

# 具有中心刚性质量的受热环板 的非线性振动和热屈曲\*

李世荣

(兰州 甘肃工业大学, 1991年8月2日收到)

## 摘 要

基于 von Kármán 方程和 Hamilton 原理, 本文研究了外周边完全夹紧、内周边固连一刚性质量的各向同性环板在均匀变温场内的非线性振动和热屈曲。采用参数摄动和数值微分方法, 求得了系统的非线性动力响应以及板面内失稳的临界温度。文中给出了一些有意义的特征曲线和数表。

**关键词** 板—刚性质量系统 非线性振动 热屈曲 固有频率 临界温度

## 一、引 言

带有刚性质量的薄板的横向振动在工程中具有广泛应用。许多情况下, 构件或结构将会受到温度变化的影响。

大量研究结果表明, 当板的振幅与其厚度同阶时经典的线性理论已不能真实地反映薄板的振动特征, 此时须考虑薄膜力的影响, 采用 von Kármán 动力方程去求解。由于这类方程的耦合性和非线性而难以求得解析解。目前所见的主要求解方法有摄动法和近似的数值方法。近年来, 已有许多文章<sup>[1~5]</sup>研究了圆板和环板的非线性振动问题。而其中考虑刚性质量和面内载荷(包括变温)因素对板的振动影响的论文甚少。一般, 刚性质量和面内载荷均会影响板的动力响应。例如, 受约束的弹性薄板因温度升高而产生的面内压力将会使板的抗弯刚度降低, 从而会减小其固有频率。当这种温度应力超过一定值时, 板的固有频率将为复值, 这时板已进入屈曲状态。为了定量地说明上述因素对板振动的影响, 本文将讨论外周边完全夹紧内周边固连一刚性质量的环形薄板在均匀变温场内的非线性振动和热弹性稳定性问题。采用参数摄动与数值微分有机结合的方法寻求与刚性质量和变温参数有关的板的非线性固有频率的高阶摄动解, 并获得表征板面内失稳特征的临界温度。

\* 叶开沅推荐。

## 二、问题的数学模型

考虑一内半径为 $a$ , 外半径为 $b$ , 厚度为 $h$ 的各向同性环形薄板, 其外周边完全固定, 内周边固连一半径为 $a$ 质量为 $M$ 且其质量轴对称分布的刚性圆盘(图1)。设板自无约束状态起的均匀升温为 $T$ 。现研究这一板—刚性质量系统在均匀升温场内的轴对称非线性振动。系统的动力响应可由著名的Hamilton原理来描述<sup>[5,6]</sup>, 由此可以导出无量纲控制方程

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \int_c^1 \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} w - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right] 2\pi x \delta w dx \right\} d\tau = 0 \quad (2.1)$$

$$x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (xv) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{m}{2x} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \quad \text{当 } x=c \quad (2.3a, b)$$

$$v - \frac{x}{\mu} \frac{\partial v}{\partial x} = \lambda, \quad \text{当 } x=c \quad (2.4)$$

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad v - \frac{x}{\mu} \frac{\partial v}{\partial x} = \lambda, \quad \text{当 } x=1 \quad (2.5a, b, c)$$

$$w = \bar{w}(x), \quad \partial w / \partial \tau = 0, \quad \text{当 } \tau = 0 \quad (2.6a, b)$$

上述方程中无量纲量的含义分别是:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{r}{b}, \quad w = \sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{W}{h}, \quad v = \frac{b}{D} r N_r, \quad \tau = \frac{t}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho}} \\ \lambda &= 12(1-\mu^2) \alpha (b/h)^2 T, \quad m = M / \pi a^2 \rho, \quad c = a/b \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

其中:  $W(r, t)$ 为中面挠度;  $N_r(r, t)$ 为径向薄膜力;  $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ 为抗弯刚度;  $E$ 为弹性模量;  $\mu$ 为泊松比;  $\alpha$ 为热膨胀系数;  $\rho$ 为板的质量面密度;  $r$ 为径向坐标;  $t$ 为时间变量;  $\bar{w}$ 为初始无量纲挠度;  $\delta w$ 为无量纲挠度 $w$ 的变分。

