i(\hat{P}) - \int_r R_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial s} ds \end{aligned} \quad (2.13)$$

定义

$$\begin{aligned} W_{ij}^* &= -R_{ij} - \epsilon_{ij}/8\pi(1-\nu) \\ \int_r P_{ij}^* u_j ds &= -u_i(\hat{P}) + \int_r \left( W_{ij}^* + \frac{\epsilon_{ij}}{8\pi(1-\nu)} \right) \frac{\partial u_j}{\partial s} ds \\ &= -u_i(\hat{P}) + \int_r W_{ij}^* \frac{\partial u_j}{\partial s} ds \end{aligned} \quad (2.14)$$

将上式代入边界积分方程，最后得到具有低阶奇异性的边界元方程，

$$u_i(P) - u_i(\hat{P}) + \int_r W_{ij}^* \frac{\partial u_j}{\partial s} ds = \int_r u_{ij}^* P_j ds \quad (2.15)$$

而边界点的方程为

$$\int_r u_{ij}^* P_j ds = \int_r W_{ij}^* \frac{\partial u_j}{\partial s} ds \quad (2.16)$$

对于光滑和非光滑边界，其形式完全一样。所以我们可以看出，该方程由于不象原方程那样含有 $C_{ij}$ ，所以非常简单。在求得边界点位移之后，利用方程(2.15)式可求得内点位移。将方程(2.15)代入内点应力公式可求得内点应力，

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + G \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \int_r D_{kij} P_k ds - \int_r S'_{kij} \frac{\partial u_k}{\partial s} ds \quad (2.17)$$

其中 $D_{kij}$ 和 $S'_{kij}$ 为

$$D_{kij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu)[r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{kj} - r_{,k}\delta_{ij}] + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} S'_{kij} &= \frac{G}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ 2(1-\nu) \left( \frac{2\nu}{1-2\nu} \phi_{,k}\delta_{ij} + \phi_{,j}\delta_{ik} + \phi_{,i}\delta_{jk} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1-2\nu) \left( \frac{2\nu}{1-2\nu} r_{,i}\delta_{ij}\epsilon_{lk} + r_{,j}\delta_{ik} + r_{,j}\epsilon_{jk} \right) + N \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$N = \epsilon_{km} \cdot \left( \frac{2\nu}{1-2\nu} r_{,m}\delta_{ij} + 2r_{,m}\delta_{ij} + r_{,i}\delta_{jm} + r_{,j}\delta_{mi} - 2r_{,i}r_{,j}r_{,m} \right) \quad (2.20)$$

可以看出, 第一,  $W_{ik}^*$  和  $u_{ik}^*$  具有  $r$  的相同阶奇异性, 即仅具有  $\ln r$  阶奇异性, 低于  $P_{ik}^*$  的  $1/r$  阶奇异性, 所以新公式使由于积分项  $\int_{\Gamma} [P_{ik}^* u_k] ds$  的强奇异性而导致的计算误差得到降低, 第二, 即使对于非光滑边界, 新公式也不象原公式那样含有张量  $C_{ij}$ , 这避免了计算边界张量  $C_{ij}$  的麻烦; 第三, 应力公式的奇异性得到降低, 因此, 用原公式计算应力时的“边界层”效应得到消除. 所有这些特点使该方法在处理应力集中问题时具有明显的优势.

### 三、弹塑性分析的BEM公式

我们将上面的思想应用于弹塑性分析, 所以原公式可改写成

$$\int_{\Gamma} u_{ij}^* \dot{P}_j ds - \int_{\Gamma} W_{ij}^* \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial s} ds - \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \dot{\sigma}_{jk}^p d\Omega - \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega = 0 \quad (3.1)$$

这就是初始应力的新的边界元公式, 积分点的应力也可由下式给出,

$$\dot{\sigma}_{ij}(x_0) = \int_{\Gamma} \left( D_{kij} \dot{P}_k - S'_{kij} \frac{\partial \dot{u}_k}{\partial s} \right) ds + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \dot{\sigma}_{kl}^p d\Omega + g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^p) \quad (3.2)$$

对(3.1)和(3.2)式可以很方便地进行离散. 我们特别讨论一下对塑性区的离散, 即对可能的塑性区进行离散. 我们定义单元数为  $N_e$ , 每个单元的结点数为  $\bar{M}$ , 且用  $\bar{N}_e$  个单元对可能的

塑性区  $\Omega_p$  进行离散, 所以存在关系  $\Omega_p = \sum_{e=1}^{\bar{N}_e} \Omega_e$ , 在该区域中, 总的结点数为  $N_i$ ,