由于方程(2.1)和(2.3)中惯性项的存在, 使得难以求得问题的精确解。为了消除惯性项和时间变量, 将混合问题化为边值问题, 现选取调和响应模式

$$w(x, \tau) = \bar{w}(x) \cos \omega \tau \quad (2.8a)$$

$$v(x, \tau) = v_0(x) + \bar{v}(x) \cos^2 \omega \tau \quad (2.8b)$$

其中 $\omega$ 为系统的固有频率,  $v_0(x)$ 薄板在均匀变温场作用下的平面应力问题

$$x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (xv_0) = 0, \quad c < x < 1 \quad (2.9)$$

$$v_0 - \frac{x}{\mu} \frac{dv_0}{dx} = \lambda, \quad x = c, 1 \quad (2.10)$$

的解。它也称作问题(2.1)~(2.6)的平凡解。由(2.9)、(2.10)不难求出

$$v_0(x) = -\lambda x / (1-\mu) \quad (2.11)$$

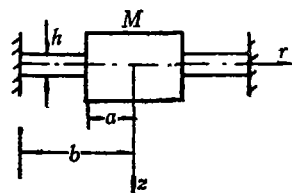


图1 结构示意图

现将(2.8)、(2.9)、(2.10)、(2.11)代入(2.1)~(2.6), 沿 $\tau_2=2\pi/\omega$ 到 $\tau_1=0$ 关于时间变量 $\tau$ 积分, 并利用变分 $\delta w$ 的任意性可得下列常微分方程边值问题

$$L_\lambda(\bar{w}) - \frac{3}{4} \frac{d}{dx} \left( \bar{v} \frac{d\bar{w}}{dx} \right) - \omega^2 \bar{w} = 0 \quad (2.12)$$

$$G(\bar{v}) = - (d\bar{w}/dx)^2/2 \quad (2.13)$$

$$\frac{d\bar{w}}{dx} = 0, \frac{d^3\bar{w}}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2\bar{w}}{dx^2} - \frac{m\omega^2}{2} x\bar{w} = 0, \quad \text{当 } x=c \quad (2.14a, b)$$

$$\bar{v} - \frac{x}{\mu} \frac{d\bar{v}}{dx} = 0, \quad \text{当 } x=c \quad (2.14c)$$

$$\bar{w} = 0, \quad \frac{d\bar{w}}{dx} = 0, \quad \bar{v} - \frac{x}{\mu} \frac{d\bar{v}}{dx} = 0, \quad \text{当 } x=1 \quad (2.15a, b, c)$$

其中微分算子 $L_\lambda$ 和 $G$ 的定义分别是:

$$L_\lambda = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} + \frac{\lambda}{1-\mu} \right) \quad (2.16)$$

$$G = x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \quad (2.17)$$

显然, (2.12)~(2.15)是一组偶合的非线性齐次常微分方程边值问题, 方程中包含温度参数 $\lambda$ , 刚性质量参数 $m$ 以及固有频率 $\omega$ . 因此, 这组方程是一个多参数的非线性边值问题. 如果令 $\omega=0$ , 则得描述环板在升温场作用下热弹性稳定性的控制方程. 由此可以计算环板失稳的临界温度并讨论临界点附近的分叉问题.

### 三、问题的摄动解

由于方程(2.12)、(2.13)中偶合项和非线性项的存在, 直接求解(2.13)~(2.15)在数学上还未见先例. 通常可采用将边值问题化为初值问题后进行数值计算的“打靶法”<sup>[4]</sup>以及将非线性方程化为一系列线性方程后再求近似解的摄动法<sup>[5]</sup>. 下面采用后一种方法进行求解. 为此, 选取摄动参数

$$\varepsilon = \bar{w}(c) \equiv \sqrt{12(1-\mu^2)} \bar{W}(a)/h \quad (3.1)$$

其中 $\bar{W}(a)$ 为板内周边的初始挠度或振幅. 将有关变量表示为参数 $\varepsilon$ 的级数形式. (为记述方便, 将 $\bar{w}$ ,  $\bar{v}$ 上的“—”省去)

$$w = \varepsilon w_1 + \varepsilon^3 w_3 + \varepsilon^5 w_5 + \varepsilon^7 w_7 + \dots \quad (3.2)$$

$$v = \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^4 v_4 + \varepsilon^6 v_6 + \varepsilon^8 v_8 + \dots \quad (3.3)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k_2 \varepsilon^2 + k_4 \varepsilon^4 + k_6 \varepsilon^6 + \dots \quad (3.4)$$

将(3.2)~(3.4)代入(2.12)~(2.15), 并利用(3.1)式, 由比较 $\varepsilon$ 的同次幂的系数, 可得一系列线性边值问题

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon: L_\lambda(w_1) - \omega_0^2 w_1 = 0; \quad w_1'(c) = 0, \quad w_1(c) = 1 \\ w_1''(c) + \frac{1}{c} w_1'(c) - \frac{c}{2} m \omega_0^2 w_1(c) = 0; \quad w_1(1) = 0, \quad w_1'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon^2: G(v_2) = -\frac{1}{2} \left( \frac{dw_1}{dx} \right)^2; \quad v_2(c) - \frac{c}{\mu} v_2'(c) = 0, \quad v_2(1) - \frac{1}{\mu} v_2'(1) = 0 \quad (3.6)$$

$$\varepsilon^3: \left. \begin{aligned} L_3(w_3) - \omega_0^2 w_3 - \frac{3}{4} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( v_2 \frac{dw_1}{dx} \right) - k_2 w_1 &= 0 \\ w_3(c) = 0, \quad w_3'(c) = 0 \\ w_3'''(c) + \frac{1}{c} w_3''(c) - \frac{c}{2} m(\omega_0^2 w_3(c) + k_2 w_1(c)) &= 0 \\ w_3(1) = 0, \quad w_3'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$$\varepsilon^4: G(v_4) = -\frac{dw_1}{dx} \frac{dw_3}{dx}; \quad v_4(c) - \frac{c}{\mu} v_4'(c) = 0, \quad v_4(1) - \frac{1}{\mu} v_4'(1) = 0 \quad (3.8)$$

$$\varepsilon^5: \left. \begin{aligned} L_4(w_5) - \omega_0^2 w_5 - \frac{3}{4} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( v_2 \frac{dw_3}{dx} + v_4 \frac{dw_1}{dx} \right) - k_2 w_3 - k_4 w_1 &= 0 \\ w_5(c) = 0, \quad w_5'(c) = 0 \\ w_5'''(c) + \frac{1}{c} w_5''(c) - \frac{c}{2} m(\omega_0^2 w_5(c) + k_2 w_3(c) + k_4 w_1(c)) &= 0 \\ w_5(1) = 0, \quad w_5'(1) = 0 \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

其中“'”代表关于坐标 $x$ 的导数。只要递推求解上述线性边值问题，就可获得(2.12)~(2.15)的摄动解(3.2)~(3.4)。

#### 四、数值计算与结果分析

我们采用有限差分法求解上述线性边值问题。这样可将微分方程边值问题化为代数特征值问题处理。先由(3.5)求出线性固有频率 $\omega_0$ ，然后可递推求得(3.4)式的高次项系数 $k_i$  ( $i=2, 4, 6, \dots$ )。从而获得系统非线性固有频率的平方 $\omega^2$ 的高阶近似解。这一计算过程容易在微机实现。对于给定参数 $c, m, \lambda$ ，由数值计算求得如下近似解( $\mu=1/3$ )

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k_2 \varepsilon^2 + k_4 \varepsilon^4 + k_6 \varepsilon^6 + \dots + k_{12} \varepsilon^{12} \quad (4.1)$$