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(x_0, x(\xi)) N^a(\xi) d\Gamma \dot{P}_j^{e_a} - \int_{\Gamma_e} W_{ij}^*(x_0, x(\xi)) N^a(\xi) d\Gamma \frac{\partial \dot{u}_j^{e_a}}{\partial s} ds - \int_{\Gamma_e} b_i(x_0, x(\xi)) d\Gamma \right\} + \sum_{e=1}^{\bar{N}_e} \int_{\Omega_e} \varepsilon_{ijk}^*(x_0, x(\xi)) \bar{N}^{\beta}(\xi) d\Omega \dot{\sigma}_{kl}^{\beta} = 0, \quad x_0 \in \Gamma \quad (3.3)$$

其中

$$\int_{\Omega} u_{ij}^*(x_0, x(\xi)) b_j d\Omega = \int_{\Gamma} b_i(x_0, x(\xi)) d\Gamma, \quad x_0 \in \Gamma$$

在塑性区  $x_0 \in \Omega_p$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}(x_0) = & \sum_{e=1}^{N_e} \left\{ \int_{\Gamma_e} d_{ijk}^*(x_0, x(\xi)) N^a(\xi) d\Gamma \dot{P}_k^{e_a} - \int_{\Gamma_e} S'_{ijk}^*(x_0, x(\xi)) N^a(\xi) d\Gamma \frac{\partial \dot{u}_k^{e_a}}{\partial s} ds \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_e} b_{ij}(x_0, x(\xi)) d\Gamma \right\} + \sum_{e=1}^{\bar{N}_e} \int_{\Omega_e} \varepsilon_{ijk}^*(x_0, x(\xi)) \bar{N}^{\beta}(\xi) d\Omega \dot{\sigma}_{kl}^{\beta} + g_{ij}(x_0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中

$$\int_{\Omega} d_{ij}^*(x_0, x(\xi)) b_k d\Omega \equiv \int_{\Gamma} \delta_{ij}(x_0, x(\xi)) d\Gamma$$

上面方程的最后矩阵形式为

$$\sum_{e=1}^N \left[ [G]^e \{\dot{P}\}^e - [W]^e \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial s} \right\}^e + \{\dot{b}\}^e \right] + \sum_{e=1}^{N_e} [Q]^e \{\dot{\sigma}^p\}^e = 0, \quad (i=1, \dots, N_p) \quad (3.5)$$

$$\{\dot{\sigma}\}_i = \sum_{e=1}^{N_e} \left[ [D]^e \{\dot{P}\}^e - [S]^e \left\{ \frac{\partial \dot{u}}{\partial s} \right\}^e + \{\dot{b}\}^e \right] + [\bar{Q}]^e \{\dot{\sigma}^p\}^e + [\bar{C}] \{\dot{\sigma}^p\}, \quad (i=1, \dots, N_i) \quad (3.6)$$

在方程(3.6)中,  $g_{ij}(x_0)$  已用  $\dot{\sigma}^p$  表达。仅用方程(3.5)和(3.6)进行求解是不够的, 因为方程(3.6)式仅对内点有效, 但在(3.5)和(3.6)式中都有边界点的应力出现。因此, 必须补充求解边界点应力的公式。我们按文献[12]中讨论的公式, 有

$$\{\dot{\sigma}\} = [G_0] \{\dot{P}\} - [H_0] \{\dot{u}\}^e + [\bar{Q}_0] \{\dot{\sigma}^p\} \quad (3.7)$$

其中  $\{\dot{u}\}^e$  项可按式计算,

$$\dot{u}_i(\hat{P}_2) - \dot{u}_i(\hat{P}_1) = \int_{\hat{P}_1}^{\hat{P}_2} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial s} ds \quad (3.8)$$

其中  $\hat{P}_2$  和  $\hat{P}_1$  为边界点。对于实际问题, 有些边界点, 如约束点的位移总是已知的, 所以在  $\dot{u}_i(\hat{P}_1)$  已知之后,  $\dot{u}_i(\hat{P}_2)$  很容易得到, 内点位移由下式求得,

$$\dot{u}_i(P) - \dot{u}_i(\hat{P}) = \sum_{e=1}^N \left[ \int_{\Gamma_e} [u_i^* ; N_i^T] \dot{P}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_e} [W_i^* ; N_i^T] \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial s} d\Gamma \right] \quad (3.9)$$

其中  $\hat{P}$  为边界点。在方程(3.9)中, 除了  $[W]^e$  之外, 其它矩阵均按传统方法形成。正如我们上面讨论的,  $[W]^e$  矩阵的奇异性, 比传统方法中由  $P_i^*$  形成的  $[H]^e$  阵的奇异性低, 所以积分精度得到提高。在计算过程中, 利用  $(\partial \dot{u}_i / \partial s)_{\hat{P}_2}$  和  $(\partial \dot{u}_i / \partial s)_{\hat{P}_1}$  的值和常用的积分公式可求