为了定量反映上式中各非线性项的强弱程度，在表1中给出几组不同参数 $c, m, \lambda$ 所对应的 $\omega_0^2$ 和 $k_i$  ( $i=2, 4, \dots, 12$ )。结果表明， $|k_i|$ 随 $i$ 增大递减很快，且 $k_i$ 本身呈交错级数 $\{k_i\}$  ( $i=2, 4, \dots, 12$ )。表2中给出 $m=1.0, c=0.3, \lambda=0.0$ 时，不同无量纲振幅 $|W(a)|/h$ 对应非线性固有频率的各次近似值。其中 $\omega_j$  ( $j=0, 2, 4, \dots, 12$ )为 $\omega$ 的第 $j$ 次近似值。数值计算说明，在 $|W(a)|/h < 2.0$ ，或 $|\varepsilon| < 6.5$ 时，对给定参数 $c, m, \lambda$  (4.1)在数值计算的意义下是收敛的，而且 $k_2 \varepsilon^2$ 项是 $\omega^2$ 非线性项的主要部分。由此可大致给出(4.1)式的收敛范围。避免摄动解在应用中的盲目性。

当无量纲振幅 $|W(a)|/h$ 有限时，它对固有频率 $\omega$ 的影响显著(见图2)。图3中绘出在 $c=0.3, m=1.0$ 时不同温度参数 $\lambda$ 所对应的 $|W(a)|/h \sim \omega$ 曲线。结果表明，温度升高会使固有频率降低。这是由于温度升高而产生的面内压力会削弱板的抗弯刚度。图4中的两条曲线分

表1 不同参数  $c, m, \lambda$  对应的  $\omega_0^2$  和  $k_i$  ( $i=2, 4, \dots, 12$ )

$c$	$m$	$\lambda$	$\omega_0^2$	$k_2$	$k_4$	$k_6$	$k_8$	$k_{10}$	$k_{12}$
0.3	1.0	0.0	149.6	6.809	$-1.125 \times 10^{-2}$	$1.478 \times 10^{-4}$	$-2.472 \times 10^{-6}$	$4.398 \times 10^{-8}$	$-7.956 \times 10^{-10}$
0.3	1.0	10.0	82.08	6.980	$-1.441 \times 10^{-2}$	$2.216 \times 10^{-4}$	$-4.271 \times 10^{-6}$	$8.693 \times 10^{-8}$	$-1.796 \times 10^{-9}$
0.3	3.0	10.0	51.55	4.387	$-9.400 \times 10^{-3}$	$1.020 \times 10^{-4}$	$-1.463 \times 10^{-6}$	$2.478 \times 10^{-8}$	$-4.603 \times 10^{-10}$
0.5	1.0	0.0	310.9	14.85	$-2.599 \times 10^{-2}$	$2.587 \times 10^{-4}$	$-3.277 \times 10^{-6}$	$4.864 \times 10^{-8}$	$-7.834 \times 10^{-10}$
0.5	3.0	0.0	149.6	7.122	$-1.379 \times 10^{-2}$	$1.203 \times 10^{-4}$	$-1.267 \times 10^{-6}$	$1.502 \times 10^{-8}$	$-1.963 \times 10^{-10}$
0.5	3.0	20.0	78.05	7.323	$-1.654 \times 10^{-2}$	$1.579 \times 10^{-4}$	$-1.870 \times 10^{-6}$	$2.462 \times 10^{-8}$	$-3.635 \times 10^{-10}$

表2 不同无量纲振幅  $|W(a)|/h$  对应非线性固有频率的各次近似值 ( $c=0.3, m=1.0, \lambda=0.0$ )

$ W(a) /h$	$\omega_0$	$\omega_2$	$\omega_4$	$\omega_6$	$\omega_8$	$\omega_{10}$	$\omega_{12}$
0.2	12.2308	12.7541	12.7525	12.7525	12.7525	12.7525	12.7525
0.6	12.2308	13.3794	13.3716	13.3720	13.3720	13.3720	13.3720
1.0	12.2308	15.2087	15.1553	15.1638	15.1621	15.1624	15.1624
1.6	12.2308	18.9414	18.6591	18.7735	18.7148	18.7469	18.7291
2.0	12.2308	21.8275	21.2256	21.6072	21.3014	21.5629	21.3360

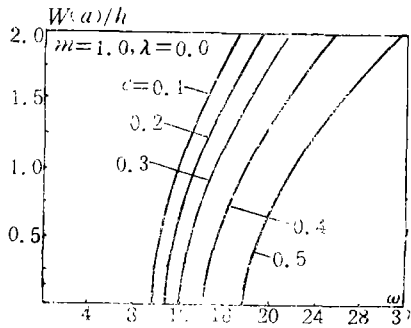


图2 不同孔径比  $c$  对应的  $|W(a)|/h \sim \omega$  曲线

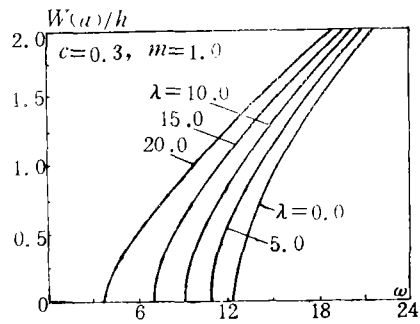


图3 不同无量纲温度  $\lambda$  对应的  $|W(a)|/h \sim \omega$  曲线

别为线性固有频率  $\omega_0$  和非线性固有频率  $\omega$  (取  $|W(a)|/h=1.0$ ) 关于无量纲温度  $\lambda$  的特征曲线。两条曲线不仅反映了固有频率与无量纲温度的变化关系,而且也显示了非线性结果与线性结果的明显差别。根据线性理论,在  $\lambda=\lambda_{cr}=21.67$  时,  $\omega_0=0$ 。这意味着板已完全丧失抗弯能力。 $\lambda_{cr}$  正是板产生热屈曲的临界温度。然而,在无量纲振幅  $|W(a)|/h=1.0$  时,使得非线性固有频率  $\omega=0$  的无量纲温度  $\lambda_{cr}^*=34.60$ 。由此可见,线性化问题的临界温度是保守的,当  $\lambda_{cr} < \lambda < \lambda_{cr}^*$  时,板仍具抗弯能力。

若在(3.5)中令  $\omega_0=0$ , 求解该边值问题即可得表征板面内失稳的线性临界温度  $\lambda_{cr}$ 。表3中是一些给定几何参数  $c$  对应的无量纲临界温度。当  $c$  增大时,  $\lambda_{cr}$  也随之增加。这一结果正与物理实际相吻合。这里获得同[7]中相似的结论。

表3 临界温度随几何参数  $c$  的变化趋势

$c$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\lambda_{cr}$	13.3449	17.3098	21.6692	29.2252	41.3535	64.8494	112.647

在  $c=0.3$  条件下计算了系统的高阶线性固有频率(表4)。结果表明,参数  $m$  和  $\lambda$  对一阶频率  $\omega_0^{(1)}$  的影响显著,而对较高频率  $\omega_0^{(2)}$ ,  $\omega_0^{(3)}$  的影响却较小。

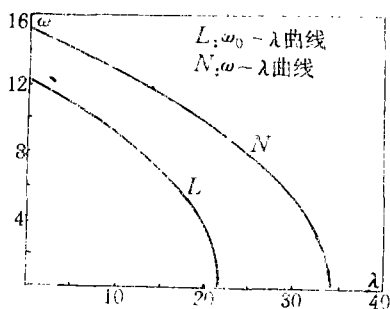
表4

线性固有频率\*

(c=0.3)

$\lambda$	$m$		0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
0.0	$\omega_0^{(1)}$		14.53	12.29	10.82	9.77	8.97	8.34
	$\omega_0^{(2)}$		65.51	57.27	53.71	51.97	50.56	49.73
	$\omega_0^{(3)}$		156.61	139.66	134.45	132.00	130.58	129.67
10.0	$\omega_0^{(1)}$		10.80	9.11	8.02	7.24	6.65	6.18
	$\omega_0^{(2)}$		61.24	53.70	50.43	48.64	47.50	46.72
	$\omega_0^{(3)}$		152.13	135.69	130.59	128.18	126.78	125.87
15.0	$\omega_0^{(1)}$		8.29	6.98	6.14	5.54	5.09	4.74
	$\omega_0^{(2)}$		58.99	51.83	48.70	46.98	45.89	45.14
	$\omega_0^{(3)}$		149.84	133.65	128.61	126.22	124.83	123.92
20.0	$\omega_0^{(1)}$		4.47	3.76	3.31	2.99	2.74	2.55
	$\omega_0^{(2)}$		56.65	49.87	46.91	45.22	44.21	43.49
	$\omega_0^{(3)}$		147.51	131.59	126.60	124.43	122.84	121.94