得  $\int_{\hat{P}_1}^{\hat{P}_2} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial s} ds$ , 如果单元长度被限制在一定的范围内, 其积分精度可以得到保证。最后, 边界点的应力可以综合方程(3.7)和(3.8)求得,

$$\{\dot{\sigma}\} = [G_0] \{\dot{P}\} - [H_0] \{\partial \dot{u} / \partial s\}^e + [\bar{Q}_0] \{\dot{\sigma}^p\} \quad (3.10)$$

综合方程(3.5), (3.6)和(3.10), 最后的弹塑性边界元的形式为

$$[A] \{\dot{x}\} = \{\dot{f}\} + [Q] \{\dot{\sigma}^p\} \quad (3.11)$$

$$\{\dot{\sigma}^e\} = -[\bar{A}] \{\dot{x}\} + \{\dot{f}\} + [\bar{Q}] \{\dot{\sigma}^p\} \quad (3.12)$$

方程(3.12)由方程(3.10)和(3.6)综合而得, 同时, 我们也利用了方程  $\{\dot{\sigma}\} = \{\dot{\sigma}^e\} - [I] \{\dot{\sigma}^p\}$ , 而自由项  $g_{ij}(\dot{\sigma}^p)$  被合并进了矩阵  $[\bar{Q}]$  中。从方程(3.11)可以得到

$$\{\dot{x}\} = \{\dot{m}\} + [K] \{\dot{\sigma}^p\} \quad (3.13)$$

$$\{\dot{m}\} = [A]^{-1} \{\dot{f}\} \quad (3.14)$$

$$[K] = [A]^{-1} [Q] \quad (3.15)$$

将方程(3.13)代入方程(3.12), 最后可以得到

$$\{\dot{\sigma}^e\} = [B] \{\dot{\sigma}^p\} + \{\dot{y}\} \quad (3.16)$$

其中,

$$[B] = [\bar{Q}] - [\bar{A}][K], \{\dot{y}\} = \{\dot{f}\} - [\bar{A}]\{m\} \quad (3.17)$$

方程(3.13)和(3.16)为弹塑性边界元方法的初应力迭代格式。

#### 四、计算例证

(1) 我们首先对一弹性问题进行分析, 它是一带有孔洞的方形板的平面应变问题, 所受拉力为单位力, 材料常数为  $E=5.0$ ,  $\nu=0.3$ , 其结构如图3所示, 我们用新的边界元方法对其进行分析, 其结果如图4和图5所示。为了显示“边界层”效应的消失, 我们选择C点的应力进行比较, 从表1中可以看出, “边界层”效应得到有效控制。

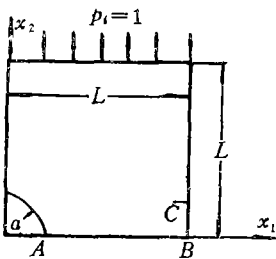


图 3

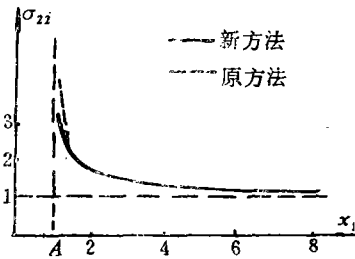


图 4

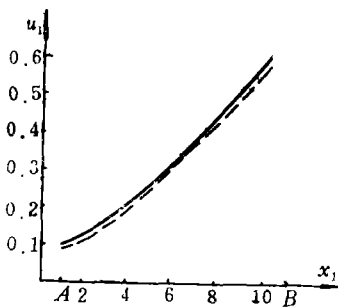


图 5

表1 在  $C(x_2=2)$  附近的应力

$C(x_1)$ 的坐标	新方法的 $\sigma_{22}$	原方法的 $\sigma_{22}$
9.0000	1.0001	0.9975
9.8000	0.9990	0.9800
9.9500	0.9875	-4.9865
9.9950	0.9247	35.4247
9.9995	7.2245	41.8355

(2) 在第2例子中, 通过利用Tresca屈服准则, 我们对等向强化材料的受内压圆筒进行了分析, 基本材料常数为  $E=500000\text{N/cm}^2$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\sigma_0=240.3876\text{N/cm}^2$ ,  $a=100\text{cm}$ ,  $b=200\text{cm}$ , 将所得结果分别与传统方法进行比较, 可以看出, 该方法分析弹塑性问题也是十分有效的。