\*其中  $\omega_0^{(1)}$ ,  $\omega_0^{(2)}$ ,  $\omega_0^{(3)}$  分别是1~3阶线性固有频率。



c=0.3, m=1.0, |W(a)|/h=1.0  
图4 固有频率与无量温度的特征曲线

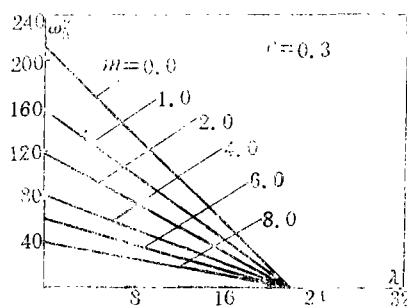


图5 不同刚性质量参数m对应的 $\omega_0^2 \sim \lambda$ 曲线

图5给出不同刚性质量参数m所对应的 $\omega_0^2 \sim \lambda$ 曲线。这些曲线均为近似的直线。由 $\omega_0^2$ 随 $\lambda$ 和m的变化可知,可以利用调节温度和改变刚性质量的方法来调节系统的固有频率。这种作法易在工程中实现。所有直线均在 $\lambda$ 轴上交于同一点。这是由于临界温度与m无关。

在(2.12)~(2.15)中,若令 $\omega=0$ ,则可分析板在临界温度 $\lambda_{cr}$ 附近的静态分叉问题,且可将温度参数 $\lambda$ 展成级数

$$\lambda = \lambda_{cr} + \lambda_2 \varepsilon^2 + \lambda_4 \varepsilon^4 + \dots \quad (1.2)$$

### 参 考 文 献

- [1] Sathyamoorthy, M., Nonlinear vibration analysis of plates, A review and survey of current developments, *Appl. Mech. Rev.*, 40(11) (1987), 1557—1561.
- [2] Yamada, G. and T. Irie, Plate vibration research in Japan, *Appl. Mech. Rev.*, 40(7) (1987), 879—992.
- [3] 宋家骥, 圆板非线性振动问题, 《全国第五届非线性振动会议论文集》(1989), 289—293.
- [4] Huerig, C. L. D. and H. S. Walker, Jr., Nonlinear vibration of a hinged circu-

- lar plate with a concentric rigid mass, *J. Sound Vibration*, 126(1) (1988).
- [ 5 ] 李世荣, 圆板在周边面内载荷作用下的非线性振动, 甘肃工业大学学报, 16(1) (1990), 90—95.
- [ 6 ] Leipholz, H., *Stability of Elastic System*, Alphen ann den Rijn, Sijhoff & Noordhoff (1980).
- [ 7 ] 李世荣、程昌钧, 复合载荷下环形薄板的热屈曲, 应用数学和力学, 12(3) (1991), 279—286.

## Nonlinear Vibration and Thermal-Buckling of a Heated Annular Plate with a Rigid Mass

Li Shi-rong

(Gansu University of Technology, Lanzhou)

### Abstract

On the basis of Hamilton's principle and dynamic version of von Kármán's equations, the nonlinear vibration and thermal-buckling of a uniformly heated isotropic annular plate with a completely clamped outer edge and a fixed rigid mass along the inner edge are studied. By parametric perturbation and numerical differentiation, the nonlinear response of the plate-mass system and the critical temperature in the mid-plane at which the plate is in buckled state are obtained. Some meaningful characteristic curves and data tables are given.

**Key words** plate-rigid mass system, nonlinear vibration, thermal-buckling, natural frequency, critical temperature