#### 五、结 论

本文通过利用两个新的核函数, 使积分方程的奇异性得到降低, 以算例可以看到, “边界层”效应得到降低, 计算精度得到提高。

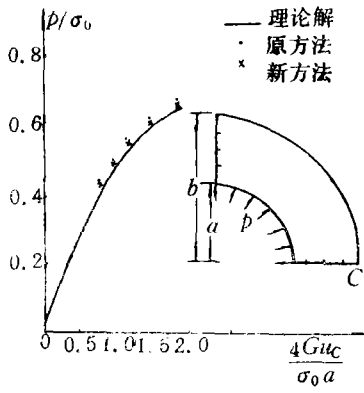


图 6

表 2

$p/\sigma_0=0.6242, p=150\text{N/cm}^2$

	半径 $r$	100	125	150	175
$10^4 u_r$	理论解	82.700	66.111	57.330	52.399
	原方法解	82.752	66.180	57.352	52.412
	新方法解	82.734	66.131	57.344	52.405
$\sigma_\theta$	理论解	9.0191	14.3742	18.7500	15.5661
	原方法解	9.0200	14.3061	18.721	15.502
	新方法解	9.0190	14.3512	18.7333	15.5443
$\sigma_r$	理论解	-14.9811	-9.6263	-5.2500	-2.0661
	原方法解	-14.9801	-9.693	-5.2781	-2.0800
	新方法解	-14.9810	-9.6455	-5.2666	-2.0792

参 考 文 献

- [ 1 ] Mukherjee, Subrata, On the efficiency and accuracy of boundary element method and finite element method, *Int. J. Numer. Method Eng.*, 20 (1984), 515—522.
- [ 2 ] Alibabi, M.H. and W.S. Hall, Taylor expansion for singular kernel in BEM, *Int. J. Numer. Method Eng.*, 21 (1985), 2221—2236.
- [ 3 ] Li Hong-bao and Han Guo-ming, A new method for evaluating singular integral in stress analysis of solids by the direct boundary element method, *Int. J. Numer. Method Eng.*, 21 (1985), 2071—2098.
- [ 4 ] Vable, Madhukar, An algorithm based on the boundary element method for engineering mechanics, *Int. J. Numer. Method Eng.*, 21 (1985), 1625—1640.
- [ 5 ] Cruse, T.A., Numerical solutions in three-dimensional elastostatics, *Int. J. Solids Struct.*, 5 (1969), 1259—1274.
- [ 6 ] Lachat, J.C. and J.O. Watson, Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics, *Int. J. Numer. Method Eng.*, 10 (1976), 991—1005.
- [ 7 ] Kompis, V., Boundary integral equations method for three-dimensional elastostatic problems and formulation of the problem for large displacement, *Proc. 14th Jugosl. Kongresracion; Primenjene Mehanike C.* (1978), 113—120.
- [ 8 ] Ghosh, N., H. Rajiyah, S. Ghosh and S. Mukherjee, A new boundary element method formulation for linear elasticity, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 53 (1986), 69—76.
- [ 9 ] Okada, et al., A novel displacement gradient boundary element method for elastic stress analysis with high accuracy, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 55 (1988), 786—794.
- [ 10 ] Brebbia, C.A. (Ed.), *Boundary Element*, Pergamon Press (1986).
- [ 11 ] Tanake, Some recent advances in boundary element method, *A.M.S.*, 36 (1983), 627—630.
- [ 12 ] Telles, J.C.F., The boundary element method applied to inelastic problem, *Lecture Notes in Eng.*, Springer, Berlin (1983).
- [ 13 ] Brebbia, C.A., *A Boundary Element Technique in Engineering*, Newnew-Butter-

worths, London (1980).

- [14] Banagiee, P.K. and S.T. Raveendra, Advanced boundary element analysis for two- and three-dimensional problems of elastoplasticity, *Int. J. Numer. Method Eng.*, 23 (1986), 985—1002.

## An Effective Boundary Method for the Analysis of Elastoplastic Problems

Hu Ning

(*Department of Engineering Mechanics of Chongqing University, Chongqing*)

### Abstract

In this paper, a series of effective formulae of the boundary element method is presented. In these formulae, by using a new variable, two kernels are only of the weaker singularity of  $\ln r$  (where  $r$  is the distance between a source point and a field point). Hence, the singularities in the conventional displacement formulation and stress formulation at internal points are reduced respectively so that the "boundary-layer" effect which strongly degenerates the accuracy of stress calculation by using original formulae is eliminated. Also the direct evaluation of coefficients  $C$  (boundary tensor), which are difficult to calculate, is avoided. This method is used in elastoplastic analysis. The results of the numerical investigation demonstrate the potential advantages of this method.

**Key words** boundary element method, elastoplastic problem, numerical solution